

Today, electrical engineers work on a wide range of projects, from designing power distribution systems to developing renewable energy sources. The field continues to evolve with new innovations in areas like robotics, artificial intelligence, and the Internet of Things.

In conclusion, the history of electrical engineering is a story of innovation, discovery, and progress. From the ancient Greeks to the modern digital age, electrical engineering has played a crucial role in shaping the world we live in today.

Список использованной литературы:

1. Hambley, A. R. Electrical Engineering: Principles and Applications. New York: Pearson, 2014.
2. Brumbaugh, R. S. Electricity and Magnetism in Ancient Greece. Cambridge University Press, 1999.
3. Isaacson, W. Benjamin Franklin: An American Life. Simon & Schuster, 2003.
4. James, F. A. J. L. Michael Faraday: A Very Short Introduction. Oxford University Press, 2010.
5. Josephson, M. Edison: A Biography. McGraw-Hill, 1959.
6. Edison, T. A. The History of the Light Bulb. HarperCollins, 2018.
7. Hoddeson, L., Daitch, V. Transistor Revolution: The Impact of Electronic Devices. University of Chicago Press, 2009.

© Антомонов В. А., 2024

УДК 519.65

Рубаник О.Е.

старший преподаватель кафедры МиИТ УО «ВГТУ»,

Никонова Т.В.

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры МиИТ УО «ВГТУ»,

г. Витебск, РБ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПЛОЩАДИ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация

Статья посвящена проблематике нахождения площади замкнутой плоской области. Рассмотрены следующие численные методы нахождения площади: метод средних, левых и правых прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Приведен пример приближенного вычисления области по каждому из указанных методов, найдена относительная погрешность вычисления и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова

площадь криволинейной трапеции, численные методы, метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона, относительная погрешность вычисления.

Для нахождения площади замкнутой плоской области могут быть использованы известные формулы, содержащие определенный интеграл. Эти формулы зависят от вида параметризации кривых, ограничивающих эту область. Но далее встает вопрос о вычислении определенного интеграла. Если для подынтегральной функции существует первообразная, то для подсчета величины определенного интеграла можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница. Указанный метод может оказаться непригодным, если не удастся найти формулу для первообразной, то есть когда речь идет о «неберущемся» интеграле.

Таким образом, если ответ не удастся получить методом точного решения, то придется применять так называемые методы численного, то есть приближенного решения.

Рассмотрим случай нахождения площади замкнутой области D , представляющей собой криволинейную трапецию, сверху ограниченную графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ox , слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно (рис. 1).

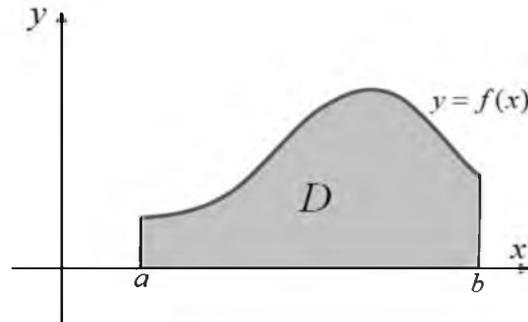


Рисунок 1 – Вид замкнутой области

1. Метод прямоугольников

Рассмотрим на отрезке $[a;b]$ сетку: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Возьмём от каждого отрезка по одной точке – представителю $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим $f(\xi_i)$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В данном случае на каждом из частных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ дуга кривой $y = f(x)$ аппроксимируется отрезком, параллельным оси Ox . Тогда площадь S_D указанной замкнутой области будет приблизительно равна площади S_N заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 2).

