МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Дискретная математика

Методические указания к практическим занятиям для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04, 1-36 08 01
дневной формы обучения

ВИТЕБСК
2010

УДК 517+519 (075)
Дискретная математика: методические указания к практическим занятиям для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04, 1-36 08 01дневной формы обучения.
Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2010.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В., ст. преп. Завацкий Ю.А., ст. преп. Дмитриев А.П., доц. к. ф.-м. н. Денисов В.С., асс. к. ф.-м. н. Загурский В.Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, вопросы к экзамену и зачёту по курсу “Дискретная математика”. Указания предназначены для проведения практических занятий у студентов механико-технологического факультета по данному курсу. Данная разработка может быть использована при проведении практических занятий по курсу «Дискретная математика» для студентов заочной формы обучения.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
9 февраля 2010 г., протокол № 7

Рецензент: к.ф.-м. н., доцент УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Сурин Т.Л.

Редактор: ст. преп. Силивончик В.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2010 г., протокол №______

Ответственный за выпуск: Лопатнёва Н.Г.

.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч. – изд. лист _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ №____ Цена ______________
Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия №02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении восьми лет работы преподавания дисциплины «Дискретная математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих инженеров-механиков. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов механико-технологического факультета, которые изучают курс «Дискретная математика». В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, зачёта и проведения практических занятий по указанному выше курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Дискретная математика».

В работе выделяются пятнадцать разделов. Каждый раздел представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических или семинарских занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач этой темы. В то же время этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Дискретная математика» для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04, 1-36 08 01. Некоторые разделы курса «Дискретная математика», а именно «Элементы математической логики», «Элементы теории множеств» и «Функциональные отношения» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза.

На кафедре теоретической и прикладной математики разработана по дисциплине «Дискретная математика» тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенные методические указания позволяют подготовиться студентам к прохождению теста, как по отдельным разделам курса, так и по всему материалу. Проведение зачёта или экзамена, в зависимости от специальности, может подразумевать электронный контроль знаний.

Данная разработка может быть использована преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материал методических указаний для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ “ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА”

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями.
2. Формулы логики высказываний.
3. Законы логики высказываний.
4. Булевы функции.
5. Логическое следствие. Основные определения логики высказываний. Схемы доказательств.
6. Косвенное доказательство. Доказательство от противного.
7. Логика предикатов. Свободные переменные. Предикаты.
8. Логика предикатов. Операции над предикатами.
9. Логическое следствие. Равносильные предикаты.
10. Утверждения общности и существования. Квантор общности. Свободные и связанные переменные. Примеры записи с использованием квантора общности.
11. Утверждения общности и существования. Квантор существования. Примеры записи с использованием квантора существования.
12. Запись высказываний на языке логики предикатов.
13. Элементарные предикатные формулы.
14. Предикатные формулы или формулы логики предикатов.
15. Законы логики предикатов.
16. Множество. Пустое и универсальное множество. Диаграммы Эйлера-Венна.
17. Подмножество. Собственное подмножество. Принцип выделения подмножеств данного множества с помощью одноместных предикатов.
18. Операции над множествами.
19. Основные свойства операций над множествами.
20. Прямое произведение множеств.
21. Бинарные и n– местные отношения. Ранг отношения.
22. Представление бинарных отношений графами.
23. Матрицы смежности и инцидентности для ориентированного и неориентированного графа.
24. Операции над графами.
25. Сетевое планирование. Сетевой график. Критический путь. Критические работы.
26. Оптимизация сетевой модели по критерию минимума времени.
27. Понятие функции (отображения). Область определения, область значений отображения. Образ и прообраз множества. Равенство функций. Отображение в (на) множество.
28. Композиция функций.
29. Инъективные функции.
30. Обратимые функции.
31. Ограничение функций.

32. Виды бинарных отношений.

33. Отношение эквивалентности бинарных отношений на множестве. Класс эквивалентности. Полная система представителей классов эквивалентности.

34. Фактор – множество.

35. Отношение разнообразности отображения.

36. Отношение порядка бинарного отношения. Линейный порядок.

