ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т. В. Никонова, А. Д. Никонова*

Витебский государственный университет,
г. Витебск, Белоруссия,
*Санкт-Петербургский горный университет,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: st.rubon@mail.ru, *nikonovaad@mail.ru

При рассмотрении практических задач в механике деформируемого твердого тела, теории колебаний, электротехнике, химии часто сталкиваемся с необходимостью решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. Процесс отыскания решения такого уравнения сопряжен с определенными трудностями.

Цель – предложить численный метод решения и разработать прикладную программу, позволяющую решить нелинейную краевую задачу для сингулярно-возмущенных уравнений.

Имеется значительное количество публикаций, посвященных их изучению. Применение метода координатных преобразований на адаптивных сетках для отыскания численного решения сингулярно-возмущенных уравнений рассмотрено в [1]. Предлагаемый метод является слиянием аналитического и численного подходов, рассмотрен широкий круг задач. Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом описан в [2]. Для того чтобы найти все возможные решения уравнения с заданной точностью описано использование таких методов, как метод Лаэя и метод продолжения по наилучшему параметру. Вопросам использования явных адаптивных методов численного решения жестких систем посвящена публикация [3]. Предложен адаптивный метод с расчетными формулами, настраивающимися на решаемую задачу и использующими оценки параметров.

Рассмотрим нелинейное сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение [4]:

$$\varepsilon y'' = y - y^3, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(a)=A, y(b)=B, \quad |A|<\sqrt{2}, \quad |B|<\sqrt{2}, \tag{2}$$

где ε – малый параметр, $[a, b]$ – отрезок интегрирования, A, B – значения функции на концах отрезка интегрирования.

Выполним переход от дифференциального уравнения (1) второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \varepsilon^{-1}(y - y^3), \end{cases} \tag{3}$$

с краевыми условиями (2).

Для решения системы (1) с краевыми условиями (2) будем использовать один из численных методов семейства Рунге-Кутты [5]. Итерационные соотношения для явного метода первого порядка точности имеют вид:

$$y_{n+1} = y_n + hf(z_n), \quad z_{n+1} = z_n + hg(y_n), \tag{4}$$

$$y_0 = A, \; z_0 = p,$$

где $f(z)=z$, $g(y)=\varepsilon^{-1}(y-y^3)$, h – шаг приращения аргумента, p – пока неизвестное значение.

Явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности будет определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), && z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4), \\
&k_1 = f(z_n), && l_1 = g(y_n), \\
&k_2 = f(z_n + \frac{h}{2}k_1), && l_2 = g(y_n + \frac{h}{2}l_1), \\
&k_3 = f(z_n + \frac{h}{2}k_2), && l_3 = g(y_n + \frac{h}{2}l_2), \\
&k_4 = f(z_n + hk_3), && l_4 = g(y_n + hl_3), \\
&y_0 = A, && z_0 = p.
\end{aligned} \tag{5}$$

Неявные методы Рунге-Кутты обладают большей устойчивостью по сравнению с явными методами того же семейства. Для получения соотношений для неявного метода первого порядка необходимо значение производной каждой из функций y и z заменить отношением приращения функции к соответствующему приращению аргумента. Система уравнений (3) в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = z_{n+1}, \\ \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = \varepsilon^{-1}(y_{n+1} - y_{n+1}^3). \end{cases} \tag{6}$$

Выразив z_{n+1} из второго уравнения системы (6) и подставив полученное значение в первое уравнение той же системы, получим

$$\begin{cases} y_{n+1} = hz_n + y_n + \varepsilon^{-1}h^2(y_{n+1} - y_{n+1}^3), \\ z_{n+1} = z_n + \varepsilon^{-1}h(y_{n+1} - y_{n+1}^3). \end{cases} \tag{7}$$

Первое уравнение системы (7) является нелинейным относительно y_{n+1} и позволяет найти его решение по известным значениям y_n и z_n. Второе уравнение позволяет по найденному значению y_{n+1} вычислить значение z_{n+1}. Для решения полученного уравнения, содержащего неизвестную y_{n+1}, использован метод Ньютона.

