МЕХАНИКА

УДК 539.3

РАСЧЕТ УСИЛИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОЙ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. МИХАСЕВ, Т.В. НИКОНОВА
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Изучена задача о напряженно-деформируемом состоянии сложной тонкостенной конструкции, залегающей в грунте. Несущая часть конструкции, контактирующая с грунтом, состоит из цилиндрических гофрированных панелей, а подкрепляющая – из элементов сопряженных цилиндрических панелей. Для подкрепляющих элементов конструкции рассмотрены условия жесткого и шарнирного соединений. Модель грунта представлена упругим основанием Винклера. Предполагается что давление, оказываемое грунтом, носит гидростатический характер. Выполнены расчеты усилий и моментов при наличии подкрепляющих элементов конструкции и без них.

Введение. Металлические тонкостенные гофрированные конструкции являются высокотехнологичными и экономичными. В настоящее время подобные конструкции широко используются при капитальном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Расчет на прочность таких конструкций выполняется по приближенным оценочным формулам с большим запасом, что приводит к их утяжелению [1]. Использование пакетов прикладных программ, основанных на методе конечных элементов (например, «SCAD», «PLAXIS»), ограничено в проектной практике сложностью пространственной геометрии рассчитываемой конструкции [2] и может приводить к ошибочным результатам.

Мы предлагаем производить расчет напряженно-деформируемого состояния (НДС) тонкостенной составной конструкции аналитически, используя уравнения теории тонких упругих оболочек. Данным методом уже выполнены расчеты НДС длинной цилиндрической оболочки и оболочки конечной длины, а также тонкостенной панели, залегающей в грунте (для постоянного и переменного коэффициентов постели грунта) [3, 4].

В данной работе впервые приводится алгоритм расчета НДС составной тонкостенной конструкции, используемой в строительстве для перекрытий. Рассмотрены случаи жесткого и шарнирного соединения подкрепляющих элементов составной конструкции. Для сравнения выполнены расчеты для несущей части той же конструкции, но без подкрепляющих элементов. На основе полученных в явном виде формул для расчета усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности конструкции, разработана прикладная программа в среде MAPLE для проведения расчетов подобных конструкций.

Напряженно-деформируемое состояние тонкостенной подкрепленной конструкции. Рассмотрим составную тонкостенную конструкцию, лежащую в грунте на глубине H_2 и состоящую из элементов гофрированных цилиндрических панелей.

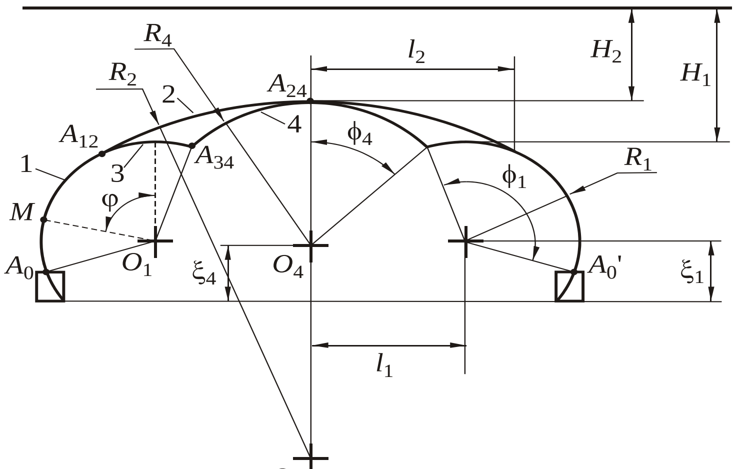

Рис. 1. Поперечное сечение конструкции

На рисунке 1 изображено поперечное сечение данной конструкции, где *1, 2* – несущие элементы конструкции, представляющие собой гофрированные цилиндрические панели; *3, 4* – сопряженные цилиндрические панели; A_{12}, A_{34}, A_{24} – точки сопряжения, соответствующих элементов.

