УДК 621.317.738

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ НАКЛАДНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

канд. техн. наук, доц. А.А. ДЖЕЖОРА
(Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск)

Целый ряд композиционных полимерных материалов, применяемых в народном хозяйстве, обладает ортогональной анизотропией физико-механических свойств и относится к ортотропным средам. В ортогональной системе координат диэлектрические характеристики среды (диэлектрическая проницаемость, проводимость) выражаются тензором диагонального вида. Примерами таких сред являются различные волокнистые и слоистые структуры, ткани, искусственные пленки, покрытия, стеклопластики, бумага, композиции волокон. В случае совпадения осей координат X, Y, Z с осями анизотропии диэлектрическая проницаемость анизотропного диэлектрика выражается тензором второго ранга [1]

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Константы тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} являются характеристиками материала и несут сведения о составе, структуре, влажности материала, т.е. входят в комплекс исходной информации для диагностики качества материалов, прогнозирования их деформационных и прочностных свойств.

Для неразрушающего контроля диэлектрических свойств ортотропных полимерных материалов используют преобразователи, создающие плоскопараллельные поля. Таковыми являются: ленточные накладные измерительные конденсаторы (НИК) [1], ленточные накладные измерительные конденсаторы с дополнительным плоским экраном (ЭНИК), зеркально-симметричные ленточные накладные измерительные конденсаторы (ЗСНИК) [2].

Применительно к случаю, когда силовые линии электрического поля ленточных электродов НИК замыкаются в плоскости анизотропии *ZOX* (в соответствии с рисунком 1) рабочая емкость равна [1]:

$$C_1 = \sqrt{\varepsilon_z \varepsilon_x}\, \varepsilon_0\, K(k)/K(k')\, l = \sqrt{\varepsilon_z \varepsilon_x}\, \varepsilon_0 A, \qquad (1)$$

где A – геометрический коэффициент, определяемый размерами электродов; ε_0 – электрическая постоянная.

Выражение (1) легло в основу методик неразрушающего определения анизотропии диэлектрических свойств ортотропных материалов. В [3] рассмотрена методика неразрушающего определения составляющих тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} в случае доступа к двум ортогональным поверхностям исследуемого материала. В зависимости от схемы расположения ленточных электродов на контролируемой поверхности материала (согласно рис. 1), измеренные диэлектрические проницаемости для ортотропных материалов равны:

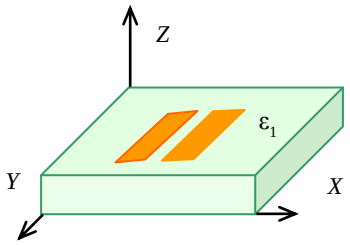

Рис. 1. Схема расположения электродов НИК при определении анизотропии физических свойств

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_z \varepsilon_x}\,; \qquad \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_y \varepsilon_x}\,; \qquad \varepsilon_3 = \sqrt{\varepsilon_y \varepsilon_z}.$$

Составляющие тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1\varepsilon_2/\varepsilon_3\,; \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_2\varepsilon_3/\varepsilon_1\,; \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_1\varepsilon_3/\varepsilon_2\,.$$

Относительная чувствительность емкости НИК на единицу длины электродов к изменению константы тензора диэлектрической проницаемости ε_x не зависит от геометрических размеров НИК и равна

$$S = \partial C_1 / C_1 \partial \varepsilon_x = 1/2\varepsilon_x\,.$$

Несмотря на кажущуюся, на первый взгляд, простоту методики определения основных констант тензора диэлектрической проницаемости, при её практическом осуществлении возникает ряд затруднений. Значения констант $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ для широкого класса материалов различаются незначительно. Поэтому погрешность, обусловленная воздушным зазором или неплотным прилеганием электродов к контроли-

руемой поверхности, может не только достигнуть недопустимых значений, но и качественно изменить представление об анизотропии исследуемого материала. В этой связи возникает необходимость в определении констант тензора диэлектрической проницаемости без перестановки НИК. Для решения этой задачи использовались устройства [4]. Изменение направления вектора напряженности электрического поля достигалось либо коммутированием электродов с помощью переключателя, либо применением двух НИК, электроды которых сдвинуты друг относительно друга на угол осей анизотропии (в частном случае для измерения ортогональной анизотропии на угол $\alpha = 90°$). В [1] показано, что более рационально измерение разности или отношения констант коэффициентов анизотропии по сравнению с нахождением их абсолютных значений. В случае измерения разности высокая чувствительность измерительного устройства может быть достигнута в результате применения дифференциального способа измерения, а в случае отношения констант – путем применения дискретных делителей сигналов. Определяя такими способами попарно две разности констант или два отношения на основе точного значения одной из них, определенной в условиях, обеспечивающих наибольшую точность, можно рассчитать и остальные константы. Поскольку отдельные константы отличаются одна от другой всего на несколько процентов, то погрешности измерения в соответствии с рассмотренной методикой равны разности погрешностей измерения абсолютных значений двух констант.