37. Упорядоченное множество. Наибольший и наименьший элемент. Вполне упорядоченное множество.

38. Бинарные и n – местные операции.

39. Виды бинарных операций. Примеры бинарных операций. Аддитивная и мульпликативная форма записи.

40. Нейтральные и регулярные элементы.

41. Симметричные элементы.

42. Подмножества, замкнутые относительно операций.

43. Понятие алгебры. Примеры алгебр.

44. Гомоморфизм алгебр.

45. Подалгебры.

46. Фактор – алгебры.

47. Понятие группы. Примеры групп.

48. Простейшие свойства групп.

49. Гомоморфизм групп.

50. Подгруппы.

51. Понятие кольца. Примеры колец.

52. Простейшие свойства колец.

53. Гомоморфизм колец.

54. Подкольца.

55. Понятие алгебраической системы.

56. Изоморфизм алгебраических систем.

57. Подсистемы.

58. Комбинаторные методы дискретной оптимизации в структурном синтезе технических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбатов, В. А. Основы дискретной математики / В. А. Горбатов. – Москва : Высш. школа, 1986. – 125 с.

2. Карпов, В. Г. Математическая логика и дискретная математика / В. Г. Карпов, В. А. Мощенский. – Минск : Выш. школа, 1977. – 162 с.

3. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – Москва : Энергоатомиздат, 1988. – 112 с.

4. Новиков, П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. – Москва : Наука, 1973. – 210 с.

5. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – Москва : Наука, 1986. – 92 с.
6. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – Москва : Издательство МАИ, 1992. – 234 с.
7. Гончарова, Г. А. Элементы дискретной математики / Г. А. Гончарова, А. А. Мочалин.– Москва : ФОРУМ: ИНФА-М, 2004. – 128 с.
8. Просветов, Г. И. Дискретная математика. Задачи и решения : учебное пособие / Г. И. Просветов. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 222 с.
9. Шопорев, С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. 22 02 00 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 07 19 00 «Информационные системы в технике и технологиях» / С. Д. Шопорев. – Санкт-Петербург : БХВ – Петербург, 2009.– 396 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Практические занятия по курсу «Дискретная математика» проходят по следующей схеме:

1) проводится опрос студентов по теме предыдущего занятия, а также проверка выполнения домашнего задания;
2) записывается тема нового практического занятия;
3) указывается цель и задачи данного занятия;
4) проходит опрос студентов по теоретическому курсу проходимой темы;
5) решение практических задач занятия;
6) самостоятельное выполнение студентами предложенных задач;
7) выдача заданий студентам по пройденной теме, для выполнения контролируемой самостоятельной работы.

Практический курс предмета «Дискретная математика» студент выполняет в отдельной тетради. После указания названия практического занятия в тетради должны быть записаны цель, задачи и основные теоретические сведения по тематике семинара, а затем решения задач, предложенных преподавателем. Это облегчит задачу студента при подготовке к сдаче экзамена или зачёта.

Особое внимание на занятиях должно быть уделено практическому применению тех или иных задач. Это связано с тем, что большинство задач курса «Дискретная математика» носят прикладной характер. Эти задачи будут находить применение при изучении различных специальных дисциплин, которые проходят студенты механико-технологических специальностей на старших курсах. Поэтому в методических указаниях для проведения практических занятий особое внимание уделено задачам именно прикладного характера.

Данная разработка не исключает возможности проведения практического занятия с использованием компьютерной техники. Так темы «Дискретная оптимизация» и «Графы» предполагают именно её использование.

1 ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ. ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
(практическое занятие №1)

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Вопросительные и восклицательные предложения, а также определения не являются высказываниями. Истинность или ложность высказывания рассматривается как его значение. Эти значения обозначаются 1 и 0 для значений «истина» и «ложь».

Если суждение об истинности высказывания можно получить из самого высказывания, то такое высказывание называется элементарным. В противном случае будем иметь сложное высказывание. Из простых высказываний можно образовывать сложные высказывания с помощью логических операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и другие. Истинностное значение сложного высказывания зависит от истинностного значения элементарных высказываний. Эта зависимость устанавливается в определениях и таблицах истинности, которые приведены в приложении 1.