Учитывая симметрию конструкции, будем рассматривать только ее левую часть. Считаем, что в точках A_0, A_0', A_{12}, A_{24} панели скреплены жестко, а в точке A_{34} рассмотрим условия жесткого или шарнирного соединения.

Основание Винклера [5 – 7] примем в качестве модели внешнего упругого заполнителя (грунта), считая, что оказываемое им давление [8, 9] носит гидростатический характер. Предполагается, что высота и длина волны гофра несущих частей *1*, *2* конструкции достаточно малы, по сравнению с радиусами опорных цилиндров. Принимая во внимание данные предположения, гофрированные панели заменим цилиндрическими панелями с толщиной, обеспечивающей совпадение их изгибной жесткости с аналогичной жесткостью гофрированных панелей.

Пусть H_1 – глубина залегания элемента *1* (см. рис. 1), тогда

$$H_1 = H_2 + R_4 - R_1 + \xi_4 - \xi_1,$$

где R_k – радиус k-й панели, а ξ_k – расстояние от основания конструкции до точки O_k (центра k-й дуги) $k = \overline{1,4}$.

Будем считать, что каждый элемент конструкции характеризуется своими толщиной h_k, модулем Юнга E_k, коэффициентом Пуассона ν_k и плотностью $\gamma_0^{(k)}$. Положение точки M на каждом из элементов будем определять углом φ, отсчитываемым в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, при этом $\varphi_{k,1} \le \varphi \le \varphi_{k,2}$, где

$$\varphi_{1,1} = \arcsin\left(\frac{l_2 - l_1}{R_1}\right), \ \varphi_{1,2} = \phi_1 + \varphi_{3,1}, \ \varphi_{2,1} = 0, \quad \varphi_{2,2} = \arcsin\left(\frac{l_2}{R_2}\right),$$

$$\varphi_{3,1} = -\frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{R_1^2 + l_1^2 + (\zeta_1 - \zeta_4)^2 - R_4^2}{2 \cdot R_1 \cdot \sqrt{l_1^2 + (\zeta_1 - \zeta_4)^2}}\right) - \arctan\left(\frac{\zeta_1 - \zeta_4}{l_1}\right), \varphi_{3,2} = \varphi_{1,1}, \quad \varphi_{4,1} = 0, \quad \varphi_{4,2} = \phi_4.$$

Длину конструкции в осевом направлении (перпендикулярном плоскости рисунка) считаем достаточно большой, так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем. Тогда все функции, характеризующие НДС конструкции, можно считать независящими от координаты x, и задача становится плоской [10]. Для описания равновесия k-го элемента могут быть использованы безмоментные уравнения равновесия тонких оболочек [11], которые вырождаются в уравнения равновесия криволинейных балок:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial s} - \frac{T_k}{R_k} + q_n^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial T_k}{\partial s} + \frac{Q_k}{R_k} + q_2^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial M_k}{\partial s} - Q_k = 0, \tag{1}$$

где $s = R_k\varphi$ – длина дуги на k-м элементе ($k = \overline{1,4}$); T_k, Q_k, M_k – соответственно кольцевое, перерезывающее усилие и момент, возникающие в серединной поверхности k-го элемента; $q_n^{(k)}, q_2^{(k)}$ – нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади k-го элемента. Здесь

$$q_n^{(k)} = q_{n,гр}^{(k)} + q_{n,об}^{(k)} + q_{n,вин}^{(k)}, \quad q_{n,гр}^{(k)} = -\gamma_k \cdot \left[H_k + R_k \cdot (1 - \cos\varphi)\right], \quad q_{n,об}^{(k)} = -\gamma_0^{(k)} h_k \cos\varphi,$$

$$q_{n,вин}^{(k)} = -\frac{\alpha_0^{(k)}}{R_k} \cdot w_k, \quad q_2^{(k)} = \gamma_0^{(k)} h_k \sin\varphi, \quad \gamma_k = \begin{cases} \gamma_{гр}, & k = 1,2 \\ 0, & k = 3,4 \end{cases}, \quad \alpha_0^{(k)} = \begin{cases} \alpha_{гр}, & k = 1,2 \\ 0, & k = 3,4 \end{cases},$$

где $q_{n,гр}^{(k)}$, $q_{n,об}^{(k)}$, $q_{n,вин}^{(k)}$ – нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса балки и реакцией грунта (винклеровского основания) соответственно; w_k – нормальный прогиб k-го элемента; $q_2^{(k)}$ – касательная составляющая нагрузки, вызванная весом балки; $\gamma_{гр}$ – удельный вес; $\alpha_{гр}$ – коэффициент постели винклеровского основания.

