**УДК 537.8; 517.951**

# РАЗВИТИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

***канд. физ.-мат. наук, доц. И.Е. АНДРУШКЕВИЧ,***
***В.А. ЖИЗНЕВСКИЙ***
***(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)***

*Найдены и обоснованы правила, позволяющие снять переопределенность систем обыкновенных дифференциальных уравнений при использовании обобщенного метода Фурье для поиска аналитических решений широкого спектра задач прикладной физики.*

Обобщенный метод Фурье (ОМФ) [1], развиваемый авторами и исходящий из классического метода Фурье разделения переменных, представляется многообещающим для расширения круга аналитически решаемых задач прикладной физики (электродинамика, акустика, явления переноса и т.д.).

Напомним, что рассматривается уравнение вида:

$$L\Psi(x,y)=U(x,y), \tag{1}$$

где $\Psi(x,y)$ – искомая функция; $U(x,y)$ – неоднородность; $L$ – дифференциальный оператор.

При допущениях

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{t}\Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y), \tag{2}$$

$$\Psi(x,y)=\sum_{k=1}^{S}X_k(x)\,Y_k(y) \tag{3}$$

и предположении о разделимости оператора $L$:

$$L\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{l}L_{i\,x}(X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_S(x))L_{i\,y}(Y_1(y),\ Y_2(y),\ \ldots,Y_S(y)) \tag{4}$$

уравнение (1) приобретает вид билинейного функционального:

$$\sum_{\zeta=1}^{N}f_\zeta(x)\,g_\zeta(y)=0. \tag{5}$$

Заметим, что оператор (4) в общем случае является нелинейным. Однако во многих случаях, важных с точки зрения решения прикладных задач, в операторах вида (4) нетрудно выделить линейную часть:

$$\begin{gathered}L\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{S}\tilde{L}_{i\,x}(X_k(x))\tilde{L}_{i\,y}(Y_k(y))+\\+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tilde{L}}_{j\,x}(X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_S(x))\tilde{\tilde{L}}_{j\,y}(Y_1(y),\ Y_2(y),\ \ldots,Y_S(y)).\end{gathered} \tag{6}$$

Соотношение (6) означает, что из $l$ пар операторов $L_{i\,x}, L_{i\,y}$ точно $m$ пар $\left(\tilde{L}_{i\,x},\tilde{L}_{i\,y}\right)$ являются линейными, а остальные $n$ пар $\left(\tilde{\tilde{L}}_{j\,x},\tilde{\tilde{L}}_{j\,y},\ j=\overline{1,n}\ ,\ n+m=l\right)$ в общем случае нелинейны.

Представляя (5) в матричном виде, получаем

$$\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\times\mathbf{g}=0. \tag{7}$$

При этом

$$N=m\times S+n+t\ , \tag{8}$$

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\widetilde{L}_{1x}\left(X_{\eta\,1}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{1x}\left(X_{\eta\,S}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{m\,x}\left(X_{\eta\,1}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{m\,x}\left(X_{\eta\,S}\right)\\ \widetilde{\widetilde{L}}_{1x}\left(X_{\eta\,1},\,X_{\eta\,2},\,\dots,X_{\eta\,S}\right)\\ \dots\\ \widetilde{\widetilde{L}}_{n\,x}\left(X_{\eta\,1},\,X_{\eta\,2},\,\dots,X_{\eta\,S}\right)\\ -\Phi_1\\ \dots\\ -\Phi_t\end{pmatrix};\ \mathbf{g}=\begin{pmatrix}\widetilde{L}_{1y}\left(Y_{\eta\,1}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{1y}\left(Y_{\eta\,S}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{m\,y}\left(Y_{\eta\,1}\right)\\ \dots\\ \widetilde{L}_{m\,y}\left(Y_{\eta\,S}\right)\\ \widetilde{\widetilde{L}}_{1y}\left(Y_{\eta\,1},\,Y_{\eta\,2},\,\dots,Y_{\eta\,S}\right)\\ \dots\\ \widetilde{\widetilde{L}}_{n\,y}\left(Y_{\eta\,1},\,Y_{\eta\,2},\,\dots,Y_{\eta\,S}\right)\\ \mathrm{T}_1\\ \dots\\ \mathrm{T}_t\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$\mathbf{f}^{\mathbf{T}}$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{f}$.

