РАЗДЕЛ 3
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

3.1 Математика и информационные технологии

УДК 512. 542

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЁННОСТИ МНОЖЕСТВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Коваленко А.В., ст. преп., Комиссарова Д.К., студ., Антонова Т.А., студ.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Рассмотрим два множества M_1 и M_2, элементы которых являются объектами группы G. Множества M_1 и M_2 являются сопряжёнными, если для любых $m \in M_2$ найдётся такой элемент $x \in G$, что $M_1 = x^{-1}M_2x$, то есть множество M_1 имеет вид $M_1 = \{x^{-1}M_2x \mid m \in M_2\}$. Аналогично определим сопряжённость элементов группы. Элементы a_1 и a_2 группы G являются сопряжёнными, если существует такой элемент x, для которого выполняется равенство $a_1 = x^{-1}a_2x$.

Ввиду выполнения свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности, бинарное отношение сопряжённости является отношением эквивалентности. Если рассматривать отношение сопряжённости на множестве элементов группы G, то группа G представляет собой разбиение на классы сопряжённых элементов $G = G_1 + G_2 + \ldots$, где G_i – класс сопряжённых элементов.

Если рассмотреть множество $L(G)$ всех подгрупп группы G, то бинарное отношение сопряжённости на множестве $L(G)$ также является эквивалентностью, то есть множество $L(G)$ будет раскладываться на классы сопряжённых подгрупп.

Предположим, что группа G разложима по подгруппе N : $G = Nx_1 + Nx_2 + \ldots$. Пусть $y \in Nx_i$, тогда по определению смежного класса $y = nx_i$ и $n \in N$. Рассмотрим произведение $y^{-1}My = (nx_i)^{-1}M(nx_i) = x_i^{-1}n^{-1}Mnx_i = x_i^{-1}Mx_i$, так как $n \in N$ и n поглощается группой N.

Итак, мы получили, что любой элемент из смежного класса Nx_i переводит множество M в то же сопряжение с этим множеством M, что и x_i. Покажем, что элементы из различных смежных классов приводят к различным подмножествам, сопряжённым с множеством M, то есть выполняется неравенство $x_i^{-1}Mx_i \neq x_j^{-1}Mx_j$, если $i \neq j$.

Допустим противное, то есть, что $x_i^{-1}Mx_i = x_j^{-1}Mx_j$, если $i \neq j$. Умножим последнее равенство слева на x_i и справа на x_j^{-1} : $x_ix_i^{-1}Mx_ix_j^{-1} \neq x_ix_j^{-1}Mx_jx_j^{-1}$ или $Mx_ix_j^{-1} \neq x_ix_j^{-1}M$. По определению нормализатора имеем: $x_ix_j^{-1} \in N$; $x_ix_j^{-1} = n \in N$ или $x_i = nx_j$. В результате получаем равенство для смежных классов группы: $Nx_i = Nnx_j = Nx_j$. То есть справедливо, что смежные классы из разложения группы G по подгруппе N совпали, что противоречит правостороннему разложению. Полученное противоречие доказывает, что элементы из различных классов приводят к различным подмножествам. Следовательно, мощность множества всех подмножеств равна индексу нормализатора.

Из доказанного следует, что если множество M состоит из одного элемента a, то мощность множества всех элементов группы G, сопряжённых с элементом a, равна индексу нормализатора элемента a в группе G, то есть равна $|G : N_G (a)|$.

Пусть $H \subseteq G$, тогда $N_G (H) = \{x | x \in G \wedge xH = Hx\}$. Так как, для элемента выполняется равенство $hH = Hh = H$, то $h \in N_G (H)$. Следовательно, что любая подгруппа содержится в своём нормализаторе.

УДК 51-74

АППРОКСИМИРОВАНИЕ КРИВЫХ РАСТЯЖЕНИЯ КРИВЫМИ ГОМПЕРЦА И ПЕРЛА-РИДА

Дмитриев А.П., к.т.н., доц., Тарасенков Д.А., студ., Авласенко А.С., студ.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

В работе получены параметры кривых Гомперца и Перла-Рида, аппроксимирующих кривые одноосного растяжения образцов одиннадцати двухслойных искусственных кож (ИК Т) турецкого производства, которые используются обувными предприятиями Республики Беларусь в заготовках верха обуви. Анализ полученного динамического ряда экспериментальных точек показал, что описание тренда естественно производить с помощью функций, графики которых имеют вид кривой с насыщением, а именно S-образной кривой, моделирующей зависимость относительного удлинения образца (ε, %) от приложенной нагрузки (P, Н).

Для проведения расчётов были рассмотрены следующие S-образные кривые: кривая Гомперца: $\varepsilon = \varepsilon_P\, e^{-be^{-kp}}$ и логистическая кривая Перла-Рида: $\varepsilon = \varepsilon_P / 1 + ae^{-bp}$, выбран уровень предельного значения $\varepsilon = \varepsilon_P$, где ε_P – относительное удлинение образца при разрыве. Такой выбор математических моделей определяется тем, что кривые растяжения образцов характеризуются наличием нескольких этапов растяжения: медленного роста, быстрого роста и замедления роста относительного удлинения с приближением к ε_P. Для определения оптимальности в качестве критерия выбрана средняя квадратическая ошибка:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{n}\left(\varepsilon_m - \hat{\varepsilon}_m\right)^2}{n+1}},$$

где ε_m – фактическое значение; $\hat{\varepsilon}_m$ – выровненное значение; n – число точек.

Предварительная оценка параметров моделей с помощью МНК дало следующие результаты расчета коэффициентов детерминация, которые для некоторых образцов ИК Т приведены в таблице 1.

На основании результатов приведенных расчетов средней квадратической ошибки для полученных моделей можно утверждать, что кривая Гомперца по сравнению с кривой Перла-Рида несколько лучше описывает кривые растяжения.

По полученным параметрам построенных моделей кривых одноосного растяжения определены точки перегиба ($P_{ПЕР} = lnb / k$ для кривой Гомперца, $P_{ПЕР} = lna / b$ для кривой Перла-Рида), определяющие теоретические границы основных этапов растяжения.