Уравнения равновесия (1) дополним уравнениями физического состояния [11], связывающими T_k, Q_k и M_k с нормальным прогибом w_k и касательным перемещением v_k:

$$T_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial s} + \frac{w_k}{R_k}\right), \quad M_k = \frac{E_k h_k^3}{12\left(1 - \nu_k^2\right)} \cdot \left(-\frac{\partial^2 w_k}{\partial s^2} + \frac{1}{R_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial s}\right), \tag{2}$$

$$Q_k = \frac{\partial M_k}{\partial s} = \frac{E_k h_k^3}{12\left(1 - \nu_k^2\right)} \cdot \left(-\frac{\partial^3 w_k}{\partial s^3} + \frac{1}{R_k} \cdot \frac{\partial^2 v_k}{\partial s^2}\right), \ \theta_k = \frac{1}{R_k} \cdot \left(v_k - R_k \cdot \frac{\partial w_k}{\partial s}\right).$$

В основании конструкции (точка A_0 на рис. 1) рассмотрим условия жесткого крепления:

$$w_1(\varphi_{1,2}) = v_1(\varphi_{1,2}) = 0, \quad w_1'(\varphi_{1,2}) = 0, \tag{3}$$

где w_1, v_1 – нормальное и тангенциальное перемещения точек элемента *1*, а штрих здесь и ниже означает дифференцирование по координате φ.

Рассмотрим условия сопряжения двух элементов [12] в точке A_{34}. Пусть γ_{34} – угол между единичными векторами – нормалями $\bar{\mathbf{e}}_3^{(n)}$, $\bar{\mathbf{e}}_4^{(n)}$ к кривым 3 и 4, соответствующим 3-му и 4-му элементам.

В случае жесткого соединения условия сопряжения заключаются в равенстве векторов перемещения, сил, моментов и углов поворота каждого элемента в точке их пересечения. Проектируя векторы перемещений и сил, например, на оси $\bar{\mathbf{e}}_4^{(n)}$, $\bar{\mathbf{e}}_4^{(l)}$, где $\bar{\mathbf{e}}_4^{(l)}$ – единичный вектор, касательный к 4-й кривой, получим следующие условия сопряжения в случае жесткого сочленения:

$$v_4(\varphi_{4,2}) = \cos\gamma_{34}\cdot v_3(\varphi_{3,1}) - \sin\gamma_{34}\cdot w_3(\varphi_{3,1}),\quad w_4(\varphi_{4,2}) = \sin\gamma_{34}\cdot v_3(\varphi_{3,1}) + \cos\gamma_{34}\cdot w_3(\varphi_{3,1}), \tag{4}$$

$$T_4(\varphi_{4,2}) = \cos\gamma_{34}\cdot T_3(\varphi_{3,1}) - \sin\gamma_{34}\cdot Q_3(\varphi_{3,1}),\quad Q_4(\varphi_{4,2}) = \sin\gamma_{34}\cdot T_3(\varphi_{3,1}) + \cos\gamma_{34}\cdot Q_3(\varphi_{3,1}), \tag{5}$$

$$M_3(\varphi_{3,1}) = M_4(\varphi_{4,2}),\ \theta_3(\varphi_{3,1}) = \theta_4(\varphi_{4,2}), \tag{6}$$

где $\gamma_{34} = \arccos\left(\dfrac{R_1^2 + R_4^2 - l_1^2 - (\zeta_1 - \zeta_4)^2}{2R_1R_4}\right)$.