Оценивая применение накладных преобразователей для неразрушающего контроля анизотропии линейно-протяженных плоских материалов, следует отметить, что в случае однопараметрового контроля, согласно методикам [3], получить достоверные результаты об анизотропии не представляется возможным. Это связано, в первую очередь, с задачей оптимизации конструкций преобразователей. Глубина зоны контроля преобразователя должна быть меньше минимальной толщины материала и, следовательно, изменение толщины не должно сказываться на результатах измерений. Только в этом случае выполняется выражение (1). Во-вторых, большая часть тонких полимерных материалов (искусственные и синтетические кожи, пленки, покрытия, ткани, картон, стеклопластики и т.д.) имеют неквазигомогенную структуру. Неоднородности структуры могут быть сравнимы с толщиной материалов. В силу этого выполнение узких ленточных электродов приведет к соразмерности неоднородностей и размеров НИК и, следовательно, к методическим погрешностям измерения. Кроме того, у линейно-протяженных полотнообразных материалов нет доступа к двум ортогональным поверхностям, а это не позволит определять константы диэлектрической проницаемости согласно [3].

Таким образом, возможности применения НИК в случае одностороннего доступа к контролируемой поверхности ограничены свойствами и размерами контролируемых изделий. Наиболее перспективными в этом случае являются методы определения анизотропии линейно-протяженных плоских материалов с использованием ЗСНИК [2] либо ЭНИК.

Рассмотрим секцию преобразователя в виде системы из зеркально-симметричных чередующихся электродов (рис. 2).

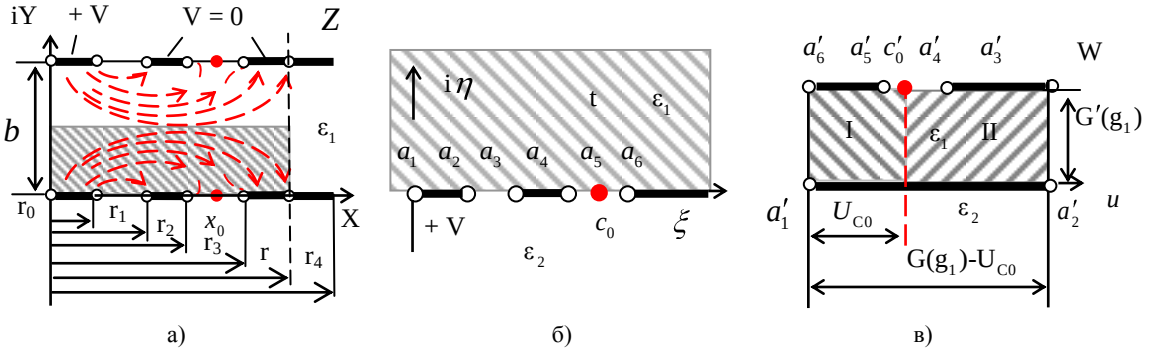

Рис. 2. Конформные преобразования для одной из секций ЗСНИК:
а – поперечное сечение преобразователя (исходная область затонирована);
б – преобразование исходной области на верхнюю полуплоскость *t*;
в – преобразование исходной области в прямоугольник

Будем полагать следующее:

- толщина подложки преобразователя b больше межэлектродных зазоров $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2$ (в этом случае влиянием экрана подложки на характер поля в рабочей области можно пренебречь);
- линейные размеры преобразователей во много раз меньше длины волны электромагнитного поля;
- длина электродов намного больше их поперечных размеров;

- толщина электродов бесконечно мала;
- диэлектрик изотропен и однороден;
- число слоёв не больше двух, причем граница их раздела совпадает или с плоскостью электродов, или с поверхностью силовых линий.

