

Т.В. Никонова, Г.И. Михасев

Оценка усилий в тонкостенной трубе с упругим внешним наполнителем с учетом собственного веса

Рассматривается задача о расчете напряженно-деформированного состояния тонкостенной цилиндрической трубы, лежащей в грунте с учетом собственного веса. Для постановки задачи вводятся следующие упрощающие предположения.

1. Труба считается достаточно длинной, так что граничные условия на ее краях во внимание не принимаются.

2. Воздействие грунта принимается в предположении гидростатического характера его давления на трубу, т.е. $\sigma_n = \gamma_{гр} H_0$, (1)

где $\gamma_{гр}$ – удельный вес грунта, H_0 – глубина залегания трубы (рис. 1).

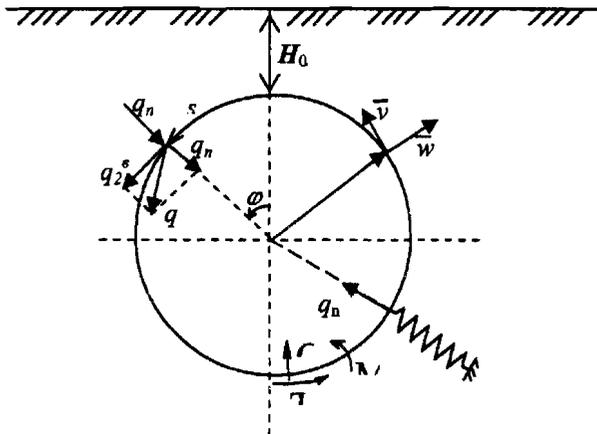


Рис. 1. Цилиндрическая труба в поперечном сечении

3. Реакция грунта при деформации трубы учитывается в рамках классической постановки, подчиняющейся закону Гука, при этом принимается одномерная модель Фусса-Винклера.

С учетом сделанных допущений задача может быть решена в рамках одномерной модели равновесия тонкостенной цилиндрической оболочки, покоящейся на упругом винклеровском основании. Принимая оболочку бесконечной, безмоментные уравнения равновесия тонкой оболочки могут быть заменены уравнениями равновесия кругового кольца [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{T_2}{R} + q_n &= 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial s} + \frac{Q}{R} + q_2 &= 0 \\ \frac{\partial M_2}{\partial s} - Q &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $s=R\varphi$ – длина дуги на поверхности оболочки, отсчитываемая в окружном направлении, T_2 , Q , M_2 – кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно, возникающие в срединной поверхности оболочки, q_n , q_2 – нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади поверхности оболочки. Здесь

$$\begin{aligned} q_n &= q_n^r + q_n^b + q_n^n, \\ q_n^r &= -\gamma_{гр} [H_0 + R(1 - \cos \varphi)], \\ q_n^b &= -\gamma h_c \cos \varphi, \\ q_n^n &= -\frac{\alpha_{гр}}{R} w, \quad q_2 = q_2^b = \gamma h_c \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где q_n^r , q_n^b , q_n^n – нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса оболочки и реакцией грунта (винклеровского основания), соответственно, q_2^b – касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки, $\gamma_{гр}$, γ – удельные веса грунта и материала оболочки, h_c – толщина цилиндрической оболочки, $\alpha_{гр}$ – коэффициент постели винклеровского основания.

Уравнения равновесия (2) дополним уравнениями физического состояния, связывающими T_2 , Q и M_2 с нормальным прогибом w и касательным перемещением v [1]:

$$T_2 = \frac{Eh_c}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right), \quad M = \frac{Eh_c^3}{12(1 - \nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right), \quad (4)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, соответственно.

С учетом (4) система уравнений (2) сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h_c^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} &= \frac{h_c^2}{12R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} - q_{2s} \sin \varphi, \\ \frac{h_c^2}{12R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{h_c^2}{12R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - w - \alpha w + q_{n0} + q_{nc} \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} q_{2s} &= \frac{R^2 \gamma (1 - \nu^2)}{E}, \quad \alpha = \frac{\alpha_{гр} R (1 - \nu^2)}{Eh_c}, \\ q_{n0} &= -\frac{\gamma_{гр} (1 - \nu^2) R^2 (H_0 + R)}{Eh_c}, \quad q_{nc} = \frac{(\gamma_{гр} R - \gamma h_c) R^2 (1 - \nu^2)}{Eh_c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение уравнений (5) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} w &= w_0 + w_c \cos \varphi, \\ v &= v_0 + v_s \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и приравнявая коэффициенты, независящие от φ , а также коэффициенты при $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, приходим к следующим соотношениям:

$$v_0 = 0, \quad w_0 = -\frac{(1-v^2)\gamma_{гр}R(H_0+R)}{E\left[\frac{h_c}{R} + (1-v^2)\frac{\alpha_{гр}}{E}\right]}, \quad (8)$$

$$v_s = -w_c + \frac{q_{2s}}{1 + \frac{h_c^2}{12R^2}}, \quad w_c = \frac{q_{nc} - q_{2s}}{\alpha_{гр}}. \quad (9)$$