В [1] установлено, что для нахождения решений уравнения (5) необходимо и достаточно решить $\sum_{r=0}^{N} C_N^r = 2^N$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0,\ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\left[i^r\right]\mathbf{g}=0\,. \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка $N$; $r=\overline{1,N}$, $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ – матрица размерности $N\times N$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\left[i^r\right]$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathrm{a}_{i\,j}=\begin{cases}1, i=j\in\left\{i^r\right\},\\ 0, i\in\left\{i^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}, i\neq j,\\ \alpha_{i\,j}\,,\ i\in\left\{j^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\},\\ 0,\ j\in\left\{j^r\right\},\end{cases} \tag{11}$$

где $\alpha_{i\,j}$ – произвольные числовые коэффициенты; $\left\{i^r\right\}, \left\{j^r\right\}$ – упорядоченные целочисленные множества, такие, что

$$\left\{i^r\right\}=\left\{i_1\,,\,\dots,\,i_r\right\};\left\{j^r\right\}=\left\{j_1\,,\,\dots,\,j_{N-r}\right\};\,r=\overline{1\,,N}\,;\left\{i^0\right\}=\varnothing\,;\left\{j^0\right\}=\left\{1,2,\dots,N\right\}, \tag{12}$$

$$1\le i_1\langle i_2\langle\dots\langle i_r\le N;\,1\le j_1\langle j_2\langle\dots\langle j_{N-r}\le N;\ \left\{i^r\right\}\cup\left\{j^r\right\}=\left\{1,2,\dots,N\right\};\ \left\{i^r\right\}\cap\left\{j^r\right\}=\varnothing. \tag{13}$$

Ввиду [1], решение систем (10) может быть представлено как

$$\mathbf{f}=\mathbf{A}\left[i^r\right]_{i_1,\dots,i_r}\begin{pmatrix}F_1(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ F_r(x)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{g}=\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}'\left[i^r\right]\right)_{j_1,\dots,j_{N-r}}\begin{pmatrix}G_1(y)\\ \cdot\\ \cdot\\ G_{N-r}(y)\end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]_{k_1,\dots,k_s}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\left[i^r\right]_{k_1,\dots,k_s}$ – матрицы, образованные столбцами $k_1,\dots,k_s$ матриц $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\left[i^r\right]$ соответственно; $F_1(x),\dots,F_r(x)$ – произвольная линейно независимая система функций, а $G_1(y),\dots,G_{N-r}(y)$ – произвольная система функций.

Таким образом, любое решение уравнения (5) можно представить в виде (14) при соответствующем выборе матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ и системы функций $F_1(x),\dots,F_r(x)$, $G_1(y),\dots,G_{N-r}(y)$ с указанными свойствами, и наоборот, всякая система функций, имеющая вид (14), является решением уравнения (5). Для нахождения всех решений уравнения (5) необходимо решать $2^N$ систем переопределенных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом возникает следующая сложность: в каждой системе имеется

$(N-r)\times r$ постоянных разделения $\alpha_{j\,i}$, подлежащих дополнительному определению. В итоге полученные в [1] результаты оказываются малопригодными к практическому применению из-за своей громоздкости и сложности.

Заметим, что эти недостатки ОМФ были значительно устранены в [2], где установлено, что ***различные матрицы*** $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ ***для одного и того же*** $\mathbf{r}$ ***подобны.***

Данный факт исключает необходимость рассмотрения всей совокупности из $2^N$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет ограничиться решением не более чем $(N-2)$ систем вида (10). Дальнейшим приближением к практическому использованию, алгоритмизации, а следовательно и реализации ОМФ на ЭВМ, стало уменьшение количества решаемых систем ОДУ до числа $N-2S$, обоснованном в [3].

Остается открытым вопрос о значениях параметров $\alpha$ из (11). Наличие в каждой системе (10) такого большого количества неопределенных параметров разделения делает их переопределенными. В итоге при решении конкретных задач приходится прибегать к искусственным, строго говоря, ничем не обоснованным приемам снятия переопределенности, как, например, «удачное» зануление целого ряда параметров [4 – 6]. Корректно поставленные задачи методов математической физики, решаемые с помощью ОМФ, дают основание предположить о наличии определенных закономерностей и взаимосвязи между конкретными значениями параметров $\alpha$ из (11), позволяющие снять переопределенность рассматриваемых систем ОДУ.