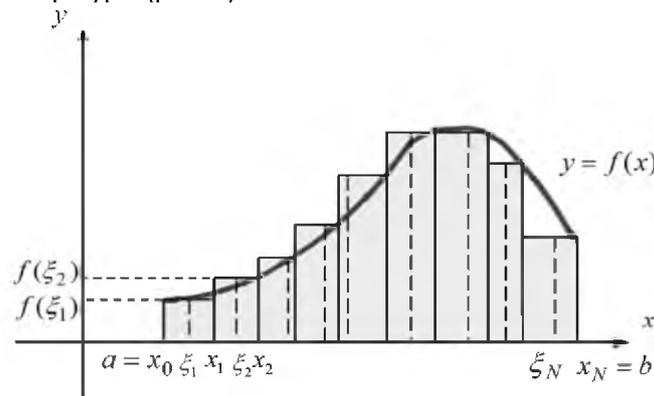


Рисунок 2 – Вид ступенчатой фигуры

Имеем:

$$S_D \approx S_N = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad (1)$$

причем точность приближения будет возрастать, если $\max \Delta x_i$ будет уменьшаться.

Если разбить промежуток $[a;b]$ на N частей равной длины:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_N = (b - a)/N = h,$$

то получим формулу:

$$S_D \approx \frac{b - a}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i). \quad (2)$$

В качестве точки ξ_i можно взять, например, середину отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, тогда получим формулу для нахождения площади по методу средних прямоугольников:

$$S_D \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right); \quad (3)$$

его левый конец – получим формулу левых прямоугольников:

$$S_D \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_{i-1}); \quad (4)$$

его правый конец – получим формулу правых прямоугольников:

$$S_D \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (5)$$

2. Формула трапеций

В формуле трапеций площадь рассмотренной замкнутой области D приближается площадью многоугольника, составленного из N трапеций, при этом кривая $y = f(x)$ аппроксимируется вписанной в неё ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные точки (рис. 3).

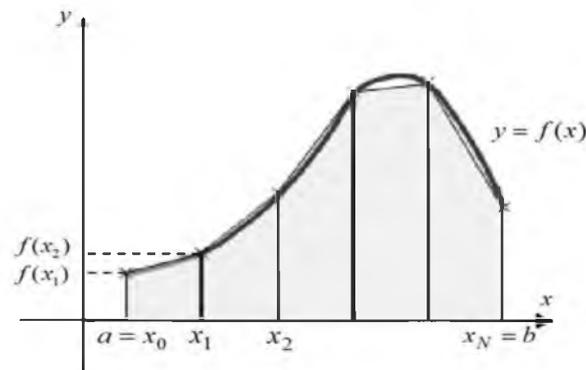


Рисунок 3 – Разбиение области для метода трапеций

Принимая во внимание известную формулу для нахождения площади трапеции и проведя необходимые преобразования, получим формулу для приближенного вычисления площади криволинейной трапеции:

$$S_D \approx \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{N-1}) \right). \quad (6)$$

3. Формула Симпсона

В методе Симпсона промежуток $[a; b]$ разбивается на четное число $N=2n$ равных промежутков длины h и на каждом частичном отрезке $[x_0; x_2]$, $[x_2; x_4]$, $[x_4; x_6]$, ..., $[x_{2n-2}; x_{2n}]$ функция $y = f(x)$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки: $\{x_0, x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}\}$ (рис. 4).

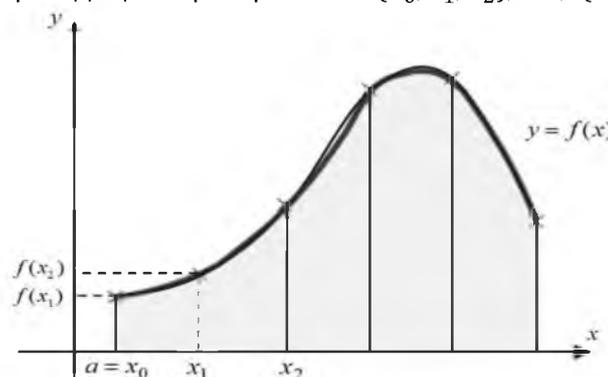


Рисунок 4 – Разбиение области для метода Симпсона

Тогда площадь замкнутой области приближенно равна сумме площадей плоских фигур, сверху ограниченных аппроксимируемой параболой.

Получим формулу:

$$S_D \approx \frac{h}{3} \left[\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2)) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}) \right) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим применение указанных выше методов нахождения площади замкнутой плоской области на примере. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^{-x^2}$, прямыми $x=0$, $x=3$ и осью Ox ; оценим относительную погрешность вычисления по каждому методу.

