

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

## О БИФУРКАЦИИ ДЛИННЫХ ОБОЛОЧЕК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. МИХАСЕВ, Т.В. НИКОНОВА  
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Исследуется потеря устойчивости длинной тонкой цилиндрической оболочки большого диаметра, лежащей на упругом основании (заполнителе), под действием гидростатического давления. Рассматриваются две модели упругого основания: классическая модель Винклера и модель, согласно которой реакция основания (заполнителя) зависит от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки. Приводится алгоритм исследования. Для сравнения выполнены расчеты и построены графики критического усилия для обеих моделей. Показано преимущество данного метода – возможность определения критических усилий, предельной глубины залегания трубы без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенного алгоритма для расчета крупногабаритных конструкций, используемых в строительстве, с целью уменьшения их веса и более детального исследования на устойчивость.

**Введение.** В настоящее время металлические тонкостенные крупногабаритные конструкции широко используются при капитальном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Исследование устойчивости равновесия тонкостенных цилиндрических оболочек наряду с расчетом на прочность является одной из самых важных (в прикладном отношении) проблем в механике деформируемого твердого тела. Расчет на устойчивость таких конструкций выполняется по приближенным оценочным формулам с большим запасом, что приводит к их утяжелению. Использование при расчетах пакетов прикладных программ, основанных на методе конечных элементов, ограничено в проектной практике сложностью и большим объемом вычислений, что может приводить к ошибочным результатам. Нами предлагается производить исследование потери устойчивости тонкостенной цилиндрической трубы большого диаметра аналитически, используя уравнения теории тонких упругих оболочек.

Сегодня достаточно широко проведены исследования устойчивости тонкостенных изотропных цилиндрических оболочек, подверженных статическим изгибным и крутящим нагрузкам, осевому сжатию, гидростатическому давлению [1 – 3]. В [4] содержится детальное исследование устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Недостаточно исследованной является устойчивость тонкостенных оболочек, лежащих на упругом основании. Вопросы исследования устойчивости пластин, лежащих на упругом основании, рассмотрены в [5, 6].

**Устойчивость длинной цилиндрической оболочки по модели Винклера.** Рассмотрим возможную потерю устойчивости длинной тонкой оболочки, лежащей на упругом основании, под действием гидростатического давления  $Q_n$ . Уравнения устойчивости такой оболочки имеют вид [1]:

$$D[\Delta^2 w + \{k_2^2(2w_{yy} + k_2^2 w)\}] - k_2 F_{xx} + \frac{k_2}{Eh} T_2 F_{yy} - T_2 (w_{yy} + \{k_2^2 w\}) + \alpha w = 0; \quad (1)$$

$$\Delta^2 F + E h k_2 w_{xx} = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в криволинейной системе координат  $x, y$  (продольная и окружная, соответственно);  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $E$  – модуль Юнга материала оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $w, F$  – дополнительные нормальный прогиб и функция напряжений, возникающие в оболочке при потере устойчивости;  $k_2 = 1/R$  – кривизна оболочки; индексы  $x, y$  означают производные по соответствующим переменным;  $\alpha$  – коэффициент постели; мембранное кольцевое усилие  $T_2 = Q_n R$  считаем постоянной величиной. Фигурные скобки в (1) соответствуют длинной оболочке, их отбрасывание означает переход к оболочкам средней длины, для которых данные слагаемые пренебрежительно малы.

Перейдем к новым переменным:

$$\xi = k_2 x; \quad \varphi = k_2 y. \quad (2)$$

Решение будем искать в виде:

$$w = A \sin(\lambda \xi) \sin(n\varphi); \quad \lambda = m\pi R/L; \quad F = B \sin(\lambda \xi) \sin(n\varphi), \quad (3)$$

где  $A, B$  – некоторые константы;  $n, m$  – целые числа, равные числу волн, соответственно в окружном и осевом направлениях;  $L$  – длина оболочки.