Для пояснения этой гипотезы вначале рассмотрим простейший случай.

Пусть (5) имеет вид:

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 + f_4 g_4 = 0, \ (N = 4, \ N - \text{четное}). \tag{15}$$

Выберем $r = 2$. В качестве матрицы $\mathbf{A}$ выберем

$$\mathbf{A}\left[i^2\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Система (14) для функций $\mathbf{f}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f_3 &= \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2, \\ f_4 &= \alpha_{41} f_1 + \alpha_{42} f_2. \end{aligned} \tag{17}$$

В соответствии с требованием, что функции $f_1$ и $f_2$ линейно независимы. Ввиду (17) из (15) получаем:

$$f_1\left(g_1 + \alpha_{31} g_3 + \alpha_{41} g_4\right) + f_2\left(g_2 + \alpha_{32} g_3 + \alpha_{42} g_4\right) = 0. \tag{18}$$

Исключая из рассмотрения частный случай

$$\alpha_{41} = 0, \ \alpha_{32} = 0, \tag{19}$$

выражение (18) представим в виде:

$$\frac{f_1}{\alpha_{32}}\left(\alpha_{32}\, g_1 + \alpha_{32}\, \alpha_{31} g_3 + \alpha_{32}\, \alpha_{41} g_4\right) + \frac{f_2}{\alpha_{41}}\left(\alpha_{41} g_2 + \alpha_{32}\alpha_{41}\, g_3 + \alpha_{41}\alpha_{42} g_4\right) = 0. \tag{20}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} F_1 = \frac{f_1}{\alpha_{32}}; F_2 = \frac{f_2}{\alpha_{41}}; F_3 = f_3; F_4 = f_4, \\ G_1 = \alpha_{31} g_1; G_2 = \alpha_{41} g_2; G_3 = g_3; G_4 = g_4. \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \beta_{31} &= \alpha_{32}\, \alpha_{31}; \ \beta_{32} = \alpha_{32}\, \alpha_{41}; \\ \beta_{41} &= \alpha_{32}\, \alpha_{41}; \ \beta_{42} = \alpha_{41}\, \alpha_{42}. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда равенства (17), (20) имеют вид:

$$\begin{aligned} F_3 &= \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2, \\ F_4 &= \beta_{41} F_1 + \beta_{42} F_2, \end{aligned} \tag{23}$$

$$F_1\left(G_1 + \beta_{31} G_3 + \beta_{41} G_4\right) + F_2\left(G_2 + \beta_{32} G_3 + \beta_{42} G_4\right) = 0. \tag{24}$$

С учетом линейной независимости $f_1$ и $f_2$, ввиду (21), из (24) получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= -\beta_{31}G_3 - \beta_{41}G_4, \\ G_2 &= -\beta_{32}G_3 - \beta_{42}G_4. \end{aligned} \tag{25}$$

Равенства (23), (25) представляют систему (14), в которой функции $f, g$ заменяются функциями $F, G$, определенными в (21), а (16) заменяется матрицей:

$$\mathbf{B}\left[i^2\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{32}\alpha_{31} & \alpha_{32}\alpha_{41} & 0 & 0 \\ \alpha_{32}\alpha_{41} & \alpha_{41}\alpha_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Кроме того, заметим, что в (26) $\beta_{32} \equiv \beta_{41}$.

В соответствии с полученными результатами, функции (23) и (25) являются решением билинейного функционального уравнения:

$$F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3 + F_4G_4 = 0. \tag{27}$$

Очевидно, что (15) и (27) представляют одно и то же уравнение.

Таким образом, можно предположить, что блок коэффициентов $\alpha_{ij}$ в матрице (11) может быть приведен к диагональному виду.

Докажем справедливость трех утверждений.