1.2 Практикум по теме занятия раздела

1.2.1 Составить таблицы истинности для указанных формул:

а) $X \wedge Y \to \neg X \leftrightarrow \neg Y \vee (X \to Y)$;

б) $A \vee (B \leftrightarrow C) \to \neg(B \wedge C \vee A)$;

в) $X \vee Y \wedge Z \to (\neg Z \downarrow X \to Y \mid X)$;

г) $(A \wedge B) \to (C \wedge \neg B \to A \vee C)$;

д) $\left(X \downarrow Y \leftrightarrow (\neg Z \mid X)\right) \wedge \left(\left((Z \to X) \downarrow Y\right) \vee Z\right)$.

1.2.2 Решить логические уравнения:

а) $(A \leftrightarrow B \wedge C) \to (A \to B \vee C) = 1$;

б) $\left(A \downarrow B\right) \to (B \vee A \to C \wedge B)) = 0$;

в) $(X \vee Y \leftrightarrow Z \wedge X) \to (\neg Y \vee Z) = 1$;

г) $\neg(A \vee C \to B \wedge A) \leftrightarrow (\neg A \wedge C) = 0$;

д) $\left(X \vee Z \to \neg Y\right) \vee \left(\left((X \leftrightarrow Y) \to Z\right) \wedge Y\right) = 1$.

1.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

1.3.1 Составить таблицу истинности логической формулы относительно высказываний X, Y, Z: $(\neg(X \wedge Y) \leftrightarrow Z) \to Z \vee \neg X$.

1.3.2 Решить логические уравнения

а) $X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z \vee \left(\neg X \to Z\right) = 1$;

б) $(\neg(X \vee Y) \to X \vee Z) \leftrightarrow \left(\neg Y \to Z\right) = 0$;

в) $(X \vee Y \to Z) \downarrow (X \downarrow Z) = 1$;

г) $\neg(X \wedge Y \leftrightarrow Y \vee Z) \big| ((X \to Y) \to Z) = 0$.

2 ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ ФУНКЦИЙ ПРОВОДИМОСТИ
(практическое занятие № 2)

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Понятие формулы логики высказываний определим следующим образом:

1) элементарные формулы (атомы) являются формулами логики высказываний;

2) если A и B – формулы, то ШA, A ЩB, A ЪB, A ® B, A « B тоже являются формулами логики высказываний;

3) только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из первого и второго пунктов.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если принять следующие соглашения: 1) будем опускать внешнюю пару скобок; 2) упорядочим знаки логических операций по старшинству: « ,® , Ъ, Щ,Ш. При восстановлении скобок сначала расставляются все скобки, относящиеся ко всем вхождением знака Ш, затем ко всем вхождением знака Щ и так далее.

2.2 Практикум по теме занятия раздела

2.2.1 Опустить скобки в следующих формулах и составить для них таблицы истинности:

а) $\Big(\big((A\wedge B)\to C\big)\wedge\big((C\to A)\wedge B\big)\Big)$;

б) $\Big((X\leftrightarrow Y)\leftrightarrow\Big(\Big(\big((X\wedge Z)\wedge Y\big)\vee(\neg Z)\Big)\to Y\Big)\Big)$;

в) $\Big(\Big(\big((X\vee(\neg Y))\to Z\big)\leftrightarrow X\Big)\vee(Y\wedge X)\Big)$;

