В данной работе получены оценки взаимосвязи ресурсов при условии $y = \text{Const}$, т. е. $x_2 = \varphi(x_1)$. Рассматривая значение эластичности замещения ресурсов $x_{112}^2 = \dfrac{x_1 \cdot x_2' \cdot \partial u / \partial x_2'}{x_2}$, после преобразования получается дифференциальное уравнение второго порядка $x_{112}^2 \cdot x_1 \cdot x_2'' \cdot x_2 = x_1 \cdot (x_2')^2 - x_2 \cdot x_2'$, где x_{112}^2 - параметр, $x_2' = \dfrac{dx_2}{dx_1}$, $x_2'' = \dfrac{dx_2'}{dx_1}$. При решении уравнения рассматриваем два случая:

1) $x_{112}^2 = 0$. Тогда решением является $x_2 = C \cdot x_1$ или $x_2 = \text{Const}$;

2) $x_{112}^2 > 0$. После применения подстановок $x_1 = e^v$, $u = \dfrac{dx_2}{dv}$ и применяя необходимый интегрирующий множитель, получается уравнение первого порядка $\dfrac{dx_2}{dv} = x_2 + C \cdot x_2^{1/x_{112}^2}$, которое при значении $x_{112}^2 = 1$ имеет решение $x_2 = C_1 \cdot e^{v(C+1)}$ или $x_2 = C_1(y) \cdot x_1^{C+1}$. После обратных преобразований приходим к уравнению типа Кобба-Дугласа $Y = C_0 X_1^{\alpha} X_2^{\beta}$, где $\alpha = \dfrac{\gamma \cdot (C+1)}{C}$, $\beta = -\dfrac{\gamma}{C}$, γ - показатель однородности функции $y = f(x_1; x_2)$.

В работе определены оценки влияния механизации труда и текучести кадров на производительности труда в конкретно заданных условиях работы предприятия.

УДК 512. 542.

Студ. Щеглов С. А.,
ст. преп. Коваленко А.В. (ВГТУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ КОЛЕЦ

В данной работе рассматриваются характеристики колец, а также исследуются конкретно заданные множества с введенными на них операциями.

Непустое множество K с двумя бинарными алгебраическими операциями сложения и умножения называется кольцом, если выполняются два условия:

1) множество K с операцией сложения является абелевой группой и называется аддитивной группой $(K, +)$ кольца;

2) на множестве K определена операция умножения, которая удовлетворяет условию ассоциативности, т. е. $a \cdot b \in K$ и $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in K$.

Рассмотрим произвольное множество X и пусть $P(X)$ представляет собой совокупность всех подмножеств из X, с введенными на нем операциями сложения $A+B=(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ и умножения $A \cdot B = A \cap B$, для любых множеств A и B принадлежащих $P(X)$. Множество $P(X)$ является коммутативным кольцом с единицей, причем все элементы аддитивной группы $(P(X),+)$ имеют порядок равный двум. Роль нулевого элемента кольца $P(X)$ играет $\varnothing$, противоположным элементом к A будет само множество A. В качестве единичного элемента в $P(X)$ выбираем множество X, так как $A \cdot X = A \cap X = A$ и $X \cdot A = X \cap A = A$, для любого множества $A \in P(X)$. Кольцо $P(X)$ является целостным тогда и только тогда, когда множество X содержит только один элемент. Действительно, если X содержит более одного элемента, то, взяв в качестве A и B различные одноэлементные подмножества из X, получаем $A \cdot B = A \cap B = \varnothing$, т. е. A и B являются в этом случае делителями нуля, чего не может быть. Следовательно, если X имеет более одного элемента кольцо $P(X)$ не является целостным.

Рассмотрим произвольное множество Y и пусть K – произвольное кольцо, а $K^Y = \{Y \to K\}$ – множество функций $f: Y \to K$. Введем две бинарные операции: сложение $(f+\varphi)(y) = f(y) \oplus \varphi(y)$ и умножение $(f \cdot \varphi)(y) = f(y) \otimes \varphi(y)$, где $\oplus$ и $\otimes$ - операции сложения и умножения в кольце K. В работе рассматривается не суперпозиций функций, а обычное произведение, т. е. $ctg \cdot cos$: $y \to ctg(y) \cdot cos(y)$. Построенное множество является кольцом, причем, если кольцо K коммутативно, то и кольцо функций K^Y будет также коммутативно.

УДК 517.518.68

*Студ. Новодворская Д.А.,
Голубева И.А., проф. Трубников Ю.В.,
ст. преп. Трубникова Н.Е. (ВГТУ)*

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС С МИНИМАЛЬНЫМИ НЕВЯЗКАМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СО СПЕКТРОМ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Метод минимальных невязок является одним из основных методов решения линейных операторных уравнений

$$Bx = f \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве. Итерационный процесс с минимальными невязками имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + c_n(Bx_n - f)\ (n = 0,1,2,...), \tag{2}$$

при этом величина $\Delta_n = Bx_n - f$ называется невязкой, а итерационный параметр c_n выбирается так, чтобы норма невязки Δ_{n+1}

$$\| \Delta_{n+1} \| = \| \Delta_n + cB\Delta_n \| \tag{3}$$

при $c = c_n$ принимала наименьшее значение.

Однако сам факт сходимости последовательности $x_n(n = 1,2,...)$ к точному решению x_* и оценка скорости сходимости определяется расположением спектра оператора B. В ([1], с. 109) доказано, что если $B -$ самосопряженный положительно определенный оператор, спектр которого расположен на отрезке $[m, M]$, то скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\| x_n - x_* \| \le \frac{1}{m}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \| \Delta_0 \|. \tag{4}$$

В настоящем докладе оценка (4) обобщается следующим образом.

Теорема. Пусть спектр оператора B локализован в некотором прямоугольнике D комплексной плоскости, не содержащем нуля. Тогда

$$\|x_n - x_*\| \le aq^n \|\Delta_0\|, \tag{5}$$

где $q -$ чебышевская норма экстремального (т.е. полинома с минимальной нормой) полинома вида $P(z) = 1 + az$, рассматриваемого на прямоугольнике D.

В оценке (5) $a -$ некоторая постоянная.

Дальнейшее развитие метода минимальных невязок может состоять в следующем: итерационный процесс (2) заменим более общим процессом

$$x_{n+1} = x_n + c_{1n}\Delta_n + c_{2n}B\Delta_n + ... + c_{mn}B^{m-1}\Delta_n \quad (n = 0,1,2,...),$$

при некотором натуральном $m > 1$. В этом случае оценка скорости сходимости также будет иметь вид (5), но в качестве постоянной q можно будет взять норму экстремального полинома вида $P(z) = 1 + a_1 z + ... + a_m z^m$ более высокой степени.

Литература.

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969.