**Утверждение 1**

*Если $N-$ четное, $r = N/2$, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, определенных (11), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее блок неопределенных коэффициентов $\alpha_{ij}$ к диагональному виду.*

***Доказательство:*** Пусть $N-$четное; $r = N/2$. Тогда (11) – (13) приобретают вид:

$$\mathrm{a}_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \left\{i^{N/2}\right\}, \\ 0, i \in \left\{i^{N/2}\right\}, j \in \left\{i^{N/2}\right\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, i \in \left\{j^{N/2}\right\}, j \in \left\{i^{N/2}\right\}, \\ 0, j \in \left\{j^{N/2}\right\}, \end{cases} \tag{28}$$

$$\left\{i^{N/2}\right\} = \left\{i_1, \ldots, i_{N/2}\right\}, \left\{j^{N/2}\right\} = \left\{j_1, \ldots, j_{N/2}\right\}, \tag{29}$$

$$1 \le i_1 \langle i_2 \langle .. \langle i_{N/2} \le N; 1 \le j_1 \langle j_2 \langle .. \langle j_{N/2} \le N; \left\{i^{N/2}\right\} \cup \left\{j^{N/2}\right\} = \{1, 2, \ldots, N\}; \left\{i^{N/2}\right\} \cap \left\{j^{N/2}\right\} = \varnothing. \tag{30}$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{\Pi}$, элементы которой определены соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{i_l, j_k} = 0, \Pi_{i_l, i_m} = \delta_{lm}, \Pi_{j_n, j_k} = \delta_{nk}, \\ \Pi_{j_n, i_n} = \alpha_{j_n, i_n} - \beta_{j_n, i_n}, \\ \Pi_{j_n, i_m} = \alpha_{j_n, i_m}, n \neq m, \\ l, m = \overline{1, N/2}; \quad k, n = \overline{1, N/2}. \end{aligned}\right\}, \tag{31}$$

где $\beta_{ij}$ – произвольные числовые коэффициенты. Очевидно, что $\det \mathbf{\Pi} = 1$, и обратная ей матрица $\mathbf{\Pi^{-1}} = \mathbf{Q}$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} q_{i_l, j} = \delta_{i_l, j}, j = \overline{1, N}, \\ q_{j_n, i_n} = \beta_{j_n, i_n} - \alpha_{j_n, i_n}, \\ q_{j_n, i_l} = -\alpha_{j_n, i_l}, n \neq l, q_{j_n, j_k} = \delta_{nk}, \\ l = \overline{1, N/2}; \; n, k = \overline{1, N/2}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Осуществляя преобразование матрицы $\mathbf{A}[i^{N/2}]$ вида $\mathbf{\Pi^{-1}A\Pi = B}$, для $\mathbf{B}$ получаем

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, i \in \{i^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, i \neq j, \\ \beta_{i_k, j_n} \delta_{kn}, \ i \in \{j^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, j \in \{j^{N/2}\}, \end{cases} \tag{33}$$

Утверждение 1 доказано.

**Утверждение 2.**

*Если* $r \langle N/2$, *то для матриц* $\mathbf{A}[i^r]$, *определенных (11), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее квадратный блок* $r \times r$ *неопределенных коэффициентов* $\alpha_{ij}$ *к диагональному виду.*

***Доказательство:*** Пусть $r \langle N/2$. Тогда (11) – (13) приобретают вид:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, \ i \in \{j^r\}, j \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}, \end{cases} \tag{34}$$

$$\left. \begin{array}{c} 1 \le i_1 \langle i_2 \langle .. \langle i_r \le N; 1 \le j_1 \langle j_2 \langle .. \langle j_r \langle j_{r+1} \langle .. \langle j_{N-r} \le N, \\ \{i^r\} = \{i_1, \ldots, i_r\}, \{j^r\} = \{j_1, \ldots, j_r, j_{r+1}, \ldots j_{N-r}\}, \\ \{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1, 2, \ldots, N\}, \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing. \end{array} \right\} \tag{35}$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{\Pi}$, элементы которой определяются соотношениями:

$$\left. \begin{array}{c} \Pi_{i_l, j_k} = 0, \Pi_{i_l, i_m} = \delta_{lm}, \Pi_{j_n, j_k} = \delta_{nk}, \\ \Pi_{j_m, i_m} = \alpha_{j_m, i_m} - \beta_{j_m, i_m}, \\ \Pi_{j_l, i_m} = \alpha_{j_l, i_m}, l \neq m, \\ \Pi_{j_q, i_m} = \alpha_{j_q, i_m} - \beta_{j_q, i_m}, \ r+1 \le q \le N-r, \\ l, m = \overline{1, r}; k, n = \overline{1, N-r}. \end{array} \right\} \tag{36}$$