Подстановка (2), (3) в (1) приводит к следующему уравнению:

$$Dk_2^2[(\lambda^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1] + \frac{\lambda^4 Eh}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{\alpha}{k_2^2} = T_2 \left( 1 - n^2 + \frac{n^2 \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right). \quad (4)$$

Из (4) получаем формулу для нахождения критического усилия  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{Dk_2^2[(\lambda^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1] + Eh\lambda^4/(\lambda^2 + n^2)^2 + \alpha/k_2^2}{1 - n^2 + n^2\lambda^2/(\lambda^2 + n^2)^2}. \quad (5)$$

Для длинных оболочек  $\lambda^2 \ll n^2$ , пренебрегая в (5) слагаемыми порядка  $\lambda^2/n^2$  и выше, получим

$$T_2 = -\min_n \left\{ \frac{Dk_2^2(n^2 - 1)^2 + \alpha/k_2^2}{n^2 - 1} \right\}. \quad (6)$$

Для малых значений  $\alpha$  (слабые грунты), переходя в (6) к пределу и минимизируя  $T_2$  как функцию целого числа  $n$ , приходим к искомой величине критического усилия

$$T_2^0 = -\frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)R^2} - \frac{R^2\alpha}{3}, \quad n = 2. \quad (7)$$

Данная формула, с учетом второго слагаемого, обобщает формулу Грасгофа – Бресса на случай оболочки с внешним упругим заполнителем при малых значениях коэффициента постели  $\alpha$ .

Ранее была получена формула для максимального усилия, возникающего в длинной оболочке, залегающей в грунте, с учетом ее собственного веса (при  $\varphi = \pi$ ) [7]:

$$T_{\max} = \frac{\gamma h(H_0 + R)}{h/R + \alpha R(1-\nu^2)/E} + \frac{\gamma_0 h R}{1 + h^2/(12R^2)},$$

где  $\gamma_0$  – удельный вес материала оболочки. При этом считалось, что давление, оказываемое грунтом, носит гидростатический характер.

Найдем критическую глубину залегания оболочки, при которой происходит потеря устойчивости:

$$H^* = \frac{h/R + \alpha R(1-\nu^2)/E}{\gamma} \left\{ \frac{Eh^2}{4(1-\nu^2)R^2} + \frac{\alpha R^2}{3h} - \frac{\gamma_0 R}{1 + h^2/(12R^2)} \right\} - R. \quad (8)$$

Таким образом, при  $H_0 = H^*$  в оболочке возникает критическое тангенциальное усилие (7), приводящее к потере устойчивости (появление смежных форм равновесия (3)) с образованием  $n = 2$  волн в окружном направлении. Полученное соотношение (6) имеет место лишь для длинных оболочек, для которых  $\lambda^2 \ll n^2$ , а именно при  $\pi R \ll 2L$ .

Пусть  $T_{np}$  – предельное усилие, при котором возможны пластические деформации, срезание болтов, появление трещин и т.п.;  $H_{np}$  – соответствующая высота насыпи грунта. Тогда

$$H_{np} = \frac{h/R + \alpha R(1-\nu^2)/E}{\gamma} \left\{ \frac{T_{np}}{h} - \frac{\gamma_0 R}{1 + h^2/(12R^2)} \right\} - R.$$

Бифуркация произойдет раньше, чем пластические деформации, если

$$H^* < H_{np}, \quad T^{np} > R^2 \left[ \frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)R^3} + \frac{\alpha}{3} \right].$$

**Случай зависимости силы реакции заполнителя от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки.** По другой модели, предполагая, что реакция заполнителя зависит от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки, уравнения устойчивости оболочки имеют вид [8]:

$$D[\Delta^2 w + \{k_2^2(2w_{yy} + k_2^2 w)\}] - k_2 F_{xx} + \frac{k_2}{Eh} T_2 F_{yy} - T_2 (w_{yy} + \{k_2^2 w\}) + c\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} w = 0; \quad (9)$$

$$\Delta^2 F + Ehk_2 w_{xx} = 0,$$

где  $c = 2E_0(1-\nu_0)/((1+\nu_0)(3-4\nu_0))$ ;  $\kappa_1, \kappa_2$  – волновые числа;  $E_0, \nu_0$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для упругого основания.