Так как при достаточно большом количестве электродов и периодическом характере их следования распределение зарядов на одноименных электродах можно считать одинаковыми, то анализ электрического поля преобразователя проведем на примере одной секции в соответствии с рисунком 2. Определение частичных емкостей секции и расчет поля в изотропной среде осуществим методами конформных отображений и непосредственного определения напряженности электрического поля. Для этого половину секции в виде прямоугольника, изображенного на рисунке 2, а, примем за часть плоскости комплексного переменного Z и конформно отобразим на верхнюю полуплоскость t (рис. 2, б) с соблюдением следующего соответствия точек:

a_1 ($x = 0$) отображается точкой – (0);

a_2 ($x = r_0$) отображается точкой – $sn^2\ r_0 G_0(g_0)/r, g_0$;

a_3 ($x = r_1$) отображается точкой – $sn^2\ r_1 G_0(g_0)/r, g_0$;

a_4 ($x = r_2$) отображается точкой – $sn^2\ r_2 G_0(g_0)/r, g_0$;

a_5 ($x = r_3$ отображается точкой – $sn^2\ r_3 G_0(g_0)/r, g_0$;

a_6 ($x = r$) отображается точкой – 1.

Такое отображение осуществляет функция: $t = sn^2\ zG_0(g_0)/r, g_0$, в которой модуль эллиптического интеграла $G_0(g_0)$ определяется из соотношения: $b/2r = G_0'(g_0)/G_0(g_0)$.

Так как потенциалы второго и третьего электродов совпадают, то между ними располагается особая точка c_0, в которой напряженность поля равна нулю. Эта точка принадлежит границе раздела двух областей и позволяет провести расчеты полей замыкающихся на охранный электрод $a_3\,a_4$ и низкопотенциальный $a_5\,a_6$. Ее координата определяется исходя из равенства нулю разности потенциалов между охранным $a_3\,a_4$ и низкопотенциальным $a_5\,a_6$ электродами:

$$c_0 = \frac{\displaystyle\int_{a_4}^{a_5} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)(a_5 - \xi)(a_6 - \xi)}}}{\displaystyle\int_{a_4}^{a_5} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)(a_5 - \xi)(a_6 - \xi)}}}. \qquad (2)$$

Рабочая емкость на единицу длины для одной секции C_p определяется выражением:

$$C_p = \frac{2\tau_{13}}{V_{12}} = 2\varepsilon_1\varepsilon_0 \frac{\displaystyle\int_{a_5}^{a_6} \frac{(\xi - c_0)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)(\xi - a_5)(a_6 - \xi)}}}{\displaystyle\int_{a_2}^{a_3} \frac{(c_0 - \xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(a_3 - \xi)(a_4 - \xi)(a_5 - \xi)(a_6 - \xi)}}},$$

паразитная C_n :

$$C_n = \frac{2\tau_{12}}{V_{12}} = 2\varepsilon_1\varepsilon_0 \frac{\displaystyle\int_{a_3}^{a_4} \frac{(c_0 - \xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(a_4 - \xi)(a_5 - \xi)(a_6 - \xi)}}}{\displaystyle\int_{a_2}^{a_3} \frac{(c_0 - \xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(a_3 - \xi)(a_4 - \xi)(a_5 - \xi)(a_6 - \xi)}}},$$

где τ_{12} и τ_{13} – заряды охранного и низкопотенциального электродов; V_{12} – разность потенциалов между высокопотенциальным $a_1\,a_2$ и заземленным охранным электродом $a_3\,a_4$; c_0 – особая точка, определяемая выражением (2).

На рисунке 3 приведены результаты расчета рабочих и паразитных емкостей преобразователя в зависимости от величины относительного расстояния b/r между плоскостями зеркально-симметричных НИК. Из графиков видно, что рабочая емкость возрастает с увеличением значения этого параметра. Паразитная ем-

кость практически не зависит от величины относительного расстояния b/r, оставаясь постоянной. Случаю $b \to \infty$ соответствует система двух автономных НИК. Это позволяет оценить глубину зоны контроля НИК для однородной среды согласно [5]. Для многосекционного НИК ($r_0 = 2$; $r_1 = 3$; $r_2 = 4$; $r_3 = 5$; $r = 7$) глубиной зоны контроля можно считать расстояние равное ширине секции r.