где $\beta$ – произвольные числовые коэффициенты. Очевидно, что $\det \mathbf{\Pi} = 1$ и обратная ей матрица $\mathbf{\Pi^{-1} = Q}$ имеет вид:

$$\left. \begin{array}{c} Q_{i_l, j_k} = Q, \ \Pi_{i_l, i_m} = \delta_{lm}, Q_{j_n, j_k} = \delta_{nk}, \\ Q_{j_m, i_m} = \beta_{j_m, i_m} - \alpha_{j_m, i_m}, \\ Q_{j_l, i_m} = -\alpha_{j_l, i_m}, \ l \neq m, \\ Q_{j_q, i_m} = \beta_{j_q, i_m} - \alpha_{j_q, i_m}, \ r+1 \le q \le N-r, \\ l, m = \overline{1, r}; \ k, n = \overline{1, N-r}. \end{array} \right\} \tag{37}$$

Осуществляя преобразование матрицы (34) – (35) вида $\mathbf{\Pi^{-1}A\Pi = B}$, для $\mathbf{B}$ получаем

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, 1 \le n, k \le r, \ i_n \in \{j^r\}, \ j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, n \rangle r, i_n \in \{j^r\}, \ j_k \in \{i^r\}, \\ 0, \ j \in \{j^r\}. \end{cases} \tag{38}$$

Утверждение 2 доказано.

**Утверждение 3**

*Если* $r \rangle N/2$, *то для матриц* $\mathbf{A}[i^r]$, *определенных (11), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее квадратный блок* $(N-r)\times(N-r)$ *неопределенных коэффициентов* $\alpha_{ij}$ *к диагональному виду.*

***Доказательство:***

Пусть $r \rangle N/2$. Тогда (11) – (13) приобретают вид:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, \ i \in \{j^r\}, j \in \{i^r\}, \\ 0, \ j \in \{j^r\}, \end{cases} \tag{39}$$

$$\left. \begin{array}{c} 1 \le i_1 \langle i_2 \langle .. \langle i_{N-r} .. \langle i_r \le N; \ 1 \le j_1 \langle j_2 \langle .. \langle j_{N-r} \le N, \\ \{i^r\} = \{i_1, \dots, i_{N-r}, \dots, i_r\}, \ \{j^r\} = \{j_1, \dots j_{N-r}\}, \\ \{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1,2,\dots,N\}, \ \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing. \end{array} \right\} \tag{40}$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{\Pi}$, элементы которой определяются соотношениями:

$$\left. \begin{array}{c} \Pi_{i_l, j_k} = 0, \ \Pi_{i_l, i_m} = \delta_{lm}, \ \Pi_{j_n j_k} = \delta_{nk}, \\ \Pi_{j_q, i_q} = \alpha_{j_q, i_q} - \beta_{j_q, i_q}, \ 1 \le q \le N-r, \\ \Pi_{j_k, i_n} = \alpha_{j_k, i_n}, \ k \neq n, \\ \Pi_{j_k, i_h} = \alpha_{j_k, i_h} - \beta_{j_k, i_h}, \ N-r+1 \le h \le r, \\ l, m = \overline{1, r}; \ k, n = \overline{1, N-r}. \end{array} \right\} \tag{41}$$

Очевидно, что $\det \mathbf{\Pi} = 1$, и обратная ей матрица $\mathbf{\Pi^{-1}} = \mathbf{Q}$ имеет вид

$$\left. \begin{array}{c} Q_{i_l, j_k} = 0, \ Q_{i_l, i_m} = \delta_{lm}, \ Q_{j_n, j_k} = \delta_{nk}, \\ Q_{j_q, i_q} = \beta_{j_q, i_q} - \alpha_{j_q, i_q}, \ 1 \le q \le N-r, \\ Q_{j_k, i_n} = -\alpha_{j_k, i_n}, \ k \neq n, \\ Q_{j_k, i_h} = \beta_{j_k, i_h} - \alpha_{j_k, i_h}, \ N-r+1 \le h \le r, \\ l, m = \overline{1, r}; \ k, n = \overline{1, N-r}. \end{array} \right\} \tag{42}$$

Осуществляя преобразование матрицы (39) – (40) $\mathbf{\Pi^{-1} A \Pi} = \mathbf{B}$, для $\mathbf{B}$ получаем

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \in \{i^r\}, \\ 0, \ i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, \ 1 \le n, k \le N-r, \ i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, \ k \rangle N-r, \ i_n \in \{j^r\}, \ j_k \in \{i^r\}, \\ 0, \ j \in \{j^r\}. \end{cases} \tag{43}$$

Утверждение 3 доказано.