Уравнения (9) получены для бесконечной пластины, лежащей на упругом полупространстве, поэтому область их применимости ограничена рядом условий:

1) они применимы вдали от краев оболочки, основание должно быть достаточно глубоким  $H > l/2$ ,  $l = 2\pi/\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$ , где  $H$  – глубина основания,  $l$  – характерная длина волны;

2) кривизна оболочки не учитывается, поэтому должно быть  $l \ll R$ .

Пусть  $\lambda = \kappa_1 R$ ,  $n = \kappa_2 R$ . Перейдя к новым переменным по формулам (2), решение будем искать в виде (3). Подстановка (2), (3) в (9) приводит к следующему уравнению:

$$Dk_2^2[(\lambda^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1] + \frac{Eh\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} + c\sqrt{\lambda^2 + n^2} / k_2 = T_2 \left( 1 - n^2 + \frac{n^2\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right).$$

Отсюда

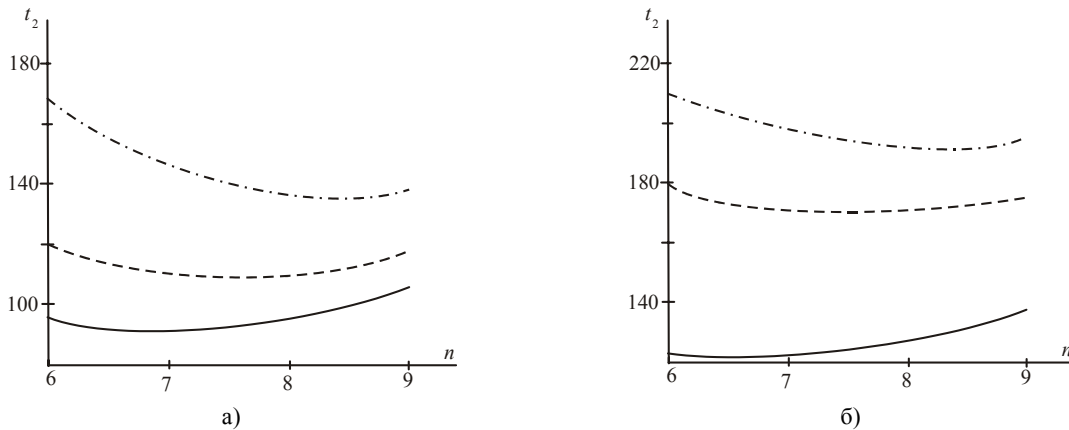
$$T_2 = \frac{Dk_2^2[(\lambda^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1] + Eh\lambda^4 / (\lambda^2 + n^2)^2 + c\sqrt{\lambda^2 + n^2} / k_2}{1 - n^2 + n^2\lambda^2 / (\lambda^2 + n^2)^2}. \tag{10}$$

Для длинных оболочек  $\lambda^2 \ll n^2$ , пренебрегая в (10) слагаемыми порядка  $\lambda^2/n^2$  и выше, получим

$$T_2 = -\min \left\{ \frac{Dk_2^2(n^2 - 1)^2 + cn / k_2}{n^2 - 1} \right\}. \tag{11}$$

Полученные формулы (6) и (11) дают возможность исследовать зависимость значения критического усилия от физических и геометрических характеристик оболочки, физических характеристик упругого основания, а также оптимизировать линейные размеры оболочки для получения заданных свойств.

**Анализ результатов.** На рисунке представлены графики безразмерного критического усилия  $t_2$  ( $t_2 = T_2/Dk_2$ ), рассчитанного по модели Винклера (а), а также для модели, согласно которой реакция основания зависит от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки (б).



