

$$\frac{dz}{dt} = F_1(z - \varphi(x_0, y_0)) F_2(t)$$

имеет периодическое решение, то система (7) имеет соответствующее периодическое решение.

Теорема доказана.

УДК 678:621.383

В.А.Жизневский, А.А.Джегора, И.Е.Андрушкевич, канд. физ.-мат. наук

РАСЧЕТ ЕМКОСТИ ТРЕХЗАЖИМНОГО КОНДЕНСАТОРА С ЭКРАНОМ

Для неразрушающего контроля анизотропии диэлектрических свойств тонких полимерных пленок используют конденсатор, который состоит из расположенных в одной плоскости потенциальных ленточных электродов, параллельного этой плоскости экрана. Однако такая конструкция подвержена влиянию воздушного зазора между электродами и исследуемым изделием, что приводит к неоднозначности результатов и значительным погрешностям.

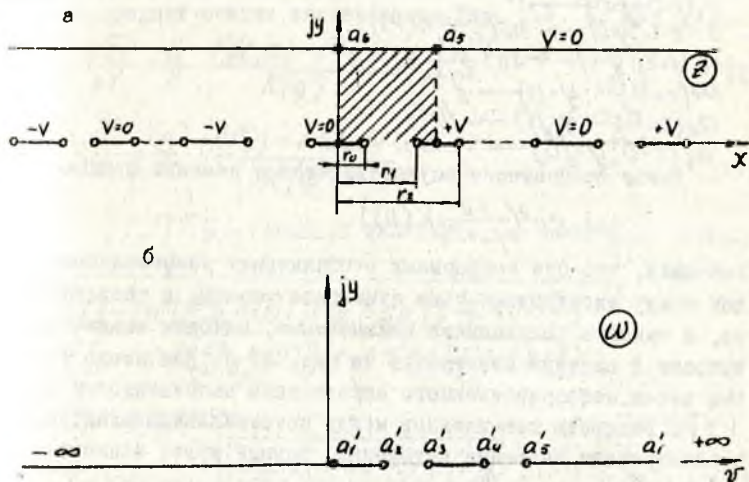


Рис.1. К расчету электростатической емкости трехзажимного конденсатора с экраном:

а - и полная плоскость Z;

б - полуплоскость omega

Чтобы исправить этот недостаток, вводится дополнительный охраняющий электрод с потенциалом $\varphi = 0$. Для определения оптимальных размеров конденсатора необходимо вычислить рабочее и паразитные емкости и, получив их аналитические выражения, решить задачу оптимизации.

При достаточно большом количестве анакоперенных заряженных электродов и периодическом характере их следования распределение зарядов на одноименных электродах можно считать одинаковым. Общая емкость такого многосекционного конденсатора равна сумме произведения емкости одной секции и числа средних секций и емкостей двух крайних секций (рис. 1, а).

Для определения частичных емкостей средней секции воспользуемся методом конформных отображений [2].

Примем заштрихованную область за часть плоскости комплексной переменной Z и конформно отобразим на верхнюю полуплоскость новой комплексной переменной w (рис. 1, б) так, чтобы соблюдались следующие соответствия:

$$\begin{aligned} a_1(x=0; y=0) &\rightarrow 0; \\ a_2(x=z_0; y=0) &\rightarrow j\pi^2\left(\frac{2z_0}{z_1+z_2} K(P)\right); \\ a_3(x=z_1; y=0) &\rightarrow j\pi^2\left(\frac{2z_1}{z_1+z_2} K(P)\right); \\ a_4(x=\frac{z_1+z_2}{2}; y=0) &\rightarrow 1; \\ a_5(x=\frac{z_1+z_2}{2}; y=j\delta) &\rightarrow 1/p^2; \\ a_6(x=0; y=j\delta) &\rightarrow +\infty \text{ и } -\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Такое отображение осуществляется с помощью функции

$$w = \operatorname{sn}^2\left(\frac{2z}{z_1+z_2} K(P)\right). \quad (2)$$

Учитывая, что при конформных отображениях разности потенциалов между электродами и их суммарные заряды, а следовательно, и емкости сохраняются неизменными, находим частичные емкости в системе электродов на рис. 1, б. Для этого применим метод непосредственного определения напряженности поля [3]. Разность потенциалов между потенциальным электродом и электродами, имеющими потенциал, равный нулю, записывается:

$$\Delta V = \int_{a_4}^{a_5} |E|_{\varphi=0} d\sigma = \int_{a_4}^{a_5} \frac{B d\sigma}{(a_5'-\sigma)(\sigma-a_4)(\sigma-a_3)(\sigma-a_2)}, \quad (3)$$

где B — константа, вычисляемая по заданной разности потенциалов ΔV или по заданным зарядам $\tilde{\tau}$.

