

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ СОПРЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. МИХАСЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск);
канд. физ.-мат. наук Т.В. НИКОНОВА
(Витебский государственный технологический университет)

Разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния составной тонкостенной конструкции, залегающей в грунте на глубине, соизмеримой с пролетом поперечного сечения конструкции. Несущая часть конструкции, контактирующая с грунтом, а также ее подкрепляющая часть состоят из элементов сопряженных цилиндрических панелей. В качестве модели грунта рассматривается упругое основание Винклера, при этом считаем, что давление, оказываемое грунтом, носит гидростатический характер. Для подкрепляющих элементов конструкции рассмотрены условия жесткого соединения. Исследованы и выполнены расчеты значений перемещений, усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности элементов конструкции при наличии подкрепляющих элементов и без них.

Введение. В современном строительстве в качестве составных и несущих частей различных конструкций находят широкое применение тонкостенные цилиндрические оболочки. Способность этих оболочек выдерживать значительные нагрузки при минимальной толщине позволяет создавать из них в гражданском, транспортном и промышленном строительстве легкие конструкции с хорошими жесткостными и прочностными характеристиками. Разработанная методика расчета составных тонкостенных конструкций может быть использована при проектировании широкопролетных подземных транспортных развязок, а также в гражданском строительстве при проектировании составных тонкостенных перекрытий. Расчет напряженно-деформируемого состояния (НДС) тонкостенной составной конструкции авторами статьи выполнен аналитически, используя уравнения теории тонких упругих оболочек. Ранее предлагаемым методом уже выполнены расчеты НДС длинной цилиндрической оболочки и оболочки конечной длины, тонкостенной панели, залегающей в грунте (для постоянного и переменного коэффициента постели грунта) [1, 2], а также другой составной конструкции [3]. Описанная в статье методика позволяет вычислить значения перемещений, усилий и моментов в любой точке конструкции, определить ее наиболее «уязвимые» места без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенной методики для расчета составных тонкостенных конструкций с целью уменьшения их веса и более детального исследования на несущую способность и прочность. На основе полученных в явном виде формул для усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности конструкции, прикладной программой, разработанной авторами в математическом пакете MAPLE, выполнены расчеты для случая жесткого соединения подкрепляющих элементов составной конструкции, а также для случая, когда эти элементы отсутствуют.

Напряженно-деформируемое состояние тонкостенной подкрепленной конструкции. Рассмотрим составную тонкостенную конструкцию, лежащую в грунте на глубине H_2 и состоящую из элементов

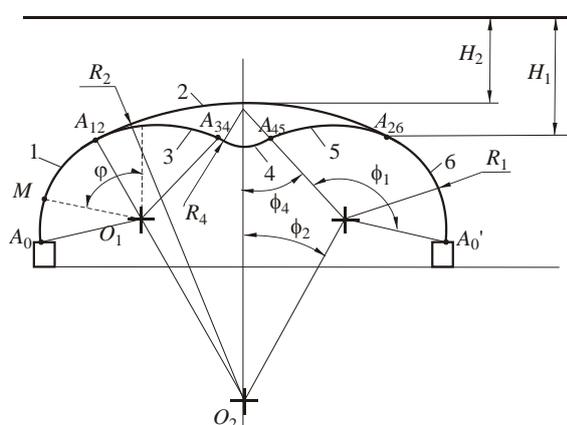


Рис. 1. Поперечное сечение конструкции

Пусть H_1 – глубина залегания элемента 1 (см. рис. 1), тогда

$$H_1 = H_2 + R_2(1 - \cos \phi_2),$$

цилиндрических панелей. На рисунке 1 изображено поперечное сечение данной конструкции, где 1, 2, 6 – несущие, а 3...5 – подкрепляющие элементы конструкции; A_{12} , A_{34} , A_{45} , A_{26} – точки жесткого сопряжения, соответствующих элементов. Подкрепляющие панели 3...5 вводятся для усиления конструкции и уменьшения прогиба ее верхней части, а также для снижения значений действующих усилий. Задача решается в линейной постановке, при которой перемещения элементов конструкции представляются небольшими.