Графики безразмерного критического усилия  $t_2$  (сплошная линия соответствует песку мелкому, штриховая – песку среднему, штрихпунктирная – песку крупному)

Расчеты проводились при следующих физических и геометрических параметрах оболочки:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $h = 0,015$  м;  $\nu = 0,25$ ;  $R = 1,5$  м. Для грунта  $\nu_0 = 0,35$ , значения модуля Юнга  $E_0$  и коэффициенты постели  $\alpha$  приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения модулей Юнга  $E_0$  и коэффициентов постели  $\alpha$  для рассматриваемых грунтов

Название грунта	$E_0$ , Н/м <sup>2</sup>	$\alpha$ , Н/м <sup>3</sup>
Песок мелкий	$1,5 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$
Песок средний	$2,5 \cdot 10^7$	$3,5 \cdot 10^7$
Песок крупный	$3 \cdot 10^7$	$5,5 \cdot 10^7$

В таблицах 2 и 3 приведены полученные значения критических усилий  $t_2$ , а также соответствующее им число волн.

Таблица 2

Значения критического усилия  $t_2$  и числа волн  $n$ , полученных по модели Винклера

Название грунта	$t_2$	$n$
Песок мелкий	91,95	7
Песок средний	109,52	7
Песок крупный	136,66	8

Таблица 3

Значения критического усилия  $t_2$  и числа волн  $n$ , полученных для модели, согласно которой реакция основания зависит от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки

Название грунта	$t_2$	$n$
Песок мелкий	122,05	7
Песок средний	170,47	8
Песок крупный	191,97	8

Видно, что увеличение значений модулей Юнга  $E_0$  и коэффициентов постели  $\alpha$  для рассматриваемых грунтов приводит к увеличению значения критического усилия  $t_2$  и числа волн  $n$  для обеих моделей. Из таблиц 3 следует, что по модели, согласно которой реакция основания зависит от ожидаемого числа волн на поверхности оболочки, значения критического усилия  $t_2$  значительно выше, чем соответствующие им значения, полученные в рамках модели Винклера. При этом число волн  $n$ , образующихся при потере устойчивости на поверхности оболочки, практически совпадает. Применение второй модели ограничено условиями 1) и 2) (см. выше). При их выполнении вторая модель позволяет говорить об увеличении несущей способности тонкостенных оболочек, лежащих на упругом основании.

**Заключение.** Полученные приближенные расчетные формулы (6), (11) для критического усилия  $T_2$  дают возможность исследовать по двум различным моделям зависимость критических усилий, действующих на оболочку, от физических характеристик упругого заполнителя, оптимизировать ее линейные размеры для получения заданных свойств. Преимуществом данного метода является возможность определения критических усилий, предельной глубины залегания трубы без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенного алгоритма для расчета крупногабаритных конструкций, используемых в строительстве, с целью уменьшения их веса и более детального исследования на устойчивость.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
2. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек / П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1995. – 320 с.
4. Ильгамов, М.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем / М.А. Ильгамов, В.А. Иванов, Б.В. Гулин. – М.: Наука, 1978. – 332 с.
5. Товстик, П.Е. Устойчивость многослойной пластины на упругом основании / П.Е. Товстик // Труды 3-й Всерос. конф. по теории упругости. – Ростов н/Д, 2003. – С. 365 – 368.
6. Черняев, С.П. Влияние краев на устойчивость пластины, лежащей на упругом основании / С.П. Черняев // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. – 2005. – Вып. 2. – С. 144 – 148.
7. Никонова, Т.В. Оценка усилий в тонкостенной трубе с упругим внешним заполнителем с учетом собственного веса / Т.В. Никонова, Г.И. Михасев // Вестн. Витебск. гос. ун-та. – 2003. – № 2. – С. 105 – 108.
8. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании / П.Е. Товстик // Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 147 – 160.

Поступила 01.11.2007