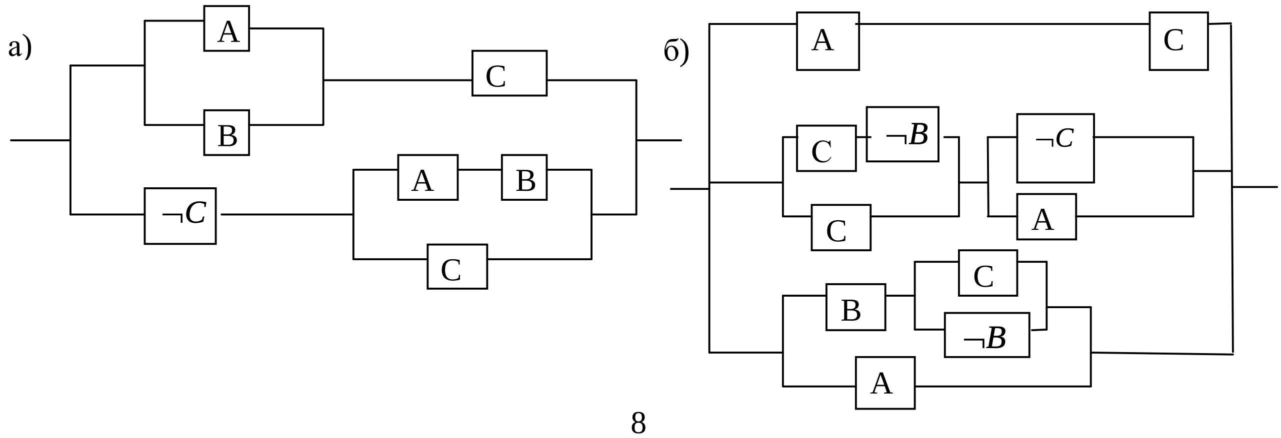
г) $\Big(C\leftrightarrow\Big(\big((\neg A)\vee B\wedge C\big)\Big)\leftrightarrow\big(A\to(B\to C)\big)\Big)$.

2.2.2 Восстановить скобки в логических формулах и составить для них таблицы истинности:

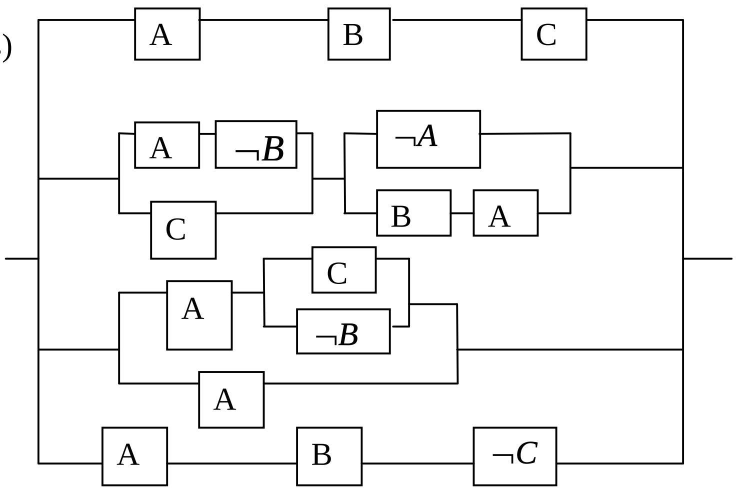
а) $A\vee B\wedge(C\vee\neg A\wedge B)$; б) $X\vee\neg Y\wedge Z\to X\wedge\neg Y$;

в) $A\vee\neg B\wedge C\to B\leftrightarrow\neg C$.

2.2.3 Записать логические формулы для контактных схем функций проводимости и проверить их работоспособность



в)



2.2.4 Из контактов X, Y, Z составить контактную схему функции проводимости таким образом, чтобы она замыкалась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-либо два контакта.

2.2.5 Построить контактные схемы по заданным функциям проводимости. При каком замыкании-размыкании контактов X, Y и Z, которые входят в функцию проводимости, представленной логической формулой, электрическая цепь будет проводить ток, если логическая формула схемы имеет вид:

а) $\left(\left(\neg X \vee Y\right) \wedge Z\right) \vee \left(X \wedge \neg Y \wedge Z\right)$;

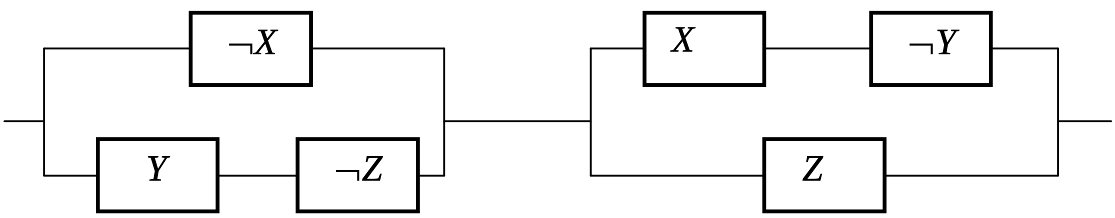
б) $Y \wedge \left(\neg X \vee \left(X \wedge \left(Y \vee Z\right)\right)\right)$;