В случае шарнирного соединения 3-го и 4-го элементов вместо (6) в точке соединения имеем:

$$M_3(\varphi_{3,1}) = M_4(\varphi_{4,2}) = 0. \tag{7}$$

В точке A_{12} при рассмотрении сопряжения 1-го и 2-го элементов конструкции аналогично имеем:

$$v_2(\varphi_{2,2}) = \cos\gamma_{12}\cdot v_1(\varphi_{1,1}) - \sin\gamma_{12}\cdot w_1(\varphi_{1,1}),\ w_2(\varphi_{2,2}) = \sin\gamma_{12}\cdot v_1(\varphi_{1,1}) + \cos\gamma_{12}\cdot w_1(\varphi_{1,1}),\ \theta_1(\varphi_{1,1}) = \theta_2(\varphi_{2,2}), \tag{8}$$

где $\gamma_{12} = \arccos\left(\dfrac{l_2 - l_1}{R_1}\right) - \arccos\left(\dfrac{l_2}{R_2}\right)$.

В этой же точке геометрические условия сопряжение 1-го и 3-го элементов равносильны следующим равенствам:

$$v_1(\varphi_{1,1}) = v_3(\varphi_{3,2}),\quad w_1(\varphi_{1,1}) = w_3(\varphi_{3,2}),\ \theta_1(\varphi_{1,1}) = \theta_3(\varphi_{3,2}). \tag{9}$$

Условия равновесия узла A_{12} приводят к соотношениям относительно действующих усилий и моментов:

$$T_1(\varphi_{1,1}) - \cos\gamma_{12}\cdot T_2(\varphi_{2,2}) - \sin\gamma_{12}\cdot Q_2(\varphi_{2,2}) - T_3(\varphi_{3,2}) = 0, \tag{10}$$

$$Q_1(\varphi_{1,1}) + \sin\gamma_{12}\cdot T_2(\varphi_{2,2}) - \cos\gamma_{12}\cdot Q_2(\varphi_{2,2}) - Q_3(\varphi_{3,2}) = 0,\ M_1(\varphi_{1,1}) - M_2(\varphi_{2,2}) - M_3(\varphi_{3,2}) = 0.$$

В точке A_{24}, учитывая симметрию конструкции относительно линии $A_{24}O_4$, примем

$$w_2(\varphi_{2,1}) = w_4(\varphi_{4,1}),\quad w_2'(\varphi_{2,1}) = w_4'(\varphi_{4,1}) = 0,\quad v_2(\varphi_{2,1}) = v_4(\varphi_{2,1}) = 0,\quad Q_2(\varphi_{2,1}) = Q_4(\varphi_{4,1}). \tag{11}$$

Подставив выражения (2) в (1) и интегрируя один раз, получим разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_k:

$$w_k^{IV} + 2w_k'' + a_k w_k = b_k - \delta_k c_k^{(5)} + d_k \cos\varphi, \tag{12}$$

где $c_k^{(5)}$ – неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий и условий сопряжения:

$$\varepsilon_k = \frac{h_k^2}{12R_k^2};\ \delta_k = \frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k};\ a_k = 1 + \delta_k\alpha_k;\ b_k = -\frac{\delta_k(1-\nu_k^2)\gamma_k R_k^2(H_k + R_k)}{E_k h_k};$$

$$d_k = \frac{\delta_k\left(1-\nu_k^2\right)R_k^2\left(\gamma_k R_k - 2\gamma_0^{(k)}h_k\right)}{E_k h_k}.$$