Учитывая в совокупности утверждения 1 – 3, теорему из [3, с. 34] можно сформулировать следующим образом:

*Для построения общего решения уравнения (1) – (5) достаточно получить решения* $N-2S$ *систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:*

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f} = 0, \mathbf{A^T}\left[i^r\right]\mathbf{g} = 0, \tag{44}$$

*где* $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ *– матрица размерности* $N \times N$, *элементы которой определяются следующими соотношениями:*

$$\boldsymbol{\beta}_{ij} = \sum_{i' \in \{i^r\}} \delta_{ii'} \delta_{i'j} + \sum_{i'_m \in \{i^r\}} \sum_{j'_n \in \{j^r\}} \beta_{ij} \delta_{ij'_n} \delta_{i'_m j} \delta_{mn} + \sum_{i' \in \{i^r\}'} \sum_{j' \in \{j^r\}'} \beta_{ij} \delta_{ij'} \delta_{i'j} \tag{45}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} \tag{46}$$

***$\beta_{ij}$ – произвольные числовые коэффициенты; $\{i^r\}, \{j^r\}$ – для каждого $r = \overline{S, N-S}$ одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств, таких, что***

$$\{i^r\} = \{i_1,..,i_r\}; \{j^r\} = \{j_1,..,j_{N-r}\}; \{i^0\} = \varnothing; \{j^0\} = \{1,2,..,N\}; \tag{47}$$

$$1 \le i_1 \langle i_2 \langle .. \langle i_r \le N; 1 \le j_1 \langle j_2 \langle .. \langle j_{N-r} \le N; \{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1,2,\dots,N\}; \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing, \tag{48}$$

$$\zeta = \min(r, N-r); \tag{49}$$

$$\{i^r\}' = \begin{cases} \{i^r\}, \zeta = r; \\ \{i_{N-r+1}, i_{N-r+2}, \dots, i_r\}, \zeta = N-r; \end{cases} \tag{50}$$

$$\{j^r\}' = \begin{cases} \{j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_{N-r}\}, \zeta = r; \\ \{j^r\}, \zeta = N-r. \end{cases} \tag{51}$$

Для иллюстрации эффективности использования сформулированной теоремы воспользуемся примером, приведенным в [1, с. 198].

Пусть в области $0 \le x \le l, y \ge 0$ необходимо построить решение дифференциального уравнения:

$$\frac{q_1+q_2}{q_3}\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2} + \frac{q_2}{q_3}\left(2q_4\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x \partial y} + q_4{}^2\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}\right) - q_5\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2} = 0, \tag{52}$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$\Psi(x,0) = f_1(x), \ \Psi_y(x,0) = f_2(x), \tag{53}$$

$$\Psi(0,y) = 0, \ \Psi(l,y) = 0 \tag{54}$$

соответственно.

В (52) $q_i$ – физические параметры задачи.

Очевидно, в поставленной задаче классическая схема метода Фурье не проходит. Воспользуемся ОМФ – 2. Частные решения уравнения (83) будем искать в виде:

$$\Psi(x,y) = X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y). \tag{55}$$

Ввиду (55), из (52) имеем:

$$X_1Y_1'' + X_2Y_2'' + q_6X_1'Y_1' + q_6X_2'Y_2' + q_7X_1''Y_1 + q_7X_2''Y_2 = 0, \tag{56}$$

где

$$q_6 = \frac{2q_2q_4}{q_1+q_2}, \ q_7 = \frac{q_2q_4{}^2 - q_3q_5}{q_1+q_2}. \tag{57}$$

Аналогично (9), для $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ получаем

$$\mathbf{f}^{\mathbf{T}} = \left(X_1, X_2, q_6X_1', q_6X_2', q_7X_1'', q_7X_2''\right), \tag{58}$$

$$\mathbf{g}^{\mathbf{T}} = \left(Y_1'', Y_2'', Y_1', Y_2', Y_1, Y_2\right). \tag{59}$$

Таким образом, уравнение (52) преобразовано в билинейное функциональное уравнение вида (5), где $N = 6$, $S = 2$. Если следовать предписаниям теории [1], для нахождения решений уравнения (56) необходимо строить матрицы $\mathbf{A}[i^r]$ для 64 пар множеств $\{i^r\}, \{j^r\}$, и, соответственно, для каждой матрицы решать системы ОДУ вида (10).