Практическим аналогом этой конструкции является широкопролетное перекрытие, используемое в транспортном строительстве. Основание Винклера [4, 5] примем в качестве модели внешнего упругого заполнителя (грунта), считая, что оказываемое им давление носит гидростатический характер. Коэффициент постели упругого основания считаем постоянным.

где R_2 – радиус 2-й панели.

Будем считать, что каждый элемент конструкции характеризуется своими толщиной h_k , модулем Юнга E_k , коэффициентом Пуассона ν_k и плотностью $\gamma_0^{(k)}$. Положение точки M на каждом из элементов будем определять углом φ , отсчитываемым в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, при этом $\varphi_{k,1} \leq \varphi \leq \varphi_{k,2}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} = -\varphi_{2,1} = \varphi_{2,2} = \varphi_{3,2} = -\varphi_{5,1} = -\varphi_{6,2} = \varphi_2, \quad \varphi_{1,2} = -\varphi_{6,1} = \varphi_1 - \varphi_4, \\ \varphi_{3,1} = -\varphi_{5,2} = -\varphi_4, \quad \varphi_{4,1} = -\pi - \varphi_4, \quad \varphi_{4,2} = -\pi + \varphi_4. \end{aligned}$$

Длину конструкции в осевом направлении (перпендикулярном плоскости рисунка) считаем достаточно большой, так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем. Тогда все функции, характеризующие НДС конструкции, можно считать независимыми от координаты x , и задача становится плоской [6]. Для описания равновесия k -го элемента могут быть использованы уравнения равновесия криволинейных балок [7]:

$$\frac{\partial Q_k^*}{\partial s_k} - \frac{T_k^*}{R_k} + q_n^{(k)} - \alpha_k w_k^* = 0, \quad \frac{\partial T_k^*}{\partial s_k} + \frac{Q_k^*}{R_k} + q_2^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial M_k^*}{\partial s_k} - Q_k^* = 0, \quad (1)$$

где R_k – радиус k -й панели, $s_k = R_k \varphi$ – окружная координата, ($k = \overline{1, 6}$); T_k^*, Q_k^*, M_k^* – кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно возникающие в срединной поверхности k -го элемента; $q_n^{(k)}, q_2^{(k)}$ – нормальная и касательная давления, приходящегося на k -й элемент конструкции; w_k^* – нормальный прогиб k -го элемента; $\alpha_k = \begin{cases} \alpha_{zp}, & k = 1, 2, 6, \\ 0, & k = 3 - 5, \end{cases}$ α_{zp} – коэффициент постели винклеровского основания.

Здесь

$$\begin{aligned} q_n^{(k)} = q_{n,zp}^{(k)} + q_{n,s}^{(k)}, \quad q_{n,zp}^{(k)} = -\gamma_k [H_k + R_k(1 - \cos \varphi)], \quad q_{n,s}^{(k)} = -\gamma_0^{(k)} h_k \cos \varphi, \\ q_2^{(k)} = q_{2,s}^{(k)} = \gamma_0^{(k)} h_k \sin \varphi, \quad \gamma_k = \begin{cases} \gamma_{zp}, & k = 1, 2, 6, \\ 0, & k = 3 - 5, \end{cases} \end{aligned}$$

где $q_{n,zp}^{(k)}, q_{n,s}^{(k)}$ – нормальные составляющие нагрузки, вызванные давлением грунта и весом оболочки соответственно; $q_{2,s}^{(k)}$ – касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки; H_k – глубина залегания верхней точки k -го элемента конструкции; γ_{zp} – удельный вес грунта.

Уравнения равновесия (1) дополним уравнениями физического состояния [7], связывающими T_k^*, Q_k^*, M_k^* и угол поворота θ_k с нормальным прогибом w_k^* и касательным перемещением v_k^* :

$$\begin{aligned} T_k^* = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial s_k} + \frac{w_k^*}{R_k} \right), \quad M_k^* = \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} \left(-\frac{\partial^2 w_k^*}{\partial s_k^2} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial v_k^*}{\partial s_k} \right), \\ Q_k^* = \frac{\partial M_k^*}{\partial s_k} = \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} \left(-\frac{\partial^3 w_k^*}{\partial s_k^3} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial^2 v_k^*}{\partial s_k^2} \right), \quad \theta_k = \frac{1}{R_k} \left(v_k^* - R_k \frac{\partial w_k^*}{\partial s_k} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя следующие соотношения:

$$T_k^* = Eh T_k, \quad Q_k^* = Eh Q_k, \quad M_k^* = Eh R M_k, \quad w_k^* = w_k R, \quad v_k^* = \nu_k R, \quad (3)$$

где R – характерный размер конструкции; E – характерная величина модуля Юнга; h – характерная толщина панелей.

