$$C_* = -\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}; \quad r_* = \min\|p(z)\| = \left\|\frac{1}{z_1}+C_*\right\| = \left\|\frac{1}{z}+C_*\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}\right\|.$$

Следствие. Минимальное значение нормы $p(z)$ на множестве, определяемом неравенством

$$\|1/z + C_*\| \le r_*, \tag{1}$$

достигается при $C = C_*$ и равно r_*.

Опишем множество, определяемое неравенством (1). Возможны три случая: 1) $|C_*| = r_*$, т.е. $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$. Тогда (1) определяет замкнутую полуплоскость; 2) $|C_*| < r_*$, т.е. $|z_1+z_2| < |z_2-z_1|$. Тогда (1) определяет замыкание внешности круга, содержащего начало координат; 3) $|C_*| > r_*$, т.е. $|z_1+z_2| > |z_2-z_1|$. Тогда (1) определяет замыкание внутренности круга, не содержащего начало координат.

УДК 517.5

Студ. Астапчик А.В.,
ст. преп. Никонова Т.В.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО И РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается решение сингулярно возмущенного алгебраического уравнения [1]

$$\varepsilon x^n = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1x + a_0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_s—const, $n>m$, n, $m\in\mathbf{Z}$. При $\varepsilon\to0$ уравнение (1) сводится к уравнению

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

имеющему корни α_s, где $s=1..m$. Для уточнения этих корней положим $x=x_0+\varepsilon x_1+\ldots$

Подставляя в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$x = \alpha_s + \varepsilon\alpha_s^n\left[m\alpha_s^{m-1} + (m-1)a_{m-1}\alpha_s^{m-2} + (m-2)a_{m-2}\alpha_s^{m-3} + \ldots + a_1\right]^{-1} + \ldots \ (2)$$

Это разложение становится непригодным, если член в скобках стремится к нулю. Т.к. оставшиеся n-m корней уравнения стремятся к бесконечности при $\varepsilon\to0$, то разложения для них будем искать в виде $x = \frac{y}{\varepsilon^\nu} + x_0 + \ldots, \nu > 0$. Подставив в (1) и приравняв степени при главных членах, получим, что $x = \frac{\omega^r}{\varepsilon^\nu} + \frac{a_{m-1}}{n-m} + \ldots, r = \overline{1..(n-m)}$, $\nu = \frac{1}{n-m}$, $\omega = e^{2i\pi/(n-m)}$.

Используя данный метод, для корней регулярно возмущенного уравнения $x^3-(2+\varepsilon)x^2-(1-\varepsilon)x+2+3\varepsilon=0$ построены разложения $x=1+3/2\cdot\varepsilon+\ldots$, $x=2-5/3\cdot\varepsilon+\ldots$, $x=-1-5/6\cdot\varepsilon+\ldots$

Решения уравнения $x^3-(3+\varepsilon)x-2+\varepsilon=0$ найдено в виде $x=2-5/9\cdot\varepsilon+\ldots$, $x = -1+\sqrt{2/3}\cdot\varepsilon+\ldots$ и $x = -1-\sqrt{2/3}\cdot\varepsilon+\ldots$

Литература

1. А.Х. Найфе Введение в методы возмущений.- М.: 1984.