г) $\left(Z \vee \neg X \wedge Y\right) \vee \left(Y \wedge \neg Z\right)$;

д) $\left(\neg Y \vee Z\right) \vee \left(\left(X \wedge Y\right) \vee \left(\neg Y \wedge Z\right)\right)$;

2.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

2.3.1 Записать логическую формулу для контактной схемы функции проводимости, изображённой на чертеже, и проверить ее работоспособность.



2.3.2 Построить контактную схему по заданной функции проводимости: $(X \wedge Y \wedge Z) \vee ((X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \wedge X))$. Установить, при каком замыкании-размыкании контактов X, Y, Z, входящих в данную схему, она будет работоспособна, то есть через соединения пройдёт ток.

3 ЗАКОНЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ (практическое занятие № 3)

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Формулы логики высказываний, которые принимают значение «истинна» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно истинной формулой, тавтологией или законом логики высказываний. Запись $\models X$ означает, что логическая формула A является формулой логики высказываний.

Формулы логики высказываний, которые принимают значение «ложь» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно ложной формулой или противоречием.

Тавтологические импликации, эквиваленции и тавтологии, выражающие одни операции через другие, приведены в приложении 2. Для доказательства того, что формула является тавтологией, необходимо составить таблицу истинности для этой формулы и показать, что все элементы последнего столбца равны единицы.

Функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая может принять одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает эти же значения 0 или 1, называют булевой функцией от n переменных. Для построения булевой функции применяют конъюнктивную и дизъюнктивную нормальную форму:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1} \left(x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{a_n} \right),$$

где $x^a = x$, если $a = 1$, $x^a = \neg x$, если $a = 0$.

3.2 Практикум по теме занятия раздела

3.2.1 Доказать законы логики и изобразить контактную схему, которая соответствует этой логической формуле:

а) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;

б) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ – закон отрицания конъюнкции;

в) $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \to (X \to Y \wedge Z)$ – закон умножения заключений.

3.2.2 Построить контактную схему прибора, состоящую из трёх блоков, каждый из которых содержит три и боле элемента, таким образом, чтобы на выходе получить значение нуль, то есть прибор не работает. Составить таблицу истинности для полученной контактной схемы, и используя логические операции над высказываниями, показать, что приведённая электрическая цепь не даёт на выходе ток. Доказать, используя таблицу истинности, что данная схема не работает. Устранить все неполадки в электрической цепи, чтобы прибор работал, то есть в последнем столбце таблицы истинности получить все значения, равные единице, что соответствует безотказной работе прибора.

3.2.3 Представить в явном виде булевы функции F, которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

а)

$F(x_1;x_2)$	0	1	1	0
$(x_1;x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1;x_2;x_3)$	0	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

в)

$F(x_1;x_2;x_3)$	1	0	0	0	0	0	0	0
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

3.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

3.3.1 Доказать законы логики и изобразить контактную схему, которая соответствует этой логической формуле:

а) $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ – закон ассоциативности дизъюнкции;

б) $X \to (Y \to Z) \leftrightarrow Y \to (X \to Z)$ – закон перестановки посылок.

3.3.2 Представить в явном виде булевы функции F, которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

а)

$F(x_1;x_2)$	0	0	0	1
$(x_1;x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1;x_2;x_3)$	1	0	0	0	0	0	0	1
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

в)

$F(x_1;x_2;x_3)$	0	0	0	0	0	0	0	1
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

4 ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО. ПРЕДИКАТЫ. КВАНТОРЫ ОБЩНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ (практическое занятие № 4)

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$, если для любого набора истинностных значений элементарных формул, входящих в формулы $A_1, A_2, ..., A_n$, формула B получает значение «истинна» каждый раз, когда каждая из формул $A_1, A_2, ..., A_n$ получает значение «истинна».

