УДК 539.3

Об одном из алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, с учетом нелинейности деформации и прогиба

Т.В. Никонова[*], Е.А. Корчевская[**]
[*]*Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»*
[**]*Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Предложен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния тонкой гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, с учетом нелинейности деформации и прогиба. Использован вариант нелинейной теории оболочек, основанный на гипотезе Кирхгофа–Лява. Применяются уравнения типа Кармана. Воздействие упругого основания принято в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением стенок оболочки, при этом рассматривается модель Винклера. Края оболочки предполагаются жестко закрепленными. Уравнения, полученные в первом и втором приближениях, учитывают нелинейность поставленной задачи и позволяют уточнить получаемые значения прогиба. В качестве метода решения полученных уравнений предложен численный метод сеток.

Ключевые слова: *тонкие цилиндрические и гофрированные оболочки, упругое основание, напряженно-деформированное состояние, нелинейная теория оболочек.*

About One of the Algorithms of Calculation of Strain-Stress State of Corrugated Shell, Lying on an Elastic Foundation, Taking into Account Nonlinear Deformation and Deflection

T.V. Nikonova[*], E.A. Korchevskaya[**]
[*]*Educational establishment «Vitebsk State Technological University»*
[**]*Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

An algorithm for calculating the strain-stress state of thin corrugated shell lying on an elastic foundation, taking into account nonlinearity of deformation and deflection has been proposed. The version of the nonlinear theory of shells based on Kirchhoff–Love hypothesis is used. Equations of Karman type are used. Influence of elastic foundation is taken into account as the additional pressure within the framework of Winkler's model. Rigid clamped conditions are considered at the edges of the shell. Equations obtained in the first and second approximations take into account the non-linearity of the problem and make it possible to specify the obtained values of deflection. As a method of solution of the equations, the numerical method of nets has been proposed.

Key words: *thin cylindrical and corrugated shells, elastic foundation, the strain-stress state, the nonlinear theory of shells.*

В настоящее время строительные компании используют габаритные металлические гофрированные конструкции в капитальном транспортном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Во многих случаях тонкостенные гофрированные цилиндрические панели применяются в качестве облегченных широкопролетных перекрытий. Металлические тонкостенные гофрированные конструкции являются высокотехнологичными и экономичными.

При создании тонкостенных строительных конструкций необходимо провести анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего в оболочке при заданных внешних нагрузках и условиях закрепления краев, выполнить оптимальное проектирование конструкций для достижения заданных свойств, а также исследовать вопросы потери устойчивости.

В [1–2] исследовано напряженно-деформированное состояние гофрированной оболочки для случая линейной теории оболочек. Целью данной работы является расчет напряженно-деформированного состояния гофрированной оболочки по нелинейной теории.

Материал и методы. Рассмотрим гофрированную цилиндрическую оболочку средней длины L, лежащую на упругом основании и находящуюся под действием нормального однородного внешнего давления. Ввиду сложности уравнений нелинейной теории тонких оболочек заменим гофрированную оболочку, лежащую на упругом основании, эквивалентной цилиндрической [3] с толщиной, обеспечивающей совпадение их изгибных жесткостей в радиальном направлении.

Будем использовать вариант нелинейной теории оболочек, основанный на гипотезе Кирхгофа–Лява. Уравнения типа Кармана [4] позволяют учитывать нелинейность деформаций и прогиба элемента оболочки. Воздействие упругого основания принимаем в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением w^* стенок оболочки, при этом рассмотрим модель Винклера. Уравнения элемента оболочки и совместности деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{D}{h}\nabla^4 w^* = L(w^*,\Phi^*) + \nabla_k^2\Phi^* + \frac{q^*}{h} + \frac{\alpha w^*}{h},\\ &\frac{1}{E}\nabla^4\Phi^* = -\frac{1}{2}L(w^*,w^*) - \nabla_k^2 w^*, \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^{*2}\partial y^{*2}} + \frac{\partial^4}{\partial y^{*4}}, \qquad \nabla_k^2 = k_y\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + k_x\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}},$$

$$L(w^*,w^*) = 2\left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} - \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^*\partial y^*}\right)^2\right],$$

$$L(w^*,\Phi^*) = \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^{*2}} - 2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^*\partial y^*}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^*\partial y^*},$$

$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость оболочки;

E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;

h, R – толщина и радиус оболочки, соответственно;

k_x, k_y – главные кривизны поверхности оболочки;

x^*, y^* – продольная и окружная координаты на поверхности оболочки;

w^*, Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжений;

q^* – внешнее давление;

α – коэффициент постели упругого основания.