Рассмотрим разрешающее уравнение (12) для элементов *1*, *2* и *3*, *4*, граничащих и не контактирующих с грунтом. Для элементов *1*, *2* уравнение (12) имеет следующее общее решение:

$$w_k(\varphi) = c_k^{(1)}\cdot e^{\alpha_k\varphi}\cdot\cos(\beta_k\varphi) + c_k^{(2)}\cdot e^{\alpha_k\varphi}\cdot\sin(\beta_k\varphi) + c_k^{(3)}\cdot e^{-\alpha_k\varphi}\cdot\cos(\beta_k\varphi) +$$

$$+ c_k^{(4)}\cdot e^{-\alpha_k\varphi}\cdot\sin(\beta_k\varphi) + \frac{b_k}{a_k} - \frac{\delta_k}{a_k}\cdot c_k^{(5)} + \frac{d_k}{a_k - 1}\cdot\cos\varphi, \tag{13}$$

где $\alpha_k = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_k} - 1}{2}}$, $\beta_k = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_k} + 1}{2}}$; $k = 1, 2$.

Тогда тангенциальные перемещения

$$v_k = \frac{1}{1+\varepsilon_k}\left(\varepsilon_k w_k' - \int w_k(\varphi)\mathrm{d}\varphi + \frac{\gamma_0^{(k)}\left(1-\nu_k^2\right)R_k^2}{E_k}\cdot sin\,\varphi\right) + c_k^{(5)}\varphi + c_k^{(6)}\,. \tag{14}$$

При k = 3, 4 общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$w_k = c_k^{(1)}\cos\varphi + c_k^{(2)}\sin\varphi + \varphi\left(c_k^{(3)}\cos\varphi + c_k^{(4)}\sin\varphi\right) - \frac{\delta_k}{a_k}c_k^{(5)} - \frac{d_k}{8}\varphi^2\cos\varphi\,, \tag{15}$$

а перемещение v_k находится по формуле (14).

В обоих случаях, для элементов, граничащих и не граничащих с грунтом, усилия T_k, Q_k и момент M_k находятся согласно (4).

Построенные решения (13) – (15) содержат неопределенные постоянные $c_k^{(j)}$, которые могут быть найдены из граничных условий и условий сопряжения элементов.

Рассмотрение этих условий приводит к системе из 24 неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно 24 неизвестных постоянных $c_k^{(j)}$, $k=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,6}$.

В случае жесткого закрепления элементов *3* и *4* в точке A_{34} используем условия сопряжения (3) – (6), (8) – (11), а при наличии шарнирного соединения в этой же точке – условия (3) – (5), (7) – (11). Для сравнения рассмотрен также случай, когда отсутствуют подкрепляющие 3-й и 4-й элементы конструкции [13]. В этом случае необходимо рассмотреть только условия сопряжения 1-го и 2-го элементов в точке A_{12}, граничные условия в точке A_0, а так же условия симметрии в точке A_{24} для 2-го элемента конструкции.

Математическая среда MAPLE была использована для решения полученной системы уравнений и определения усилий и моментов в элементах конструкции как функций аргумента φ.

Рассмотрена конструкция, все элементы которой изготовлены из стальных панелей.

Расчеты выполнены для $E_k = 2\cdot10^{11}$ Н/м², $h_k = 0{,}04946$ м, $\nu_k = 0{,}25$, $\gamma_0^{(k)} = 7{,}8\cdot10^4$ Н/м³ при $k=\overline{1,4}$, $\gamma_{гр}$ = $1{,}8\cdot10^4$ Н/м³, $\alpha_{гр} = 3\cdot10^7$ Н/м², $R_1 = R_3 = 3{,}32$ м, $R_2 = 11{,}8$ м, $R_4 = 4{,}75$ м, $H_2 = 4$ м, $l_1 = 4{,}5$ м, $l_2 = 5{,}95$ м, ϕ_1 = 126,05°, $\phi_4 = 46{,}58°$, $\zeta_1 = 2{,}01$ м, $\zeta_4 = 1{,}86$ м.

На рисунках 2 – 4 приведены графики нормальных перемещений, тангенциальных и перерезывающих усилий, возникающих в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции. Сплошная линия соответствует жесткому соединению элементов *3* и *4*, штриховая – шарнирному соединению тех же элементов, штрихпунктирная линия – случаю, когда подкрепляющие элементы отсутствуют.