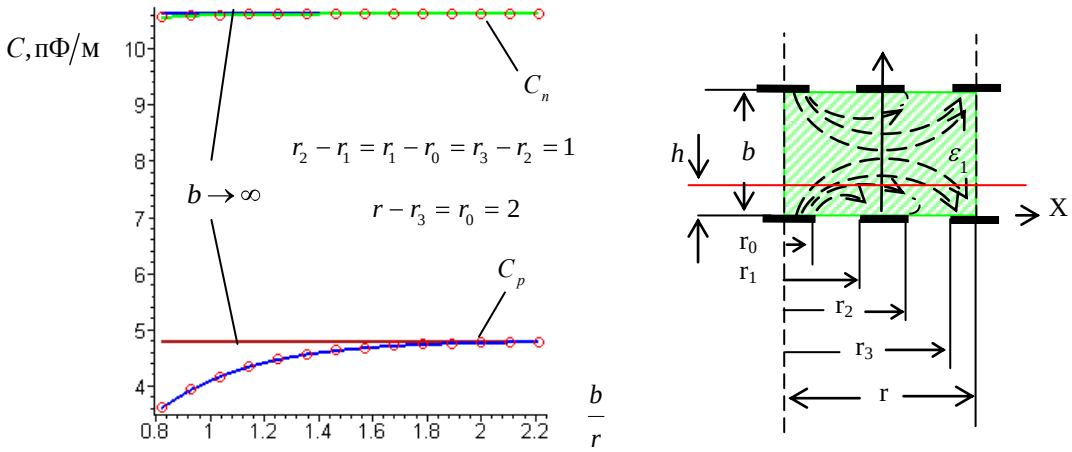

Рис. 3. Графики рабочей и паразитной емкостей на единицу длины электродов для одной секции многосекционного ЗСНИК в зависимости от относительного межплоскостного расстояния b/r

Для расчета картины поля силовых линий преобразователя полуплоскость t (см. рис. 2, б) отображается на прямоугольник комплексной плоскости W. В этом случае исходная область Z связана с W соотношением:

$$W = \mathrm{F}_6\left(\frac{\mathrm{sn}\ zG_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{cn}\ zG_0(g_0)/r, g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}, g_6\right),$$

где – модуль эллиптического интеграла F_6 равен

$$g_6 = \frac{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_1G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{sn}\ r_1G_0(g_0)/r, g_0}.$$

Силовые линии напряженности электрического поля перпендикулярны эквипотенциальным линиям. Поэтому линия, проходящая через особую точку на плоскости W

$$U_{C0} = Re\left\{\mathrm{F}_6\left(\frac{\mathrm{sn}\ \mathrm{F}(\sqrt{C_0}, g_0), g_0}{\mathrm{cn}\ \mathrm{F}(\sqrt{C_0}, g_0), g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}, g_6\right)\right\} = const\ ,$$

разобьет поле рассматриваемого преобразователя на два прямоугольника (рис. 2, в). Первый представляет собой конформное отображение рабочей области преобразователя на плоскость W; второй – конформное отображение паразитной области преобразователя на плоскость W. Преобразование первого прямоугольника в плоский конденсатор на плоскости комплексного переменного W_1 через квадрант t_1 выполняет функция:

$$W_1 = \mathrm{F}_8\ \mathrm{sn}\ WG_7(g_7)/U_{C0}, g_7\ , g_8\ , \tag{3}$$

в которой модуль эллиптического интеграла $G_7(g_7)$ определяется из соотношения:

$$G_6'(g_6)/U_{C0} = G_8'(g_8)/G_8(g_8)\ .$$

Модуль эллиптического интеграла F_8 вычисляется как

$$g_8 = \frac{1}{\mathrm{sn}\left\{\left(\mathrm{F}_6\left(\frac{\mathrm{sn}\ r_3G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{cn}\ r_3G_0(g_0)/r, g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r, g_0}, g_6\right)\cdot\frac{G_7(g_7)}{U_{C0}}\right), g_7\right\}}.$$

Выражение (3) позволяет записать обратную функцию, связывающую, рабочую область преобразователя с полем плоского конденсатора:

$$z=\frac{r}{G_0(g_0)}\mathrm{F}_0\left(\sqrt{1\Big/\left(1+\left(\frac{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}\mathrm{sn}\left(\frac{\mathrm{F}_7\ \mathrm{sn}\ W_1,g_8\ ,g_7}{G_7(g_7)}U_{C0},g_6\right)\right)^{-2}\right)},g_0\right), \qquad (4)$$