Запись $A_1, A_2, ..., A_n \models B$ означает, что формула B – логическое следствие формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

Формулы A и B называются равносильными (логически эквивалентными $A \equiv B$), если для любого набора истинностных значений элементарных формул, входящих в A и B, формулы A и B получают одинаковые истинностные значения.

Метод доказательства от противного. Требуется доказать следствие $A_1, A_2, ..., A_n \models B$. Предположим $\begin{cases} B = 0, \\ A_i = 1, i = \overline{1, n} \end{cases}$. Если система имеет хотя бы одно решение, то следствие неверно, если решений нет, то следствие верно.

Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называется предикатами. По числу переменных, входящих в предикат, различают одноместные, двухместные и так далее предикаты. Для записи предикатов и высказываний вводятся два квантора: квантор общности и существования. Для квантора существования употребляется символ $\exists$, для квантора общности символ $\forall$.

4.2 Практикум по теме занятия раздела

4.2.1 Проверить логическое следствие, используя таблицы истинности

а) $\neg A \vee B, C \to \neg B \models A \to \neg C$; б) $A \vee B, A \to C, B \to D \models C \vee D$.

4.2.2 Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

а) $A \to B, A \to C, B \wedge C \models A$; б) $A \to B, C \to B, A \wedge C \models B$;

г) $A \to B, \neg B \models \neg A$; д) $A \to B, B \to C \models A \to C$.

4.2.3 Проанализировать справедливость следующих рассуждений:

а) я пойду домой или останусь здесь и буду решать поставленные задачи. Я не пойду домой. Следовательно, я буду решать поставленные задачи;

б) если число дробное, то оно рационально. Если число рациональное, то оно действительное. Следовательно, если число дробное, то оно действительное;

в) если число четное, то оно делится на два. Число делится на два. Следовательно, число четное;

г) если корни ax^2+bx+c не являются комплексными, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a\cdot\left(ax^2+bx+c\right)>0$. Корни ax^2+bx+c комплексные тогда и только тогда, когда $D=b^2-4ac<0$. Если $ac<0$, то не верно, что $D=b^2-4ac<0$. Следовательно, если $ac<0$, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a\cdot\left(ax^2+bx+c\right)>0$;

д) если $x+3=\sqrt{3-x}$, то $x^2+6x+9=3-x$. Но $x^2+6x+9=3-x$ тогда и только тогда, когда $(x+6)(x+1)=0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Следовательно, $x+3=\sqrt{3-x}$ влечет $x=-6$ или $x=-1$;

е) он сказал, что придет, если будет хорошая погода, и не приедет его мама. Погода плохая. Следовательно, он не придет.

4.2.4 Записать на языке логики предикатов высказывания:

а) некоторые действительные числа являются рациональными;

б) ни одно простое число не является точным квадратом;

в) некоторые четные числа не делятся на 8;

г) любое число, кратное 6, делится на 3.

4.2.5 Пусть $P(x)$ = «*x* – простое число», $Q(x)$ = «*x* – четное число», $Z(x)$ = «*x* – целое число», $D(x,y)$=«*x* делит *y*». Сформулируйте словами высказывания, которые записаны на языке логики предикатов. Отметить, какие из них истинные и какие ложные:

а) $\forall x P(x)\to\neg Q(x)$;

б) $\forall x\left(\neg P(x)\to\forall y\left(P(y)\to\neg D(x,y)\right)\right)$;

в) $\forall x\left(Q(x)\to\forall y\left(D(x,y)\to Q(y)\right)\right)$;

г) $\forall x\exists y\left(R(x)\wedge R(y)\to D(x,y)\right)$;

д) $\forall y\exists x\left(R(x)\wedge R(y)\to D(x,y)\right)$;

е) $\exists x\forall y\left(R(x)\wedge R(y)\to D(x,y)\right)$.