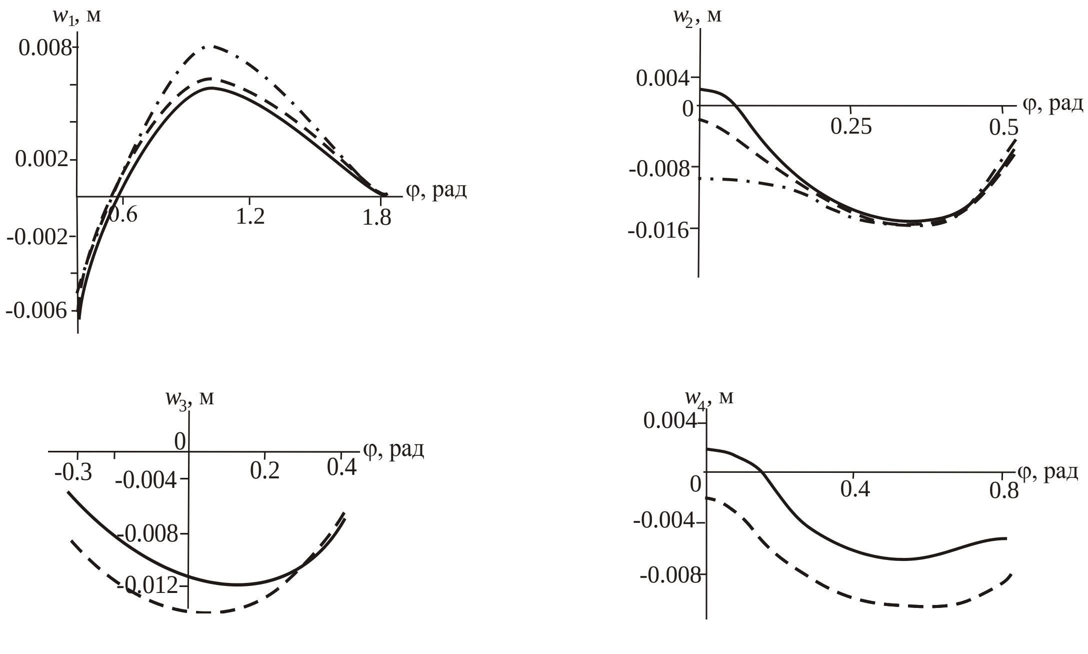

Рис. 2. Нормальные перемещения, возникающие
в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

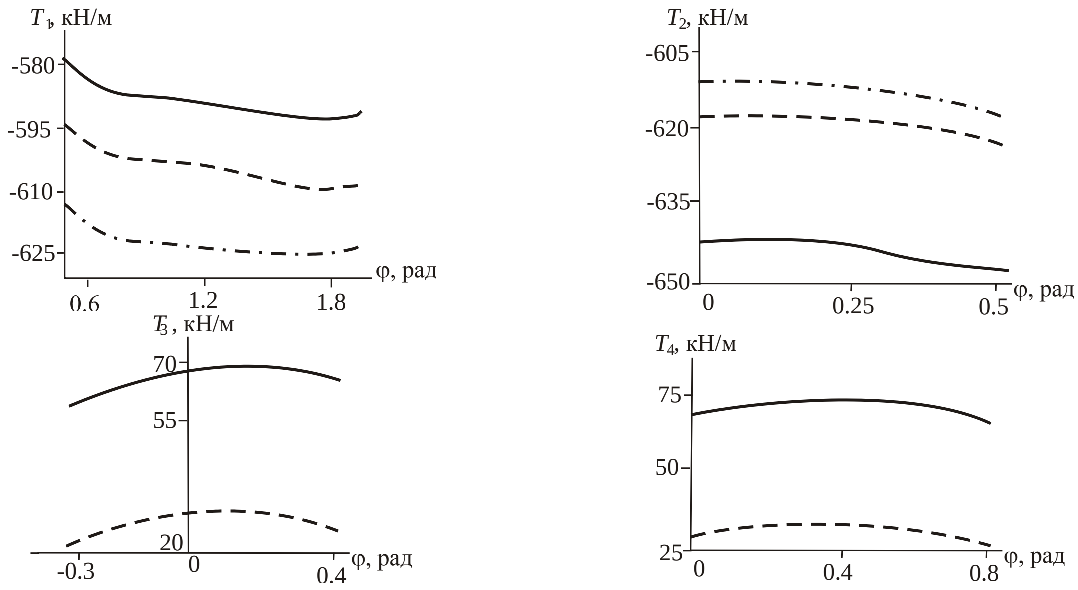

Рис. 3. Тангенциальные усилия,
возникающие в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