Неявные методы Рунге-Кутты более высокого порядка аппроксимации задаются формулами:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \qquad k_i = f\left(x_n + c_i h, \quad y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j \right), \qquad j = 1..s, \tag{8}$$

где b_i, c_i, a_{ij} – соответствующие коэффициенты таблицы Батчера. При этом диагонально неявные методы (SDIRK) являются более простыми в использовании так, как у этих методов матрица A является нижне треугольной. В том случае если у такой матрицы A совпадают все диагональные элементы, то это позволяет выполнять единственное LU-разложение на шаге интегрирования и это еще больше упрощает процесс. Эти методы называются однократно диагонально не явными (SDIRK), описание их применения подробно описано в работе [6].

При проведении вычислений с применением неявных методов приходится большое внимание уделять вопросам выбора начальных приближений методов Ньютона, определять критерий окончания итераций, обновления матрицы Якоби, при необходимости менять шаг вычислений, контролировать погрешность вычислений.

Для корректной работы любого метода Рунге-Кутты необходимо задание значения $y'(a)=z(a)$. Однако в постановке задачи (3), (2) это значение не задано, вместо него в (2) имеется значение $y(b)=B$. Краевых условий (2) достаточно, чтобы разрешить задачу. Для отыскания значения $z(a)=p$ будем использовать для задачи (3), (2) метод стрельбы. Параметр p называется пристрелочным, необходимо найти такой параметр p, при котором кривая $y(x)$, вышедшая из точки (a, A) попадет в точку (b, B). Метод стрельбы заключается в сведении решения краевой задачи (3), (2) к решению последовательности задач Коши для той же системы с начальными условиями

$$y(a)=A, \; z(a)=p. \tag{9}$$

Таким образом, предложен метод для отыскания решения нелинейной краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения (1) с краевыми условиями (2). Решение поставленной задачи сведено к последовательности решения задач Коши одним из методов семейства Рунге-

Кутты. Для определения значения параметра p для каждой из задач Коши применяется метод стрельбы. Полученное при этом нелинейное уравнение решается методом Ньютона. Предложенный метод расчета реализован в виде прикладной программы, позволяющей по выбранному виду метода Рунге-Кутты, задав необходимые параметры найти решение поставленной задачи, построить его график, проанализировать полученное решение. Выбор порядка метода позволяет выполнять расчеты с требуемой точностью и определённым количеством итераций. Изменение количества шагов разбиения отрезка интегрирования, значений функции на краях, дает возможность исследовать влияние этих параметров задачи на устойчивость полученного решения.

Библиографический список

1. Лисейкин, В. Д. Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно-возмущенных задач / В. Д. Лисейкин, Ю. В. Лиханова, Ю. И. Шокин. – Новосибирск : Наука, 2007. – 312 с.
2. Афанасьева, М. Н. Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / М. Н. Афанасьева, Е. Б. Кузнецов // Труды МАИ. – 2017. – № 88. – С. 1–16.
3. Скворцов, Л. М. Явные адаптивные методы численного решения жестких систем / Л. М. Скворцов // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 12. – С. 97–107.
4. Чанг, К. Нелинейные сингулярно-возмущенные краевые задачи. Теория и приложения / К. Чанг, Ф. Хауэс. – Москва : Мир, 1988. – 247 с.
5. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – Санкт-Петербург : Лань, 2005. – 288 с.
6. Скворцов, Л. М. Диагонально неявные FSAL-методы для жестких и дифференциально-алгебраических систем / Л. М. Скворцов // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 2. – С. 3–17.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

А. В. Сурикова, Е.Г. Романова

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: surikova99.99@mail.ru

Многие задачи оптимизации производственных, экономических, технических и других процессов сводятся к отысканию корней систем