4.2.6 Используя логические символы и кванторы, записать следующие высказывания:

а) числа 5 и 12 не имеют общих делителей, отличных от 1 и –1;

б) натуральное число, делящееся на 6, делится на 2 и на 3;

в) для любого целого числа x существует такое целое число y, что $x=2y$ или $x=2y+1$;

г) для любого натурального числа существует натуральное число, которое больше его;

д) существует наименьшее натуральное число;

е) система уравнений $\begin{cases}x+y=0\\x+y=1\end{cases}$ не имеет решений;

ж) не существует такого рационального числа x, что $x^2-2=0$;

з) для всяких целых x и z существует целое y такое, что $x+y=z$;

и) для любых двух рациональных чисел x и y существует рациональное число z такое, что $x<z$ и $z<y$.

4.2.7 Имеют ли место равносильности для любых предикатов $D(x,y)$, $Q(x)$ и $R(x)$?

1) $\forall x \exists y D(x,y) \equiv \exists y \forall x D(x,y)$.

2) $\forall x \forall y D(x,y) \equiv \forall y \forall x D(x,y)$.

3) $\forall x \big(R(x) \vee Q(x) \big) \equiv \forall x R(x) \vee \forall x Q(x)$.

4) $\exists x \big(R(x) \wedge Q(x) \big) \equiv \exists x R(x) \wedge \exists x Q(x)$.

4.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

4.3.1 Проанализировать справедливость следующего рассуждения: для того, чтобы функция $y = f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,c]$, необходимо, чтобы функция была ограничена на этом отрезке. Функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,c]$. Следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a,c]$.

4.3.2 Проверить логическое следствие $A \to B, B \to C \models A \vee B \to C$, используя таблицы истинности логических формул.

4.3.3 Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

а) $A \to B \models \neg B \to \neg A$;

б) $A \to B, B \to C \models A \to C$;

в) $\neg A \to B, \neg A \to \neg B \models A$.

4.3.4 Пусть предикат $P(x)$ обозначает « x – простое число», а предикат $Q(x)$ обозначает «x – чётное число». Перевести на русский язык следующую запись, которая записана на языке логики предикатов:

$\exists x \big(Q(x) \wedge P(x) \big) \wedge \neg \exists x \Big(\big(Q(x) \wedge P(x) \big) \wedge \exists y \big(x \neq y \wedge Q(y) \wedge P(y) \big) \Big)$.

4.3.5 Пусть предикат $P(x)$ обозначает «x – простое число», а предикат $Q(x, y)$ обозначает «число x делится на число y». Перевести на русский язык следующую запись, которая записана на языке логики предикатов:

$\forall x \forall y \big(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y) \to x = y \big)$.

5 МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ (практическое занятие № 5)

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определения множества и равенства множеств, операции над множествами и их свойства даны в приложении 3. Для графического изображения множеств и их свойств используются так называемые диаграммы Эйлера-Венна. Множество изображается кругом (или другой связанной фигурой) на плоскости и мыслится как множество точек круга. Универсальное множество Ω изображается множеством точек некоторого прямоугольника.

5.2 Практикум по теме занятия раздела

5.2.1 Указать:

а) все подмножества множества $\{a, b\}$, где $a \neq b$;

б) все собственные подмножества множества $\{a, b, c\}$, где a, b, c — попарно различные элементы.

5.2.2 Найти

а) $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d, f\}$;

б) $\{a, b, c\} \cap \{b, c\}$;

в) $\{a, b, c, d\} \setminus \{a, f, g, k\}$.

5.2.3 Пусть задано некоторое множество $A = \{x \in R \mid x^2 - 1 \leq 0\}$ и множество $B = \{x \in R \mid |x| < 1\}$. Заштриховать на числовой прямой пересечение, объединение и разность этих множеств.

5.2.4 Пусть A и B — конечные множества. Доказать, что $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, где $n(M)$ — число элементов множества M.

5.2.5 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождества и проиллюстрировать решение с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

а) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

в) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

е) $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

ж) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

з) $A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$.

5.2.6 Доказать следующие утверждения:

а) $A \subset C \to A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

б) $C = A \setminus B \to B \cap C = \varnothing$.