где $$\mathrm{sn}\ W_1,g_8\ =\frac{\mathrm{sn}\ u,g_8\ \mathrm{dn}\ v,g_8'\ +i\cdot\mathrm{cn}\ u,g_8\ \mathrm{dn}\ u,g_8\ \mathrm{sn}\ v,g_8'\ \mathrm{cn}\ v,g_8'}{\mathrm{cn}^2\ v,g_8'\ +g_8^2\mathrm{sn}^2\ u,g_8\ \mathrm{sn}^2\ v,g_8'},\quad g_8'=\sqrt{1-g_8^2}.$$

Для второго прямоугольника отображение на квадрант t_2 приводит к системе экранированного НИК. Преобразование на квадрант t_2 выполняет функция:

$$t_2=\mathrm{sn}\ (W-U_{C0})G_9(g_9)/\ G_6(g_6)-U_{C0}\ ,g_9\ ,$$

в которой модуль эллиптического интеграла $G_9(g_9)$ определяется из соотношения:

$$G_6'(g_6)\big/\ G_6(g_6)-U_{C0}\ =G_9'(g_9)/G_9(g_9)\ .$$

Размеры электродов:

$$R_0=1;$$

$$R_1=\mathrm{sn}\ (\frac{\mathrm{F}_6\left(\frac{\mathrm{sn}\ r_1G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{cn}\ r_1G_0(g_0)/r,g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0},g_6\right)-U_{C0}}{G_1(g_6)-U_{C0}}G_9(g_9),g_9);$$

$$R_2=\mathrm{sn}\ (\frac{\mathrm{F}_6\left(\frac{\mathrm{sn}\ r_2G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{cn}\ r_2G_0(g_0)/r,g_0}\frac{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0},g_6\right)-U_{C0}}{G_1(g_1)-U_{C0}}G_9(g_9),g_9).$$

Обратная функция, связывающая, паразитную область преобразователя с полем плоского конденсатора W_2, позволяет построить картину поля силовых линий напряженности для паразитной области. Она имеет вид:

$$z=\frac{r}{G_0(g_0)}F_0\left(\sqrt{1\Big/\left(1+\left(\frac{\mathrm{sn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}{\mathrm{cn}\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}\cdot\mathrm{sn}\left(\left(\mathrm{F}_2\left(R_2\sqrt{\frac{\alpha_3^2\mathrm{sn}^2(W_2,g_{10})}{1+\alpha_3^2\mathrm{sn}^2(W_2,g_{10})}},g_4\right)\frac{G_6(g_6)-U_{C0}}{G_9(g_9)}+U_{C0}\right),g_6\right)\right)^{-2}\right)},g_0\right),$$

где эллиптический синус

$$\mathrm{sn}\ W_1,g_{10}\ =\frac{\mathrm{sn}\ u,g_{10}\ \mathrm{dn}\ v,g_{10}'\ +i\cdot\mathrm{cn}\ u,g_{10}\ \mathrm{dn}\ u,g_{10}\ \mathrm{sn}\ v,g_{10}'\ \mathrm{cn}\ v,g_{10}'}{\mathrm{cn}^2\ v,g_{10}'\ +g_{10}^2\mathrm{sn}^2\ u,g_{10}\ \mathrm{sn}^2\ v,g_{10}'},$$

$$\alpha_3=\sqrt{1\big/\ R_2^2-1}\ ,\quad g_{10}=\frac{1}{R_1}\sqrt{R_2^2-R_1^2\ \big/\ R_2^2-1}\ ,\quad g_{10}'=\sqrt{1-g_{10}^2}\ .$$

Глубина этой области h, исключаемой из зоны контроля, для однородной среды находится из условия максимума функции z_μ, описывающей ход силовой линии напряженности, отделяющей первую область от второй (4):

$$z=\frac{r}{G_0(g_0)}F_0\left(\sqrt{1\Big/\left(1+\left(\frac{sn\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}{cn\ r_0G_0(g_0)/r,g_0}sn\left(\frac{F_7\ sn\ W_1,g_8\ ,g_7}{G_7(g_7)}U_{C0},g_6\right)\right)^{-2}\right)},g_0\right),$$

где $$sn\ W_1,g_8\ =dn\ v,g_8'\ \big/\ cn^2\ v,g_8'\ +g_8^2sn^2\ v,g_8'\ ,\quad g_8'=\sqrt{1-g_8^2}.$$