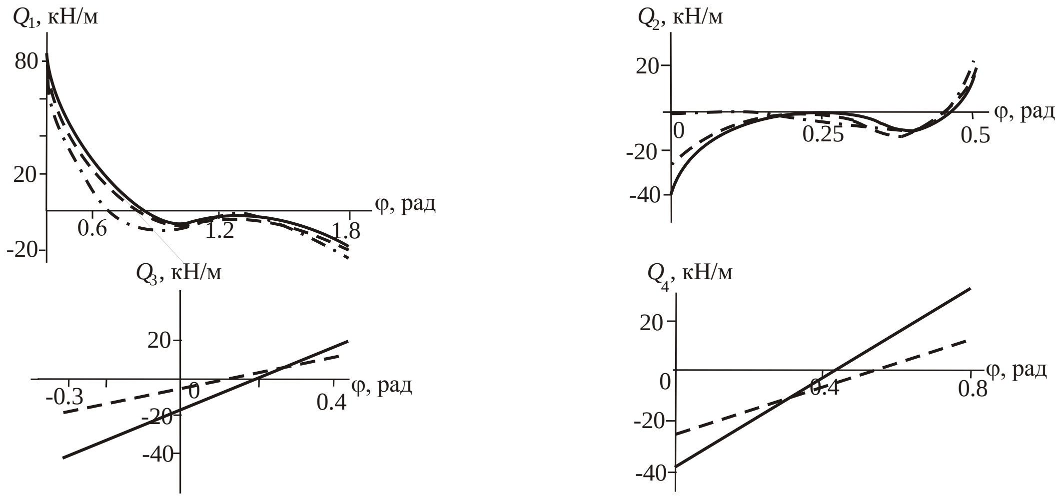

Рис. 4. Перерезывающие усилия,
возникающие в срединной поверхности соответствующих элементов конструкции

Анализ результатов. Полученные значения нормальных перемещений указывают на то, что под действием собственного веса и давления, оказываемого грунтом, конструкция опускается вниз, при этом расширяясь в стороны.

Из проведенных расчетов следует, что тангенциальное, перерезывающее усилия и моменты, возникающие в элементах конструкции, возрастают с увеличением глубины залегания. Наиболее опасными являются точки сопряжения элементов конструкции A_{12}, A_{34}, в которых перерезывающие силы и моменты достигают наибольшего значения.

Из рисунка 3 видно, что в точке A_{12} применение жесткого закрепления элементов *3* и *4* конструкции ведет к снижению усилия T_1 на 6 %, а шарнирного – на 3 %. При этом жесткое соединение этих же элементов приводит к увеличению усилия T_2 в этой же точке на 4,8 %, а шарнирное – на 1,1 %, соответственно. Из анализа рисунка 4 следует, что перерезывающее усилие Q_1 при жестком соединении элементов *3* и *4* увеличивается на 23,5 %, а Q_2 – снижается на 30 %, при шарнирном соединении элементов *3* и *4* происходит увеличение Q_1 на 14,7 %, а Q_2 – снижается на 13 %.

В верхней части конструкции (в точке A_{24}) при жестком соединении тангенциальное усилие T_2 увеличивается на 5 %, при шарнирном – на 1,3 %, значительно увеличивается перерезывающее усилие Q_2. В основании конструкции (точка A_0) происходит снижение тангенциального усилия T_1 при жестком соединении элементов *3* и *4* на 5 %, при шарнирном – на 2,5 %. При этом перерезывающее усилие Q_1 снижается на 26 % и на 7,6 % соответственно.

