УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Дмитриев А.П., ст. преп., Рагило П.Ю., студ., Вайтюль И.В., студ.

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Рядами простых чисел интересовались с древности. Многие учёные пытались разгадать тайну закономерности простых чисел в ряду натуральных. Частично некоторые задачи, связанные с простыми числами, удалось решить. Разработаны простые способы нахождения начального списка простых чисел вплоть до некоторого значения. К ним относятся: решето Эратосфена, решето Сундарама, решето Аткина и др. «Решето Эратосфена» в настоящее время доведено до 12 миллионов. Достаточно эффективно решён вопрос: является ли число простым? Алгоритмы, решающие эту задачу, называются тестами простоты. Существует множество полиномиальных тестов простоты, большинство из которых являются вероятностными (например, тест Миллера-Рабина). Издавна ведутся записи, отмечающие наибольшие известные простые числа. Один из рекордов поставил в своё время Эйлер, найдя простое число 2147483647.

Бернхард Риман, используя идею Эйлера, определил дзета-функцию. Одним из результатов этой работы стала формула для количества простых чисел до заданного предела. Жак Адамар и Шарль-Жан де ла Валле Пуссен независимо друг от друга вывели теорему о распределении простых чисел, доказав, что все нетривиальные нули дзета-функции лежат в пределах критической полосы. Возникла новая мощная область математики – аналитическая теория чисел. Сделаны попытки найти элементарные арифметические формулы, которые давали бы только простые числа. Ферма высказал предположение, что все числа вида $\boldsymbol{F(n) = 2^{2n} + 1}$ являются простыми. Но уже число $\mathbf{F(5)}$ не простое. Число $\boldsymbol{F(n) = n^2 - n + 41}$, но уже при $\mathbf{n{=}41}$ простого числа не получается. Аналогично $\boldsymbol{F(n) = n^2 - 79n + 1601}$ даёт простые числа до $\mathbf{n{=}79}$ включительно. Задача нахождения универсальной формулы пока не решена.

В работе подробно рассмотрено использование теории вероятностей в распределении простых чисел. Доля простых чисел между $\mathbf{2}$ и $\mathbf{n}$ равна

$$\boldsymbol{f(n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).}$$

С учётом $\boldsymbol{e^{-\frac{1}{p}} \approx 1 - \frac{1}{p}}$ формула принимает вид

$$\boldsymbol{\ln f(n) = -\sum_i \frac{1}{p_i}} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\ln f(n) = -\int_a^n \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau,}$$

что приводит к ДУ

$$\boldsymbol{\frac{df(n)}{f^2(n)} = -\frac{dn}{n}.}$$

Решение ДУ и использование теории числовых рядов даёт приближённые формулы для нахождения числа простых чисел, не превосходящих n (при больших n):

$$\boldsymbol{A(n) = \frac{n}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{2}{\ln^2 n}\right)} \quad (1) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{A(n) = \frac{n}{\ln n}}. \quad (2)$$

Ошибка таких формул асимптотически мала по сравнению с последним «точным» членом. Например, по формуле (1) A(4000)=540, по сокращённой формуле (2) A(4000)=482, а по полной формуле A(4000)=554. Точное значение A(4000)=550.