Точное значение: $S_D = \int_0^3 e^{-x^2} dx$.

Поскольку первообразная для подынтегральной функции не может быть найдена, то есть мы имеем дело с «неберущимся» интегралом, то для нахождения последнего определенного интеграла воспользуемся СКА Maple.

Получим: $\int_0^3 e^{-x^2} dx = 0,8865$, и примем данное значение как точное.

Найдем приближенное значение, разбив промежуток интегрирования на 10 частей. В данном случае: $f(x) = e^{-x^2}$, $N = 10$, $a = 0$, $b = 3$, $h = \frac{3-0}{10} = 0,3$. Для промежуточных вычислений воспользуемся ТП Excel.

Таблица 1

Промежуточные вычисления

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3
$\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$		0,15	0,45	0,75	1,05	1,35	1,65	1,95	2,25	2,55	2,85
$e^{-\frac{x_{i-1} + x_i}{2}}$		0,97775	0,81669	0,56978	0,33204	0,16162	0,06571	0,02231	0,00633	0,0015	0,0003
$e^{-x_i^2}$	1	0,91393	0,69768	0,44486	0,23693	0,1054	0,03916	0,01216	0,00315	0,00068	0,00012

Источник: разработано автором

а) По формуле средних прямоугольников:

$$S_D \approx \frac{3-0}{10} \sum_{i=1}^{10} e^{-\frac{x_{i-1} + x_i}{2}}.$$

Получим $S_D \approx 0,8862$, относительная погрешность равна 0,034 %.

б) По формуле левых прямоугольников

$$S_D \approx \frac{3-0}{10} \sum_{i=1}^{10} e^{-x_{i-1}^2}.$$

Получим $S_D \approx 1,0362$, относительная погрешность равна 16,88 %.

в) По формуле правых прямоугольников

$$S_D \approx \frac{3-0}{10} \sum_{i=1}^{10} e^{-x_i^2}.$$

Получим $S_D \approx 0,7362$, относительная погрешность вычисления равна 16,95 %.

г) По формуле трапеций:

$$S \approx \frac{3-0}{10} \left(\frac{e^{-x_0^2} + e^{-x_{10}^2}}{2} + e^{-x_1^2} + e^{-x_2^2} + \dots + e^{-x_9^2} \right).$$

Получим $S_D \approx 0,8862$, относительная погрешность вычисления равна 0,034 %.

в) По формуле Симпсона:

$$S \approx \frac{0,3}{3} [(e^{-x_0^2} + e^{-x_{10}^2}) + 2(e^{-x_2^2} + e^{-x_4^2} + e^{-x_6^2} + e^{-x_8^2}) + 4(e^{-x_1^2} + e^{-x_3^2} + e^{-x_5^2} + e^{-x_7^2} + e^{-x_9^2})]$$

Получим $S_D \approx 0,8862$, относительная погрешность вычисления равна 0,033 %.

Для анализа полученных данных приближенного вычисления площади замкнутой плоской области, фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^{-x^2}$, прямыми $x=0$, $x=3$ и осью Ox различными методами составим таблицу.

Таблица 2

Сравнительный анализ результатов

Количество отрезков разбиения N	Погрешность вычисления по методу				
	средних прямоугольников	левых прямоугольников	правых прямоугольников	трапеций	Симпсона
10	0,034%	16,88%	16,95%	0,034%	0,033%

Источник: разработано автором

Таким образом, наименьшая погрешность вычисления была получена при использовании метода Симпсона, а наибольшая – по методу левых и правых прямоугольников. Необходимо отметить, что понизить погрешность вычисления для каждого из рассмотренных методов можно путем увеличения точек разбиения. Более того, можно найти приближенное значение площади для указанной заранее относительной погрешности, просчитав необходимое для этого количество точек разбиения отрезка.

Список использованной литературы:

1. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 248 с.
2. Зенков А.В. Численные методы: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 124 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 432 с.

© Рубаник О.Е., Никонова Т.В., 2024