В точке сопряжения A_{34} при шарнирном соединении элементов *3* и *4* перерезывающие и тангенциальные усилия, возникающие в этих элементах в 2,4 раза меньше, чем те же усилия, возникающие при жестком соединении этих элементов.

Отсюда наиболее приемлемым является вариант шарнирного соединения подкрепляющих элементов по сравнению с жестким соединением, так как он позволяет снизить усилия, возникающие в местах сопряжения элементов конструкций, при этом незначительно повысив усилия, возникающие в соседних элементах конструкции.

Заключение. Таким образом, полученные приближенные расчетные формулы для деформаций, мембранных и перерезывающих усилий и моментов дают возможность расчета НДС составных тонкостенных конструкций, залегающих в грунте. Разработанная авторами прикладная программа позволяет исследовать зависимость возникающих усилий и моментов в элементах конструкции от глубины ее залегания, характеристик грунта, оптимизировать линейные размеры элементов конструкции с заданными свойствами. Преимуществом данного метода является возможность определения деформаций и действующих усилий и моментов в любой точке конструкции, определение ее наиболее «уязвимых» мест без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенного алгоритма для расчета составных тонкостенных конструкций, используемых в строительстве, с целью уменьшения их веса и более детального исследования на прочность. Ограничением в использовании данной программы является тот факт, что разработанный алгоритм позволяет исследовать лишь некоторый вид тонкостенных составных панелей и требует корректировки для других видов. В дальнейшем необходимо разработать пакет прикладных программ, предназначенных для расчета составных конструкций с различными вариантами подкрепляющих элементов, для использования в проектировании облегченных конструкций с заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы обеспечения безопасности и сейсмостойкости металлических гофрированных конструкций в капитальном транспортном строительстве / В.В. Кондратов, Г.И. Михасев, В.В. Пименов, А.С. Ткаченко, А.М. Уздин // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2003. – № 2. – С. 52 – 55.
2. Проблемы взаимодействия металлических гофрированных конструкций с грунтовой средой / В.В. Кондратов, А.М. Уздин, А.С. Ткаченко, М.В. Фрезе // Взаимодействие сооружений и оснований: методы расчета и инженерная практика: Труды Междунар. конф. по геотехнике. – СПб., 2005. – С. 95 – 101.
3. Никонова Т.В. Напряженно-деформируемое состояние тонкостенной цилиндрической панели, залегающей в грунте с переменным коэффициентом постели // Теоретическая и прикладная механика: Межвед. сб. науч.-метод. ст. – Мн.: 2005. – Вып. 8. – С. 140 – 144.
4. Никонова Т.В. Влияние внешнего упругого заполнителя на расчет деформаций и напряжений в цилиндрической оболочке // Вестник ВГТУ. – 2005. – Вып. 7. – С. 60 – 64.
5. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1954. – 232 с.
6. Корбут Б.А., Нагорный Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек // Изв. вузов. Машиностроение. – 1971. – № 6. – С. 16 – 21.
7. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. – М.: Изд-во АН СССР, 1930. – 154 с.
8. Баженов В.А. Напряженное состояние цилиндрических оболочек типа труб, уложенных в упругой среде // Сопротивление материалов и теория сооружений: Межведомств. респ. науч. сб. – 1970. – Вып. 10. – С. 23 – 30.
9. Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. – М., 1969. – 325 с.
10. Никонова Т.В., Михасев Г.И. Оценка усилий в тонкостенной трубе с упругим внешним заполнителем с учетом собственного веса // Вестник ВГТУ. – 2003. – № 2. – С. 105 – 108.
11. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962. – 431 с.
12. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. – 196 с.
13. Никонова Т.В. Расчет усилий в тонкостенной панели, залегающей в грунте // I Машеровские чтения: Материалы региональной науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Витебск, 2005. – Ч. 1. Естественно-математические науки. – С. 128 – 131.