В основании конструкции (точка A_0 на рисунке 1) рассмотрим условия жесткого закрепления

$$w_1(\varphi_{1,2}) = \nu_1(\varphi_{1,2}) = 0, \quad w_1'(\varphi_{1,2}) = 0, \quad (4)$$

где w_1, ν_1 – нормальное и тангенциальное перемещения точек элемента I (штрих здесь и ниже означает дифференцирование по координате φ).

Рассмотрим условия сопряжения двух элементов [8] в точке A_{34} . Пусть γ_{34} – угол между единичными векторами – нормальными $\bar{e}_3^{(n)}, \bar{e}_4^{(n)}$ к кривым 3 и 4, соответствующим 3-му и 4-му элементам. В слу-

чае жесткого соединения, условия сопряжения заключаются в равенстве векторов перемещения, сил, моментов и углов поворота каждого элемента в точке их сопряжения.

Проектируя векторы перемещений и сил, например, на оси $\bar{\mathbf{e}}_4^{(n)}$, $\bar{\mathbf{e}}_4^{(1)}$, где $\bar{\mathbf{e}}_4^{(1)}$ – единичный вектор, касательный к 4-й кривой, получим следующие условия сопряжения 3-го и 4-го элементов в случае жесткого сопряжения:

$$\begin{aligned} v_4(\varphi_{4,2}) = -v_3(\varphi_{3,1}), \quad w_4(\varphi_{4,2}) = -w_3(\varphi_{3,1}), \quad T_4(\varphi_{4,2}) = -T_3(\varphi_{3,1}), \quad Q_4(\varphi_{4,2}) = -Q_3(\varphi_{3,1}), \\ M_3(\varphi_{3,1}) = M_4(\varphi_{4,2}), \quad \theta_3(\varphi_{3,1}) = \theta_4(\varphi_{4,2}). \end{aligned} \quad (5)$$

В точке A_{12} при рассмотрении сопряжения 1-го и 2-го элементов конструкции имеем:

$$v_2(\varphi_{2,2}) = v_1(\varphi_{1,1}), \quad w_2(\varphi_{2,2}) = w_1(\varphi_{1,1}), \quad \theta_1(\varphi_{1,1}) = \theta_2(\varphi_{2,2}). \quad (6)$$

В этой же точке геометрические условия сопряжения 1-го и 3-го элементов равносильны следующим равенствам:

$$v_1(\varphi_{1,1}) = v_3(\varphi_{3,2}), \quad w_1(\varphi_{1,1}) = w_3(\varphi_{3,2}), \quad \theta_1(\varphi_{1,1}) = \theta_3(\varphi_{3,2}). \quad (7)$$

Условия равновесия узла A_{12} приводят к соотношениям относительно действующих усилий и моментов:

$$\begin{aligned} T_1(\varphi_{1,1}) - T_2(\varphi_{2,2}) - T_3(\varphi_{3,2}) = 0, \quad Q_1(\varphi_{1,1}) - Q_2(\varphi_{2,2}) - Q_3(\varphi_{3,2}) = 0, \\ M_1(\varphi_{1,1}) - M_2(\varphi_{2,2}) - M_3(\varphi_{3,2}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая симметрию конструкции, аналогичный вид имеют условия сопряжения для 4, 5, 6-го элементов конструкции. Подставив выражения (2), (3) в (1) и интегрируя один раз, получим разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_k :

$$w_k^{IV} + 2w_k^{II} + a_k w_k = b_k + d_k \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\text{где } \varepsilon_k = \frac{h_k^2}{12R_k^2}, \quad \delta_k = \frac{1 + \varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad a_k = 1 + \frac{\delta_k \alpha_k R_k^2 (1 - \nu_k^2)}{E_k h_k}, \quad b_k = -\delta_k \left(\frac{\gamma_k R_k^2 (H_k + R_k) (1 - \nu_k^2)}{E_k h_k R} + c_k^{(5)} \right),$$

$d_k = \frac{\delta_k (1 - \nu_k^2) R_k^2 (\gamma_k R_k - 2\gamma_0^{(k)} h_k)}{E_k h_k R}$, $c_k^{(5)}$ – неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий и условий сопряжения.