Под рабочей емкостью конденсатора будем понимать емкость, обусловленную потоком вектора напряженности электрического поля между потенциальными электродами, а под паразитной — емкостью, обусловленную потоком вектора напряженности между потенциальным электродом и электродами с нулевым потенциалом (охраненный электрод и экран). Тогда заряд на единицу длины для рабочей емкости имеет вид

$$\tilde{\tau}_p = \varepsilon \int_{-\infty}^{a'_1} |E|_{x=0} dv = \varepsilon \int_{-\infty}^{a'_1} \frac{B dv}{(a'_2 - v)(a'_3 - v)(a'_4 - v)(a'_5 - v)} = \varepsilon \int_{a'_1}^{a'_2} \frac{B dv}{(a'_2 - v)(a'_3 - v)(a'_4 - v)(a'_5 - v)} \quad (4)$$

а заряд на единицу длины для паразитной емкости —

$$\tilde{\tau}_n = \varepsilon \int_{a'_5}^{\infty} |E| dv + \varepsilon \int_{-\infty}^{a'_1} |E| dv = \int_{a'_5}^{\infty} \frac{\varepsilon B dv}{v(v - a'_2)(v - a'_3)(v - a'_4)(v - a'_5)} + \int_{a'_1}^{a'_2} \frac{\varepsilon B dv}{(a'_2 - v)(a'_3 - v)(a'_4 - v)(a'_5 - v)} \quad (5)$$

Вычислив заданные в формулах (3), (4), (5) интегралы, согласно [4] получим выражения для рабочей и паразитной емкостей средней секции конденсатора (см. рис. 1, а):

$$C_p = \frac{\tilde{\tau}_p}{\Delta V} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{F(\mathcal{L}, q) - F(\mathcal{V}, q)}{K(q)}; \quad (6)$$

$$C_n = \frac{\tilde{\tau}_n}{\Delta V} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{K(q) - F(\mathcal{L}, q)}{K(q)}, \quad (7)$$

где $F(\mathcal{L}, q)$, $F(\mathcal{V}, q)$ — неполные эллиптические интегралы первого рода модуля q :

$$q = \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)]) (\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)])}{(\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)]) (1 - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)])}}; \quad (8)$$

$\mathcal{L}, \mathcal{V}$ — аргументы:

$$\mathcal{L} = a \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2(\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p))}{\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2(\frac{2\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p))}}; \quad (9)$$

$$\mathcal{V} = a \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)]) \operatorname{sn}^2(\frac{2\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p))}{(\frac{1}{p^2} - \operatorname{sn}^2[\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p)]) \operatorname{sn}^2(\frac{2\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} K(p))}}; \quad (10)$$

$K(q)$ - полный эллиптический интеграл модуля q' :
 $q' = \sqrt{1 - q^2}$.

Из рис. 2 видно, что с уменьшением толщины исследуемого материала или с раздвижением потенциальных электродов рабочая емкость быстро уменьшается, причем ширина электродов практически на нее не влияет. Следовательно, рабочая емкость определяется отношением $\frac{b}{2\epsilon_1}$.

Из рис. 3 видно, что паразитная емкость резко возрастает при увеличении ширины электродов, а при уменьшении толщины исследуемого материала возрастает незначительно. Охраняющий электрод влияет на величину паразитной емкости только при больших $\frac{b}{2\epsilon_1}$. Таким образом, проведенные расчеты позволяют качественно оценить зависимость рабочей и паразитной емкостей от геометрических размеров конденсатора.

Для более полного анализа конструкции рассмотрим случай, когда толщина исследуемого материала мала ($b \rightarrow 0$), и охраняющий электрод отсутствует ($\epsilon_2 = 0$). Разложив функцию (6) в ряды [4], получим аналитическое выражение для рабочей емкости

$$C_p = \frac{2\epsilon}{\pi l - \frac{\pi b}{2}}. \quad (11)$$

Это выражение совпадает с аналитическим выражением для рабочей емкости конденсатора, предложенным в работе [5]. В (11) рабочая емкость определяется только отношением $\frac{\epsilon}{b}$ и не зависит от ширины электродов. Она хорошо согласуется с расчетными значениями C_p , представленными на графиках (рис. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Целищев В.Д., Букарев А.Д. Измерительный конденсатор преимущественно для определения анизотропии диэлектрических свойств пленок: А.С. 667914 СССР 01 № 27/22 // Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки. 1979. № 22.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

