РАЗДЕЛ 3
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

3.1 Математика и информационные технологии

УДК 517(075.8)

О НАХОЖДЕНИИ ЧАСТОТЫ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ С ВЫРЕЗОМ

Капник Е.С., студ., Никонова Т.В., к.ф.-м.н., доц.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Рассмотрим малые колебания круглой мембраны с вырезом, где $r = R_1$ и $r = R_2$ – линии, определяющие края мембраны.

В безразмерном виде в полярной системе координат (r, φ) уравнение колебаний запишется следующим образом [1]:

$$\Delta u - a^2(\varepsilon r, \varepsilon\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0, \tag{1}$$

где u – прогиб, a медленно зависит от r и φ, t – время.

В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$u(R_1) = 0, \quad u(R_2) = 0. \tag{2}$$

Будем искать $u(r, \varphi, t)$ в виде [2]:

$$u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi)\cos(\omega t). \tag{3}$$

Пусть

$$a(\varepsilon r, \varepsilon\varphi) = a_0 + \varepsilon a_1(r, \varphi) + \varepsilon^2 a_2(r, \varphi) + \ldots,$$

где a_i – непрерывные функции.

Разложим функции $U(r, \varphi)$ и ω в ряды по степеням ε [3]:

$$U(r, \varphi) = U_0 + \varepsilon U_1(r, \varphi) + \varepsilon^2 U_2(r, \varphi) + \ldots, \quad \omega(\varepsilon r) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots \tag{4}$$

Подставив разложения (4), (3) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при ε^0, ε^1, ε^2, получим последовательность уравнений с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрев условия разрешимости неоднородной задачи в первом и втором приближении, находим формулы для вычисления ω_1 и ω_2.

С учетом разложения (4) для частоты ω получим:

$$\boldsymbol{\omega = \Omega_{nm} - \varepsilon\Omega_{nm}} \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} ra_1(r,\varphi)(AJ_n(a_0\omega_0 r) + BY_n(a_0\omega_0 r))^2 \sin^2(n\varphi)drd\varphi}{a_0\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r(AJ_n(a_0\omega_0 r) + BY_n(a_0\omega_0 r))^2 \sin^2(n\varphi)drd\varphi}, \tag{5}$$

где $J_n(a_0\omega_0 r)$ и $Yn(a_0\omega_0 r)$ – функции Бесселя порядка n первого и второго рода соответственно [4].

Таким образом, получены асимптотические формулы для нахождения частоты малых колебаний круглой мембраны с вырезом. Полученные результаты можно использовать при изучении колебаний барабанной перепонки в математическом моделировании биомеханической системы среднего уха.

Список использованных источников

1. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики. / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. Смирнов, М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1964. – 104 с.
3. Найфе, А. Х. Введение в методы возмущений. / А.Х. Найфе. – М.: Мир, – 1984. – 535с.
4. Янке, Е. Специальные функции. / Е.Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

УДК 519.65

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ СУММ

Соболевский А.А., студ., Рубаник О.Е., ст. преп.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Пусть необходимо вычислить некоторую конечную сумму:

$$\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n}, \tag{1}$$

причём составляющие эту сумму слагаемые можно рассматривать как значение некоторой функции $y = f(x)$ для переменной x, изменяющейся от $x = a$ до $x = b$ с положительным интервалом $\Delta x = h$.

Предположим, что можно найти первообразную этой функции и, далее, вычислить определённый интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Используя формулу трапеций, позволяющую получить приближенное значение определенного интеграла в виде суммы, получим следующее приближенное равенство

$$\boldsymbol{f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(b)} \approx \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b).$$

Если величина h мала, получим