Для круговой цилиндрической оболочки k_x=0, k_y=1/R и уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + 2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*2}\partial y^{*2}} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^{*4}}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^{*2}} - \\ &- \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^*\partial y^*}\cdot\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^*\partial y^*} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{q^*}{h} + \frac{\alpha w^*}{h}, \\ &\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4\Phi^*}{\partial x^{*4}} + 2\frac{\partial^4\Phi^*}{\partial x^{*2}\partial y^{*2}} + \frac{\partial^4\Phi^*}{\partial y^{*4}}\right) = -\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^*\partial y^*}\right)^2 - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Перейдем к безразмерному виду, используя следующие соотношения: $x=x^*/R$, $\varphi=y^*/R$, $\varepsilon^8 = h^2/\left[12R^2(1-\nu^2)\right]$ – малый параметр, $\Phi = \Phi^*/\left(ER^2\varepsilon^4\right)$, $w = w^*/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений,

$$q = q^* R^2\sqrt{12(1-\nu^2)}\,/(Eh^2),$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha R^3\sqrt{12(1-\nu^2)}\,/(Eh^2).$$

Безразмерные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \\ &- \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + q + \tilde{\alpha}w, \\ &\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \qquad (3)$$

На краях оболочки зададим условия жесткого закрепления

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ x = l, \qquad (4)$$

где $l=L/R$.

Введем новые переменные $\tilde{w}$, $\tilde{\Phi}$, связанные с перемещением w и функцией напряжений Φ соотношениями

$$w = \varepsilon^3\tilde{w}, \quad \Phi = \varepsilon^3\tilde{\Phi}. \qquad (5)$$

Функции $\tilde{w}$, $\tilde{\Phi}$ в свою очередь разложим в ряд по степеням ε

$$\tilde{w} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j} \tilde{w}_j, \quad \tilde{\Phi} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j} \tilde{\Phi}_j. \qquad (6)$$

При этом считаем, что $q = \varepsilon^3 \tilde{q}$, $\tilde{\alpha} \sim 1$, $\tilde{w}_i \sim 1$, $\tilde{\Phi}_i \sim 1$, а также соответствующие производные $\frac{\partial}{\partial x} \sim 1$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \sim \varepsilon^{-1}$, $i = \overline{1..n}$.

Подставим разложения (6) в систему уравнений (3) и граничные условия (4). Приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательности дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}_0}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x^2} + \tilde{q} + \tilde{\alpha}\tilde{w}_0, \quad \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}_0}{\partial \varphi^4} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \qquad (7)$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ l.$$

Краевая задача (3)–(4), полученная в первом приближении, имеет вид:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}_1}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial x^2} + \tilde{\alpha}\tilde{w}_1,$$

$$\frac{\partial^4 \tilde{\Phi}_1}{\partial \varphi^4} = -\frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x \partial \varphi}\right)^2 - \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x^2}, \qquad (8)$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ l.$$

Во втором приближении полученная краевая задача имеет вид:

$$2\frac{\partial^4 \tilde{w}_0}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_2}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial x^2} + \tilde{\alpha}\tilde{w}_2, \qquad (9)$$

$$2\frac{\partial^4 \tilde{\Phi}_0}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}_2}{\partial \varphi^4} = -\frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial x^2},$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ l.$$

Так как полученные в соответствующих приближениях системы уравнений с частными производными не удается решить аналитическими методами и получить решение в явном виде, то в качестве метода решения можно предложить численный метод сеток [5–6].

На плоскости $Ox\varphi$ построим семейство прямых $x=x_0+ih$, $\varphi=\varphi_0+jl$, образующих на плоскости прямоугольную сетку, где (x_0, y_0) – внутренняя точка рассматриваемой области D, h – шаг сетки вдоль оси x, а l – шаг сетки вдоль оси φ.