В целях сокращения записей мы приведем лишь по одной матрице $\mathbf{A}\lfloor i^r \rfloor$ для каждого $r$:

$$r=0,\quad \mathbf{A}[\varnothing]=\begin{Vmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{Vmatrix}; \tag{60}$$

$$r=1,\quad \mathbf{A}[\{1\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\\alpha_{21}&0&0&0&0&0\\\alpha_{31}&0&0&0&0&0\\\alpha_{41}&0&0&0&0&0\\\alpha_{51}&0&0&0&0&0\\\alpha_{61}&0&0&0&0&0\end{Vmatrix}; \tag{61}$$

$$r=2,\quad \mathbf{A}[\{1,2\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&0&0&0&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&0&0&0&0\\\alpha_{51}&\alpha_{52}&0&0&0&0\\\alpha_{61}&\alpha_{62}&0&0&0&0\end{Vmatrix}; \tag{62}$$

$$r=3,\quad \mathbf{A}[\{1,2,3\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&0&0&0\\\alpha_{51}&\alpha_{52}&\alpha_{53}&0&0&0\\\alpha_{61}&\alpha_{62}&\alpha_{63}&0&0&0\end{Vmatrix}; \tag{63}$$

$$r=4,\quad \mathbf{A}[\{1,2,3,4\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\\alpha_{51}&\alpha_{52}&\alpha_{53}&\alpha_{54}&0&0\\\alpha_{61}&\alpha_{62}&\alpha_{63}&\alpha_{64}&0&0\end{Vmatrix}; \tag{64}$$

$$r=5,\quad \mathbf{A}[\{1,2,3,4,5\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\\alpha_{61}&\alpha_{62}&\alpha_{63}&\alpha_{64}&\alpha_{65}&0\end{Vmatrix}; \tag{65}$$

$$r=6,\quad \mathbf{A}[\{1,2,3,4,5,6\}]=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{Vmatrix}. \tag{66}$$

Результаты, полученные в [2], позволяют нам ограничиться рассмотрением только приведенных матриц. Теорема из [3, с. 34] оставляет в рассмотрении только матрицы для $r = 3,4$.

Соответствующие дифференциальные уравнения для искомых функций будут иметь вид:

$$r = 3,\ \mathbf{f}: \left| \begin{aligned} q_6 X_2' &= \alpha_{41} X_1 + \alpha_{42} X_2 + \alpha_{43} q_6 X_1', \\ q_7 X_1'' &= \alpha_{51} X_1 + \alpha_{52} X_2 + \alpha_{53} q_6 X_1', \\ q_7 X_2'' &= \alpha_{61} X_1 + \alpha_{62} X_2 + \alpha_{63} q_6 X_1'; \end{aligned} \right. \tag{67}$$

$$r = 3,\ \mathbf{g}: \left| \begin{aligned} Y_1'' &= -\alpha_{41} Y_2' - \alpha_{51} Y_1 - \alpha_{61} Y_2, \\ Y_2'' &= -\alpha_{42} Y_2' - \alpha_{52} Y_1 - \alpha_{62} Y_2, \\ Y_1' &= -\alpha_{43} Y_2' - \alpha_{53} Y_1 - \alpha_{63} Y_2; \end{aligned} \right. \tag{68}$$

$$r = 4,\ \mathbf{f}: \left| \begin{aligned} q_7 X_1'' &= \alpha_{51} X_1 + \alpha_{52} X_2 + \alpha_{53} q_6 X_1' + \alpha_{54} q_6 X_2', \\ q_7 X_2'' &= \alpha_{61} X_1 + \alpha_{62} X_2 + \alpha_{63} q_6 X_1' + \alpha_{64} q_6 X_2'; \end{aligned} \right. \tag{69}$$

$$r = 4,\ \mathbf{g}: \left| \begin{aligned} Y_1'' &= -\alpha_{51} Y_1 - \alpha_{61} Y_2, \\ Y_2'' &= -\alpha_{52} Y_1 - \alpha_{62} Y_2, \\ Y_1' &= -\alpha_{53} Y_1 - \alpha_{63} Y_2, \\ Y_2' &= -\alpha_{54} Y_1 - \alpha_{64} Y_2. \end{aligned} \right. \tag{70}$$