Глубина области, исключаемой из зоны контроля, и рабочая емкость преобразователя практически не изменяются при изменении положения охранного электрода относительно потенциального. Это хорошо видно из расчетной картины поля (рис. 4). В случае анизотропной среды, диэлектрические свойства

которой описываются тензором второго ранга, расчеты ЗСНИК проводятся аналогичным образом. С этой целью осуществляют изотропизирующее преобразование координат. Если силовые линии электрического поля ленточных электродов ЗСНИК замыкаются в плоскости анизотропии *ZOX* (электроды ориентированы вдоль оси *OY*), то диэлектрическая проницаемость среды выразится как $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_z}$, а размеры электродов [6]: $r_i' = r_i \sqrt{\varepsilon_z / \varepsilon_x}$.

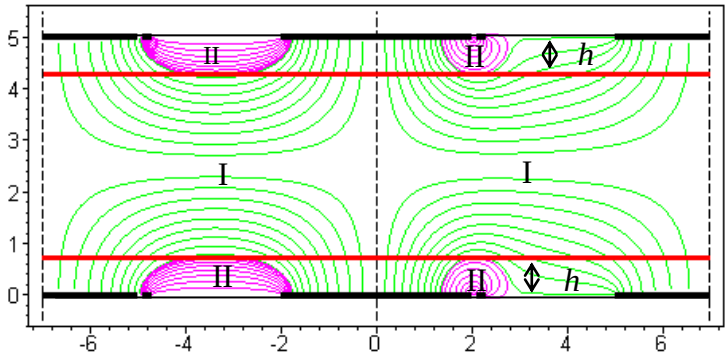

Рис. 4. Расчетная картина поля многосекционного трехзажимного ЗСНИК для различного места расположения охранного электрода

Расчеты показывают, что по мере разнесения потенциальных электродов отношение емкостей заполненного и не заполненного преобразователя стремится к значению константы тензора диэлектрической проницаемости вдоль выбранной оси анизотропии. Так, для материала береза, константы тензора диэлектрической проницаемости которого $\varepsilon_x = 3{,}41$, $\varepsilon_y = 3{,}90$, $\varepsilon_z = 3{,}38$, отношение емкостей для зазора между электродами 3 мм составляет 3,71, а для зазора 6 мм – 3, 84. На этом основана методика неразрушающего определения констант тензора диэлектрической проницаемости для плоских материалов [2].

Заключение. Для физического моделирования электрических полей в ортотропных средах разработана математическая модель ЗСНИК, подключаемых к виртуальным измерителям иммитанса. Она позволяет решать задачи оптимального проектирования преобразователей для неразрушающего контроля анизотропии диэлектрических свойств плоских ортотропных материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКПНИ «Техническая диагностика-36» (№ 20062708).

ЛИТЕРАТУРА

1. Матис, И.Г. Электроемкостные преобразователи для неразрушающего контроля / И.Г. Матис. – Рига: Зинатне, 1982. – 302 с.
2. Способ определения анизотропии свойств тонких полимерных материалов: а.с. 1549327 СССР, МКИ G 01 N 27/22 / А.А. Джежора, В.В. Щербаков, В.Л. Шушкевич, Л.И. Кузнецова; опубл. 30.01.90 // Открытия. Изобрет. – 1990. – № 9. – С. 271.
3. Штраус, В.Д. Методики неразрушающего определения диэлектрической проницаемости анизотропных полимерных материалов / В.Д. Штраус // Механика полимеров. – 1974. – № 4. – С. 715 – 719.
4. Измерительный конденсатор для контроля диэлектрических свойств анизотропных материалов: а.с. 287183 СССР, МКИ G 01 R 27/22 / И.Г. Матис. – № 1327806/18-10; заявл. 05.05.69; опубл. 19.11.70 // Открытия. Изобрет. – 1970. – № 35.
5. Способ определения глубины зоны контроля плоского накладного измерительного конденсатора: пат. № 11238 BY, G 01R 27/26 / А.А. Джежора. – № а 20060325; заявл. 04.10. 2006; опубл. 30.12.2007 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2007. – № 1.
6. Джежора, А.А. Электрические поля накладных измерительных конденсаторов в ортотропных средах / А.А. Джежора, В.В. Рубаник // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-тэхн. навук. – 2005. – № 1. – С. 82 – 86.

Поступила 21.09.2009