3. Сочнев А.В. Применение метода непосредственного оп-

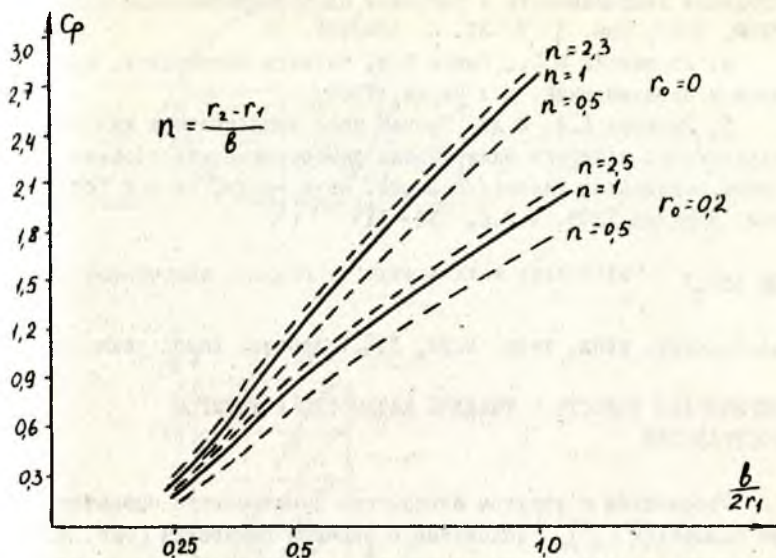


Рис. 2. Зависимости рабочей емкости C_p от различных соотношений электродов

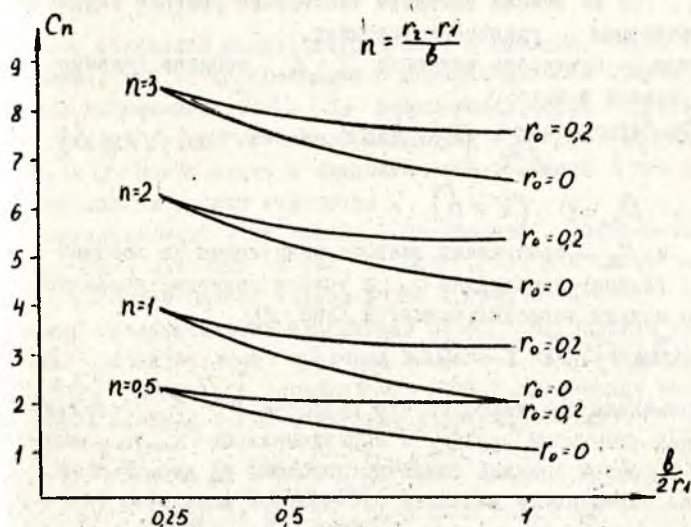


Рис. 3. Зависимости паразитной емкости C_n от различных соотношений электродов

ределения напряженности к расчетам плоскопараллельных полей //ИТФ, 1967. Вып. 3. Т. 37. С. 454-466.

4. Градштейн М.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1962.

5. Джемора А.А. и др. Расчет поля конденсатора для неразрушающего контроля анизотропии диэлектрических свойств тонких полимерных пленок //Всесоюз. науч.-техн. кон. : Тез. докл. Могилев, 1989. Ч.2.С. 116-117.

УДК 659.3

А.А.Калинин, канд. техн. наук, Г.Н.Федосеев, канд. техн. наук

СФЕРИЧЕСКАЯ ПОЛОСТЬ С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в упругом изотропном пространстве сферическую полость ($R=1$), заполненную тяжелой жидкостью (рис. 1). Определим влияние высоты уровня h жидкости на напряженное состояние пространства. Для решения задачи воспользуемся интегральными уравнениями метода потенциала, приведенными в работе [1]. Там же описан алгоритм численного решения задачи при осесимметричных граничных условиях.

Приняв плотность жидкости $\gamma=1$, запишем граничные условия задачи в виде

$$\rho_{\rho_0}=(z-h)\sin\alpha, \rho_{z_0}=-(z-h)\cos\alpha, z=1-\cos\alpha, (z\leq h);$$

$$\rho_{\rho_0}=0, \rho_{z_0}=0 \quad (z>h),$$

где ρ_{ρ_0} и ρ_{z_0} — компоненты вектора напряжения на границе области. Главное напряжение σ_z в точках границы, очевидно, равно по модулю давлению жидкости (рис. 2):

$$\sigma_z=-(h-1+\cos\alpha).$$

Задача решилась при коэффициенте Пуассона $\nu=0,3$. Результаты решения (окружные $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_2$ и меридиональные $\sigma_{mm}=\sigma_1$ напряжения в точках границы области) показаны на рис. 3 и 4. На уровне поверхности жидкости наблюдаются максимумы напряжений, несколько ниже — минимумы. Повышение уровня жидкости