

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Часть I. ТЕОРИЯ

<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ</b> . . . . .	16
<b>1.1. Множество комплексных чисел</b> . . . . .	16
1.1.1. Операции с комплексными числами . . . . .	16
1.1.2. Поле комплексных чисел . . . . .	17
1.1.3. Алгебраическая форма записи . . . . .	18
1.1.4. Тригонометрическая форма записи . . . . .	19
<b>1.2. Расширенная комплексная плоскость</b> . . . . .	21
1.2.1. Топология комплексной плоскости . . . . .	21
1.2.2. Компактность . . . . .	24
1.2.3. Связность . . . . .	24
1.2.4. Стереографическая проекция . . . . .	25
1.2.5. Сферическая метрика . . . . .	27
<b>1.3. Предел и непрерывность</b> . . . . .	27
1.3.1. Функции комплексного переменного . . . . .	27
1.3.2. Непрерывность . . . . .	28
1.3.3. Равномерная непрерывность . . . . .	29
1.3.4. Теорема Арцела – Асколи . . . . .	30
<b>1.4. Кривые и области</b> . . . . .	30
1.4.1. Кривые и контуры . . . . .	30
1.4.2. Области . . . . .	36
1.4.3. Многосвязные области . . . . .	37
<b>Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ</b> . . . . .	39
<b>2.1. Комплексное дифференцирование</b> . . . . .	39
2.1.1. Производная и дифференцируемость . . . . .	39
2.1.2. Правила дифференцирования . . . . .	40

2.1.3. Условия Коши - Римана . . . . .	41
<b>2.2. Аналитические функции и конформные отображения . . . . .</b>	<b>42</b>
2.2.1. Геометрический смысл аргумента производной . . . . .	42
2.2.2. Геометрический смысл модуля производной . . . . .	43
2.2.3. Понятие аналитической функции . . . . .	44
<b>2.3. Дробно-линейные отображения . . . . .</b>	<b>45</b>
2.3.1. Простейшие свойства . . . . .	45
2.3.2. Групповое свойство . . . . .	46
2.3.3. Круговое свойство . . . . .	47
2.3.4. Свойство симметрии . . . . .	48
2.3.5. Свойство трех точек . . . . .	51
2.3.6. Примеры дробно-линейных отображений . . . . .	52
2.3.7. Функция Жуковского . . . . .	55
<b>2.4. Элементарные аналитические функции . . . . .</b>	<b>57</b>
2.4.1. Экспоненциальная функция . . . . .	57
2.4.2. Тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	58
2.4.3. Логарифмическая функция . . . . .	60
2.4.4. Степенная функция . . . . .	63
2.4.5. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим . . . . .	63
<b>Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КОШИ . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.1. Криволинейные интегралы . . . . .</b>	<b>65</b>
3.1.1. Комплексные криволинейные интегралы . . . . .	65
3.1.2. Свойства криволинейных интегралов . . . . .	67
<b>3.2. Интегральная теорема Коши . . . . .</b>	<b>70</b>
3.2.1. Интегральная теорема . . . . .	70
3.2.2. Обобщение интегральной теоремы Коши . . . . .	72
3.2.3. Случай многосвязной области . . . . .	75
3.2.4. Первообразная аналитической функции . . . . .	76
<b>3.3. Интегральная формула Коши . . . . .</b>	<b>79</b>
3.3.1. Интегральная формула . . . . .	79
3.3.2. Формула среднего значения и принцип максимума . . . . .	81
3.3.3. Формула Шварца . . . . .	83
3.3.4. Интеграл типа Коши . . . . .	85
3.3.5. Теорема Мореры . . . . .	88
3.3.6. Сопряженные гармонические функции . . . . .	89

<b>Глава 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ</b> . . . . .	91
<b>4.1. Ряды Тейлора</b> . . . . .	91
4.1.1. Основные понятия теории рядов . . . . .	91
4.1.2. Степенные ряды . . . . .	93
4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара . . . . .	94
4.1.4. Разложение в степенной ряд . . . . .	97
4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности . . . . .	98
<b>4.2. Теоремы единственности</b> . . . . .	99
4.2.1. Локальная форма единственности . . . . .	99
4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса . . . . .	100
<b>4.3. Последовательности аналитических функций</b> . . . . .	100
4.3.1. Сходимость внутри области . . . . .	100
4.3.2. Принцип счетной компактности . . . . .	101
4.3.3. Теорема Витали . . . . .	103
4.3.4. Теорема Вейерштрасса . . . . .	104
<b>Глава 5. РЯДЫ ЛОРАНА</b> . . . . .	106
<b>5.1. Разложение в ряд Лорана</b> . . . . .	106
5.1.1. Ряд Лорана . . . . .	106
5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения . . . . .	107
5.1.3. Неравенства Коши . . . . .	110
<b>5.2. Классификация изолированных особых точек</b> . . . . .	110
5.2.1. Правильные точки функции . . . . .	110
5.2.2. Полюсы . . . . .	112
5.2.3. Существенно особые точки . . . . .	114
5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки . . . . .	115
5.2.5. Теорема Сохоцкого . . . . .	116
5.2.6. Целые и мероморфные функции . . . . .	117
<b>Глава 6. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ</b> . . . . .	119
<b>6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах</b> . . . . .	119
6.1.1. Вычеты . . . . .	119
6.1.2. Формулы для вычисления вычетов . . . . .	120
6.1.3. Теорема Коши о вычетах . . . . .	122
6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке . . . . .	123
6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов . . . . .	124