Рассмотрим разрешающее уравнение (9) для элементов 1, 2, 6 и 3...5, граничащих и не контактирующих с грунтом соответственно.

Для элементов 1, 2, 6 уравнение (9) имеет следующее общее решение:

$$w_k = c_k^{(1)} e^{\alpha_k \varphi} \cos(\beta_k \varphi) + c_k^{(2)} e^{\alpha_k \varphi} \sin(\beta_k \varphi) + c_k^{(3)} e^{-\alpha_k \varphi} \cos(\beta_k \varphi) + c_k^{(4)} e^{-\alpha_k \varphi} \sin(\beta_k \varphi) + \frac{b_k}{a_k} + \frac{d_k}{a_k - 1} \cos \varphi, \quad (10)$$

$$\text{где } \alpha_k = \sqrt{\frac{\sqrt{a_k} - 1}{2}}, \quad \beta_k = \sqrt{\frac{\sqrt{a_k} + 1}{2}}, \quad k = 1, 2, 6.$$

Тогда тангенциальные перемещения

$$v_k = \frac{1}{\varepsilon_k \delta_k} \left(\varepsilon_k w_k' - \int w_k(\varphi) d\varphi + \frac{\gamma_0^{(k)} (1 - \nu_k^2) R_k^2}{E_k R} \sin \varphi \right) + c_k^{(5)} \varphi + c_k^{(6)}. \quad (11)$$

При $k = 3...5$ общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$w_k = c_k^{(1)} \cos \varphi + c_k^{(2)} \sin \varphi + \varphi \left(c_k^{(3)} \cos \varphi + c_k^{(4)} \sin \varphi \right) - \frac{\delta_k}{a_k} c_k^{(5)} - \frac{d_k}{8} \varphi^2 \cos \varphi, \quad (12)$$

а перемещение v_k находится по формуле (11).

В обоих случаях, для элементов, граничащих и не граничащих с грунтом, усилия T_k^* , Q_k^* и момент M_k^* находятся согласно (2).

Построенные решения (10)...(12) содержат неопределенные постоянные $c_k^{(j)}$, которые могут быть найдены из граничных условий (4), условий сопряжения элементов (5)...(8) и аналогичных им. Рассмотрение этих условий приводит к системе из 36 неоднородных линейных алгебраических уравнений отно-

сительно 36 неизвестных постоянных $c_k^{(j)}$, $k = \overline{1, 6}$, $j = \overline{1, 6}$. Для сравнения рассмотрен также случай, когда отсутствуют подкрепляющие 3...5 элементы конструкции [9]. В этом случае необходимо рассмотреть только условия сопряжения 1-го и 2-го, 2-го и 6-го элементов в точках A_{12} и A_{26} соответственно и граничные условия в точках A_0 , A'_0 .

Прикладная программа, разработанная в математическом пакете MAPLE, была использована для решения полученной системы уравнений и определения перемещений, усилий и моментов в элементах конструкции как функций аргумента φ . Рассмотрена конструкция, все элементы которой изготовлены из стальных панелей с модулем Юнга $E_k = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, коэффициентом Пуассона $\nu_k = 0,25$ и удельным весом $\gamma_0^{(k)} = 7,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ при $k = \overline{1, 6}$. Расчеты выполнены для следующих геометрических параметров панелей: $h_k = 0,02 \text{ м}$; $R_1 = R_3 = 4,49 \text{ м}$; $R_2 = 11,32 \text{ м}$; $R_4 = 1,28 \text{ м}$; $\phi_1 = 142,62^\circ$; $\phi_2 = 25,9^\circ$; $\phi_4 = 31,17^\circ$. Конструкция залегает в грунте с удельным весом $\gamma_{zp} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, коэффициентом постели $\alpha_{zp} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ на глубине $H_2 = 4 \text{ м}$.