При этом с помощью уравнений, рассматриваемых в области D, и граничных условий на краях оболочки строятся соотношения, позволяющие приближенно вычислить значения точного решения $\tilde{w}(x_i, \varphi_j)$ в узлах (x_i, φ_j) сетки.

Конечно-разностные аппроксимации для частных производных первого и второго порядков функции двух переменных $\tilde{w}(x,\varphi)$ имеют следующий вид:

$$\tilde{w}'_x(x,\varphi) \approx \frac{\tilde{w}(x+h,\varphi) - \tilde{w}(x-h,\varphi)}{2h},$$

$$\tilde{w}'_\varphi(x,\varphi) \approx \frac{\tilde{w}(x,\varphi+l) - \tilde{w}(x,\varphi-l)}{2l},$$

$$\tilde{w}''_{xx}(x,\varphi) \approx \frac{\tilde{w}(x+h,\varphi) - 2\tilde{w}(x,\varphi) + \tilde{w}(x-h,\varphi)}{h^2},$$

$$\tilde{w}''_{\varphi\varphi}(x,\varphi) \approx \frac{\tilde{w}(x,\varphi+l) - 2\tilde{w}(x,\varphi) + \tilde{w}(x,\varphi-l)}{l^2}, \qquad (10)$$

$$\tilde{w}''_{x\varphi}(x,\varphi) \approx \frac{\tilde{w}(x+h,\varphi+l) - \tilde{w}(x-h,\varphi+l) - \tilde{w}(x+h,\varphi-l) + \tilde{w}(x-h,\varphi-l)}{4hl}.$$

Аналогично записываются соотношения для частных производных третьего, четвертого порядка для функции $\tilde{w}(x,\varphi)$, а также функции $\tilde{\Phi}(x,\varphi)$.

В каждом узле (x_i, φ_j)=(x_0+ih, φ_0+jl), $i = \overline{1..n}$, $j = \overline{1..m}$, частные производные, входящие в каждое из уравнений системы (7), заменяются центральными разностными производными (10). В результате этого решение уравнения с частными производными сводится к решению системы $(n+1)\cdot(m+1)$ алгебраических уравнений относительно значений $\tilde{w}(x_i, \varphi_j) = \tilde{w}(x_0 + ih, \varphi_0 + jl)$ в узлах рассматриваемой сетки.

Построенные первое и второе приближения позволяют с учетом нелинейных слагаемых провести уточнение найденных из нулевого приближения значений для нормального прогиба $\tilde{w}(x_i, \varphi_j)$.

Заключение. Выполненная работа позволяет выполнять расчет напряженно-деформированного состояния гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, под действием неоднородного давления при таких ее геометрических параметрах, при которых линейная теория становится неприменимой и дает завышенные значения прогиба оболочки. Уравнения, полученные в первом и втором приближениях, учитывают нелинейность поставленной задачи и способствуют уточнению получаемых значений прогиба w^*.

Приведенный алгоритм численного решения задачи позволяет проводить расчеты для гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, при различных ее геометрических и физических параметрах, а также условиях нагружения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Никонова, Т.В. О бифуркации тонкой гофрированной оболочки с упругим заполнителем под действием неоднородного гидростатического давления / Т.В. Никонова, С.П. Кунцевич, Г.И. Михасев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 3. – С. 48–51.
2. Кунцевич, С.П. О влиянии коэффициента постели и длины волны гофра на бифуркацию тонкой гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, под действием гидростатического давления / С.П. Кунцевич, Т.В. Никонова, Г.И. Михасев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 3. – С. 57–60.
3. Фрезе, М.В. Взаимодействие металлических гофрированных конструкций с грунтовой средой: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.02 / М.В. Фрезе. – СПб., 2006. – 162 л.
4. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости) / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; под общ. ред. Н.И. Тихонова. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2002. – 630 с.
6. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Поступила в редакцию 26.06.2013. Принята в печать 21.10.2013
Адрес для корреспонденции: e-mail: st.rubon@mail.ru – Никонова Т.В.