Отсюда искомое тангенциальное усилие:

$$T_2 = -h_c \left\{ \frac{\gamma_{гр}(H_0+R)}{\frac{h_c}{R} + \frac{\alpha_{гр}}{E}(1-v^2)} - \frac{\gamma R}{1 + \frac{h_c^2}{12R^2}} \cos \varphi \right\}. \quad (10)$$

Из последней формулы следует, что расчетное усилие T_2 лежит в пределах:

$$T_2^- \leq |T_2| \leq T_2^+, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} T_2^\pm &= T_{2,гр} (1 + k_{вес}), \\ T_{2,гр} &= \frac{\gamma_{гр}(H_0+R)ERh_c}{Eh_c + \alpha_{гр}R(1-v^2)}, \\ k_{вес} &= \frac{\gamma(Eh_c + \alpha_{гр}R(1-v^2))}{\gamma_{гр}E(H_0+R)\left(1 + \frac{h_c^2}{12R^2}\right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные соотношения для перемещений (8), (9) позволяют оценить относительное удлинение (укорочение) диаметра трубы:

$$\Delta_R = \frac{\gamma_{гр}(H_0+R)R(1-v^2)}{Eh_c + \alpha_{гр}R(1-v^2)} \cdot 100\%. \quad (13)$$

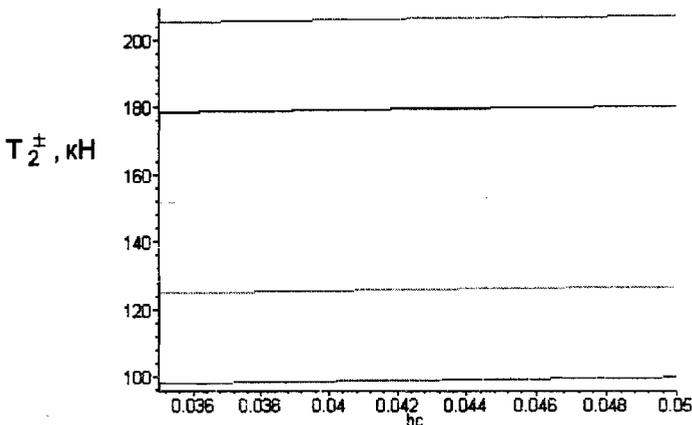


Рис. 2. Зависимость максимального тангенциального усилия от толщины трубы для различных глубин залегания трубы

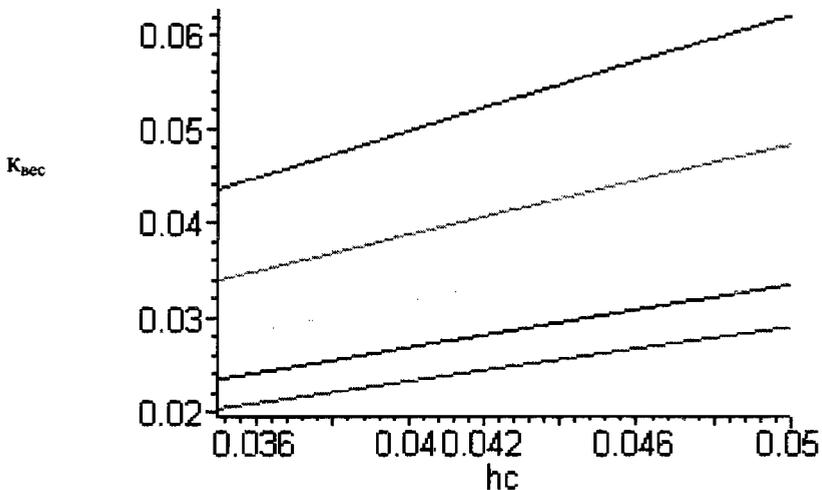


Рис. 3. Зависимость поправки $k_{вес}$ от толщины трубы для различных глубин залегания трубы

На рис.2 приведен график результирующего максимального усилия T_2^\pm как функции толщины трубы h_c при изменяющейся глубине залегания трубы. Как видно результирующее максимальное усилие T_2^\pm наиболее чувствительно к изменению глубины залегания трубы и наименее чувствительно к изменению толщины.

На рис.3 приведен график зависимости поправки $k_{вес}$ от толщины трубы при изменяющейся глубине залегания трубы. Из графика видно, что поправка $k_{вес}$ значительно зависит как от толщины трубы так и от глубины залегания.

Расчеты выполнены для $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu=0.25$, $\gamma=7.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, $\gamma_{гр}=1.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, $\alpha_{гр}=3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $R=1.5 \text{ м}$. В обоих случаях глубина залегания H_0 изменялась от 2 м до 6 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград, 1962. – 431 с.

S U M M A R Y

The object of investigation is a thin pipe of a round section lied in soil. It's own gravity force was taken into account. The reaction of external filling during deformation is limited by Gook's law and one-dimensional Fuss-Vinkler's model is used.

Поступила в редакцию 14.02.2003