пространстве E, один из наиболее применяемых методов состоит в переходе от уравнения (1) к уравнению вида $x = Q(A)x + f$, (2) где $Q(A) = 1 + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$ – операторный полином, а $f \in E$ – некоторый вектор.

При этом требуется подобрать полином Q так, чтобы оператор в правой части уравнения (2) был сжимающим, по возможности с минимальной нормой или хотя бы спектральным радиусом. Итерационный метод $x_{k+1} = Q(A)x_k + f \ (k = 1,2,...)$ (3) называется оптимальным, если итерационные параметры $a_1, a_2, ..., a_n$ (коэффициенты полинома Q) найдены так, чтобы скорость сходимости соответствующих приближений была наиболее быстрой или, другими словами, чтобы спектральный радиус соответствующего линейного оператора был минимальным. Итерационный метод вида $x_{k+1} = x_k + a_1 A x_k - a_1 b \quad (k = 1,2,...)$ (4) называется итерационным процессом первого порядка. Соответственно итерационный метод вида (3) называется (чебышевским) итерационным методом n – го порядка. Применение итерационных процессов высоких порядков позволяет, как правило, существенно уменьшить константу сжатия и, тем самым, увеличить скорость сходимости процесса. Один из способов обеспечить оптимальность процесса (3) состоит в построении на множестве D комплексной плоскости полинома $Q_*(z)$ с минимальной чебышевской нормой (отсюда и термин – чебышевский итерационный процесс). В докладе предлагается метод приближенного нахождения экстремальных полиномов, основанный на минимизации L_p – нормы в пространстве полиномов, определенных на множестве D.

УДК 512. 542.

Студ. Денисов Д.В.,
ст. преп. Коваленко А.В.

СПЛЕТЕНИЕ ГРУПП, КАК РАСШИРЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ АВТОМОРФИЗМА

Пусть даны две группы A и B, которые имеют порядок $|A| = n$, $|B| = m$. Задача состоит в построении сплетения этих групп, как расширения посредством автоморфизма. Рассмотрим прямое произведение группы B на себя n раз: $B^n = \underbrace{B \otimes B \otimes ... \otimes B}_{n \text{ раз}}$. Проиндексируем элементы прямого произведения элементами группы A, то есть $f = (b_1, b_2, ... b_n)$ имеет n компонент b_i. Каждой компоненте дадим имя, которое выберем из элементов группы A. Если $f \in B \otimes B \otimes ... \otimes B$, то $f(a)$ – компонента элемента f с именем $a \in A$.

Определим действие элемента $a \in A$ на группу B^n: $f^a(x) = f(ax)$ или $f \to f^a$. Очевидно, что $aA = A$, а следовательно, группа A – группа операторов группы B^n. Рассмотрим элементы $f_1, f_2, f \in B^n$, такие, что $f = f_1 f_2$. Тогда $f^a(x) = f(ax) = f_1(ax) f_2(ax) = f_1^a(x) f_2^a(x)$ или $(f_1 f_2)^a = f_1^a f_2^a$, а это означает, что отображение $\varphi : f \to f^a$ является гомоморфизмом группы. Кроме этого, $\varphi : f^{a^{-1}} \to f^{a^{-1}a} = f$ и отображение φ является эпиморфизмом и автоморфизмом, при этом выполняется равенство $f^{a_1 a_2} = (f^{a_1})^{a_2}$. Таким образом, группа A – группа операторов, то есть каждый оператор является автоморфизмом B^n.

Рассмотрим полупрямое произведение $G = B^n \leftthreetimes A = B \wr A$, которое является сплетением группы B с группой A. Группы B и группа A действуют неодинаково в сплетении. A – активная группа, а B – пассивная группа. Если $a \neq e$ элемент группы A, то он нетождественно действует на прямое произведение B^n. Рассмотрим элемент прямого произведения

$f=\begin{cases} f(a)=g, \text{ если } g\neq e, \\ f(x)=e, \text{ если } x\neq a.\end{cases}$ Тогда $f^a\neq f$, так как $f^a(x)=\begin{cases} f^a(a)=f(aa)=e, \text{при } x=a, \\ f(ax)=e, \text{при } x\neq a.\end{cases}$ Полупрямое произведение B^n является базой сплетения $B\wr A$. Связь сплетений с различными расширениями основывается на утверждении: любое расширение группы A посредством группы B изоморфно вкладывается в декартово сплетение групп.

УДК 517

Студ. Козаченко Т.А.,
ст. преп. Силивончик В.В.

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПОЛИНОМА

Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{z}+c_1+c_2z$, где z – комплексная переменная, c_1,c_2 – комплексные константы. Норма функции $f(z)$ на множестве M определяется равенством $\|f(z)\|=\max\limits_{z\in M}\left|\frac{1}{z}+c_1+c_2z\right|$.

Пусть M состоит из трех точек z_1,z_2,z_3. Задача состоит в нахождении c_1,c_2, при которых $\|f(z)\|$ минимальна. Известно достаточное условие, обеспечивающее минимизацию нормы. Оно состоит в разрешимости системы

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1\right)+\lambda_2\left(\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2\right)+\lambda_3\left(\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3\right)=0 \\ \lambda_1\left(\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1\right)\overline{z}_1+\lambda_2\left(\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2\right)\overline{z}_2+\lambda_3\left(\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3\right)\overline{z}_3=0 \\ \left|\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1\right|=\left|\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2\right|=\left|\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3\right| \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1;\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R\geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим частный случай, когда $z_1=a,\ z_2=a-b_i,\ z_3=a+b_i,\quad a,b>0$. Решая систему (1) получаем $c_1=\frac{4a^2+b^2}{2a\left(a^2+b^2\right)},\quad c_2=\frac{1}{a^2+b^2},\quad \lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{4}$. При этом $\min\|f\|=\frac{b^2}{2a\left(a^2+b^2\right)}$. Теперь рассмотрим задачу минимизации нормы на отрезке $[z_2;z_3]$.

Можно показать, что этот отрезок лежит внутри области, ограниченной линией уровня $|f(z)|=\frac{b^2}{2a\left(a^2+b^2\right)}$. Поэтому $\min\|f\|$ на отрезке совпадает с $\min\|f\|$ на множестве $\{z_1;z_2;z_3\}$.

Литература

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.