На рисунках 2...4 приведены графики нормальных перемещений, тангенциальных и перерезывающих усилий, возникающих в срединной поверхности соответствующих несущих элементов конструкции. Сплошная линия соответствует жесткому соединению элементов 3...5, а штрихпунктирная – случаю, когда подкрепляющие элементы отсутствуют.

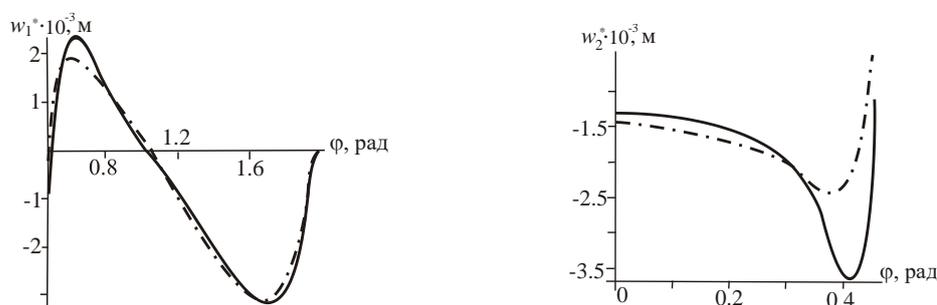


Рис. 2. Нормальные перемещения, возникающие в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

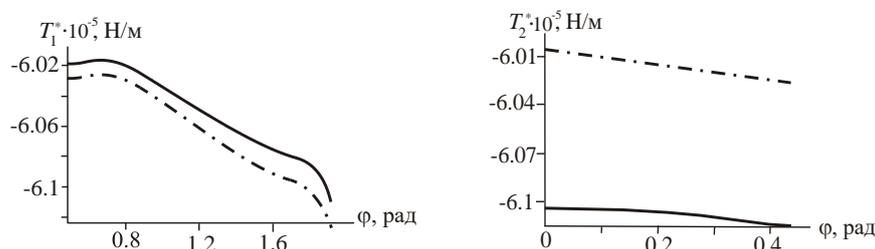


Рис. 3. Тангенциальные усилия, возникающие в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

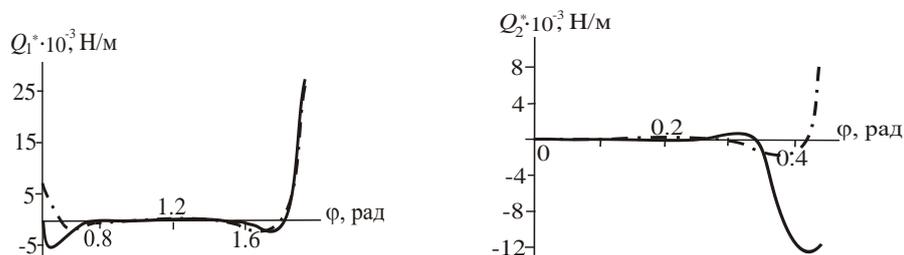


Рис. 4. Перерезывающие усилия, возникающие в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

Анализ результатов. Полученные значения нормальных перемещений указывают на то, что под действием собственного веса и давления, оказываемого грунтом, конструкция опускается вниз, при этом расширяясь в стороны. Из расчетов следует, что тангенциальное, перерезывающее усилия и моменты, возникающие в элементах конструкции, возрастают с увеличением глубины залегания. Наиболее опасными являются точки сопряжения элементов конструкции A_{12} , A_{34} , A_{26} , в которых перерезывающие силы и моменты достигают наибольшего значения. Из анализа графиков следует, что наличие подкрепля-

ющих элементов 3...5 приводит к следующим изменениям усилий в соответствующих элементах конструкции по сравнению со случаем, когда подкрепляющие элементы отсутствуют:

- 1) в точке A_{12} усилие T_1 уменьшается на 0,13 %, а усилие T_2 увеличивается на 1,48 %;
- 2) перерезывающее усилие Q_1 в точке A_{12} значительно уменьшается, а Q_2 – увеличивается в 1,36 раза;
- 3) в верхней части конструкции тангенциальное усилие T_2 увеличивается на 1,58 %, а перерезывающее усилие Q_2 практически не изменяется;
- 4) в основании конструкции (точка A_0) происходит уменьшение тангенциального усилия T_1 на 0,3 %, при этом перерезывающее усилие Q_1 увеличивается на 0,65 %;
- 5) в верхней части конструкции w_2 снижается на 4 %, но при этом происходит значительное увеличение нормальных прогибов w_1, w_2 в точке сопряжения A_{12} .