Благодаря теореме, сформулированной в данной работе, вместо матриц (94) – (95) достаточно рассмотреть их частный случай

$$\mathbf{A}[\{1,2,3\}] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{63} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{A}[\{1,2,3,4\}] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{51} & 0 & \beta_{53} & \beta_{54} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{62} & \beta_{63} & \beta_{64} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{72}$$

Системы уравнений (67) – (70) в этом случае примут вид:

$$r = 3,\ \mathbf{f}: \left| \begin{aligned} q_6 X_2' &= \beta_{41} X_1, \\ q_7 X_1'' &= \beta_{52} X_2, \\ q_7 X_2'' &= \beta_{63} q_6 X_1'; \end{aligned} \right. \tag{73}$$

$$r = 3,\ \mathbf{g}: \left| \begin{aligned} Y_1'' &= -\beta_{41} Y_2', \\ Y_2'' &= -\beta_{52} Y_1, \\ Y_1' &= -\beta_{63} Y_2; \end{aligned} \right. \tag{74}$$

$$r = 4,\ \mathbf{f}: \quad \left| \begin{array}{l} q_7 X_1'' = \beta_{51} X_1 + \beta_{53} q_6 X_1' + \beta_{54} q_6 X_2', \\ q_7 X_2'' = \beta_{62} X_2 + \beta_{63} q_6 X_1' + \beta_{64} q_6 X_2'; \end{array} \right. \tag{75}$$

$$r = 4,\ \mathbf{g}: \quad \left| \begin{array}{l} Y_1'' = -\beta_{51} Y_1, \\ Y_2'' = -\beta_{62} Y_2, \\ Y_1' = -\beta_{53} Y_1 - \beta_{63} Y_2, \\ Y_2' = -\beta_{54} Y_1 - \beta_{64} Y_2. \end{array} \right. \tag{76}$$

Рассматривая систему (75) – (76), нетрудно определить, что ее решения следует искать в виде:

$$\begin{array}{l} Y_1 = C_1 e^{i\sqrt{\beta_{31}}\,y} + C_2 e^{-i\sqrt{\beta_{31}}\,y}, \\ Y_2 = C_3 e^{i\sqrt{\beta_{62}}\,y} + C_4 e^{-i\sqrt{\beta_{62}}\,y}. \end{array} \tag{77}$$

$$\begin{array}{l} X_1 = C_5 e^{i\sqrt{\frac{\beta_{51}}{q_7}}x} + C_6 e^{-i\sqrt{\frac{\beta_{51}}{q_7}}x}, \\ X_2 = C_7 e^{i\sqrt{\frac{\beta_{62}}{q_7}}x} + C_6 e^{-i\sqrt{\frac{\beta_{62}}{q_7}}x} \end{array}. \tag{78}$$

Потребовав выполнения (75), (76), (53), (54), для частных решений уравнения (52) получаем:

$$\Psi_n(x,y) = \varphi_n(x)\cos(\omega_n y + \alpha_n) + \psi_n(x)\sin(\omega_n y + \beta_n), \tag{79}$$

где $\varphi_n$, $\psi_n$, $\omega_n$, $\alpha_n$, $\beta_n$ однозначно определяются физическими и геометрическими параметрами задачи.

Таким образом, в настоящей работе на основе развития теории обобщенного метода Фурье разделения переменных нам удалось найти правила, реализация которых при использовании ОМФ позволяет снять переопределенность подлежащих решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, облегчает алгоритмизацию и программную реализацию поиска аналитических решений прикладных задач с использованием ОМФ.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1980. 239 с.
2. Андрушкевич И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных // Электромагнитные волны & Электронные системы. – 1998. – № 4, Т. 3. – С. 4 – 17.
3. Андрушкевич И.Е. Обобщенный метод Фурье разделения переменных // Вестник Полоцкого гос. ун-та. – Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 28 – 34.
4. Андрушкевич И.Е., Жизневский В.А. Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. – 2002. – № 2 (24). – С. 124 – 128.
5. Андрушкевич И.Е., Жизневский В.А. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. – 2002. – № 3 (25). – С. 113 – 118.
6. Андрушкевич И.Е., Жизневский В.А. Взаимодействие электромагнитной волны со средой особой проводимости // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. – 2003. – № 1 (27). – С. 116 – 120.