<b>6.2. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения</b>	125
6.2.1. Логарифмический вычет . . . . .	125
6.2.2. Принцип аргумента . . . . .	127
6.2.3. Теорема Руше . . . . .	129
6.2.4. Принцип сохранения области . . . . .	131
<b>Глава 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА</b>	133
<b>7.1. Аналитическое продолжение . . . . .</b>	133
7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение	133
7.1.2. Принцип симметрии Римана – Шварца . . . . .	138
<b>7.2. Однолистные функции . . . . .</b>	141
7.2.1. Теорема о числе прообразов . . . . .	141
7.2.2. Критерий локальной однолистности . . . . .	142
7.2.3. Особые точки однолистных функций . . . . .	145
7.2.4. Последовательности однолистных функций . . . . .	146
<b>7.3. Конформное отображение областей . . . . .</b>	146
7.3.1. Автоморфизмы основных областей . . . . .	146
7.3.2. Теорема Римана . . . . .	149
<b>7.4. Конформные отображения многоугольников . . . . .</b>	152
7.4.1. Эллиптические интегралы первого рода . . . . .	152
7.4.2. Эллиптический синус . . . . .	156
7.4.3. Формула Кристоффеля – Шварца . . . . .	157

## Часть II. ПРАКТИКА

<b>Глава 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА и действия над ними . . . . .</b>	160
1.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	160
1.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	166
1.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	169
1.4. Задания творческого характера . . . . .	171
<b>Глава 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . .</b>	173
2.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	173
2.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	178
2.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	180
2.4. Задания творческого характера . . . . .	181

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО . . . . .	183
3.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	183
3.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	190
3.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	194
3.4. Задания творческого характера . . . . .	196
Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ . . . . .	199
4.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	199
4.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	202
4.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	204
4.4. Задания творческого характера . . . . .	205
Глава 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ . . . . .	207
5.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	207
5.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	212
5.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	218
5.4. Задания творческого характера . . . . .	220
Глава 6. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ . . . . .	221
6.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	221
6.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	225
6.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	229
6.4. Задания творческого характера . . . . .	232
Глава 7. ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО . . . . .	235
7.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	235
7.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	238
7.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	240
7.4. Задания творческого характера . . . . .	241

Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА и ФОРМУЛА КОШИ . . . . .	244
8.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	244
8.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	253
8.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	260
8.4. Задания творческого характера . . . . .	267
Глава 9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ . . . . .	269
9.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	269
9.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	273
9.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	278
9.4. Задания творческого характера . . . . .	281
Глава 10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА . . . . .	283
10.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	283
10.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	286
10.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	289
10.4. Задания творческого характера . . . . .	291
Глава 11. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЕДИН- СТВЕННОСТИ . . . . .	294
11.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	294
11.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	297
11.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	299
11.4. Задания творческого характера . . . . .	301
Глава 12. РЯД ЛОРНА . . . . .	303
12.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	303
12.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	309
12.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	314
12.4. Задания творческого характера . . . . .	317

Глава 13. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ . . . . .	319
13.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	319
13.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	322
13.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	325
13.4. Задания творческого характера . . . . .	327
Глава 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ . . . . .	331
14.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	331
14.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	336
14.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	338
14.4. Задания творческого характера . . . . .	342
Глава 15. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ . . . . .	344
15.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	344
15.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	350
15.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	355
15.4. Задания творческого характера . . . . .	358
Глава 16. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ . . . . .	360
16.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	360
16.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	363
16.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	366
16.4. Задания творческого характера . . . . .	367
Глава 17. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА . . . . .	369
17.1. Задания для аудиторной работы . . . . .	369
17.2. Базовые индивидуальные задания . . . . .	372
17.3. Задания для самостоятельной работы . . . . .	374
17.4. Задания творческого характера . . . . .	376

<b>Глава 18. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ, ПРИНЦИП АРГУМЕНТА</b>	<b>378</b>
18.1. Задания для аудиторной работы	378
18.2. Базовые индивидуальные задания	381
18.3. Задания для самостоятельной работы	384
18.4. Задания творческого характера	388
<b>Глава 19. ОТОБРАЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА</b>	<b>390</b>
19.1. Задания для аудиторной работы	390
19.2. Базовые индивидуальные задания	395
19.3. Задания для самостоятельной работы	400
19.4. Задания творческого характера	401
<b>ОТВЕТЫ</b>	<b>403</b>
<b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>425</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b>	<b>426</b>
<b>СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	<b>430</b>