Таким образом, наличие подкрепляющих элементов приводит к снижению усилия T_1 во всем первом элементе конструкции, но при этом происходит увеличение усилия T_2 во втором ее элементе. В точке сопряжения конструкции A_{12} значительно снижается усилие Q_1 , увеличивая при этом перерезывающее усилие Q_2 в этой же точке. В верхней части конструкции нормальный прогиб w_2 снижается, но это приводит к значительному увеличению нормального прогиба в точке сопряжения элементов.

Заключение. Предложенные приближенные расчетные формулы для перемещений, мембранных и перерезывающих усилий и моментов позволяют рассчитать НДС составных тонкостенных конструкций, залегающих в грунте. Разработанная авторами прикладная программа позволяет исследовать зависимость возникающих усилий и моментов в элементах конструкции от глубины ее залегания, характеристик грунта, оптимизировать линейные размеры элементов конструкции с заданными свойствами. Преимуществом данного метода является возможность определения деформаций и действующих усилий и моментов в любой точке конструкции, определение ее наиболее «уязвимых» мест без проведения экспериментальных испытаний. Разработанная методика расчета составных тонкостенных конструкций может быть использована при проектировании широкопролетных подземных транспортных развязок, а также в гражданском строительстве при проектировании составных тонкостенных покрытий промышленных зданий и сооружений спортивного назначения. Полученные результаты позволяют без проведения дорогостоящих лабораторных, натурных экспериментов и связанных с ними энергетических и материальных затрат рассчитать напряженно-деформированное состояние для реальных конструкций, используемых в гражданском, промышленном и транспортном строительстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никонова, Т.В. Напряженно-деформируемое состояние тонкостенной цилиндрической панели, залегающей в грунте с переменным коэффициентом постели / Т.В. Никонова // Сб. науч.-метод. ст. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2005. – Вып. 18: Теоретическая и прикладная механика. – С. 140 – 144.
2. Никонова, Т.В. Влияние внешнего упругого заполнителя на расчет деформаций и напряжений в цилиндрической оболочке / Т.В. Никонова // Вестн. Витебск. гос. техн. ун-та. – 2005. – Вып. 7. – С. 60 – 64.
3. Михасев, Г.И. Расчет усилий в подкрепленной тонкостенной конструкции, лежащей на упругом основании / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 94 – 99.
4. Крашук, А.А. К расчету пологой цилиндрической оболочки, лежащей на упругом основании // Тр. Сиб. НИИ метрол. – 1971. – Вып. 13. – С. 36 – 44.
5. Макеев, Е.М. К расчету цилиндрической оболочки, лежащей на упругом основании / Е.М. Макеев // Прочность и надежность конструкций. – Киев, 1978. – С. 87 – 93.
6. Клейн, Г.К. Строительная механика сыпучих тел / Г.К. Клейн. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
7. Прочность. Устойчивость. Колебания: справ.: в 3 т. / редкол.: С.А. Амбарцумян [и др.]; под общ. ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – С. 287 – 416.
8. Филиппов, С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек / С.Б. Филиппов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. – 196 с.
9. Никонова, Т.В. Расчет усилий в тонкостенной составной конструкции, залегающей в грунте / Т.В. Никонова // I Машеровские чтения: материалы регион. науч. конф. студ., магистр., аспирантов и молодых ученых, Витебск, 5 мая 2005 г.: в 3 ч. / Витебск. гос. ун-т; редкол.: Г.И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2005. Ч. 1. – С. 128 – 131.

THE STRAIN-STRESS STATE OF A THIN-WALLED STRUCTURE CONSISTING OF THE CONJUNCT CYLINDRICAL PANELS

G. MIKHASEV, T. NIKONOVA

A procedure of calculating the strain-stress state of long thin-walled structure consisting of the cylindrical panels and lying on an elastic foundation, taking into account the supporting elements has been stated. In the carried researches the soil model is presented by the elastic Winkler's basis. It is supposed that the soil pressure has hydrostatic character. Calculations of efforts and moments are carried out in the presence of supporting elements of structure and without them, diagrams are constructed, the comparative analysis is made.