5.2.7 Пусть $X_1, X_2, X_3 \subset \Omega$. Упростить выражения:

а) $(X_1 \cup X_2) \setminus X_1$;

б) $(X_1 \cap X_2) \setminus X_1$;

в) $(X_1 \cap X_2) \cup X_1$;

г) $((X_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup X_3)) \setminus (X_2 \cup X_3)$;

5.2.8 Решить систему уравнений $\begin{cases} A \cap Z = B \\ A \cup Z = C \end{cases}$, если $B \subseteq A \subseteq C$.

5.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

5.3.1 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождество $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, проиллюстрировав решение с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

5.3.2 Доказать утверждение $B \subset A \to (A \setminus B) \cup B = A$.

5.3.3 Упростить выражение $(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \cup (X_1 \cup X_2) \cup (X_1 \cup X_3)$.

6 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. БИНАРНЫЕ И *n* – АРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ
(практическое занятие № 6)

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Прямым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар $\langle x; y \rangle$, таких, что $x \in A$ и $y \in B$. Это множество обозначается $A \times B = \{\langle x; y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Прямым произведением n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество всех кортежей $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ длины *n*, где $x_i \in A_i$ и $i = \overline{1, n}$: $A_1 \times ... \times A_n = \{\langle x_1; ...; x_n \rangle \mid x_1 \in A \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}$. Бинарным отношением называется любое множество упорядоченных пар. Таким образом, бинарное отношение является подмножеством прямого произведения множеств.

Областью определения бинарного отношения R называется множество $Dom(R) = \{x \mid \exists y, \langle x; y \rangle \in R\}$, а областью значения этого отношения является множество $Im(R) = \{y \mid \exists x, \langle x; y \rangle \in R\}$. Композиция двух бинарных отношений R и S представляет собой множество $R \circ S = \{\langle x; y \rangle \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$, а инверсия отношения R – множество $R^{\cup} = \{\langle x; y \rangle \mid \langle y; x \rangle \in R\}$.

n-местным отношением ($n \geq 1$) называется любое множество кортежей длины *n*, то есть множество упорядоченных наборов *n* объектов. Таким образом, *n*-местное отношение является подмножеством прямого произведения *n* множеств.

6.2 Практикум по теме занятия раздела

6.2.1 Даны два множества $A = \{2, 3, 5\}$ и $B = \{4, 7, 9\}$. Найти прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ и бинарные отношения $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge$ $\wedge$ "a делит b"$\}$, $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge$ "b больше a"$\}$.

6.2.2 Пусть $A -$ множество всех натуральных чисел из отрезка $[0, 10]$, а $B -$ множество всех натуральных чисел из отрезка $[10, 20]$. Найти прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ отношение $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge$ "b делится a"$\}$.

6.2.3 При каких условиях выполняется равенство упорядоченных троек $\langle\langle a;b\rangle;c;\langle b;c\rangle\rangle$ и $\langle\langle d;e\rangle;m;\langle a;d\rangle\rangle$?

6.2.4 Доказать, что при любом наборе элементов, для произвольных множеств A, B, C, D выполняются равенства

а) $Dom(A\times B)=A$; б) $Im(A\times B)=B$;

в) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$; г) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;

д) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$; е) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$.

6.2.5 Для бинарного отношения R найти $Dom(R)$, $Im(R)$, $R^{\cup}$, $R\circ R$, $R\circ R^{\cup}$, $R^{\cup}\circ R$.

а) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge "x\ делит\ y"\}$;

б) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Q\wedge x+y\le 0\}$;

в) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Q\wedge 2\cdot x\le 3\cdot y\}$.

6.2.6 Для бинарных отношений $R=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 8,5\rangle\}$ и $S=\{\langle 3,4\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 6,8\rangle\}$ найти области определения и значения, инверсии и всевозможные их композиции, а также их инверсий.

6.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

6.3.1 Пусть $A-$множество всех натуральных чисел из отрезка $[0,10]$, а $B-$ множество всех натуральных чисел из отрезка $[1,100]$. Найти прямые произведения $A\times B$, $B\times A$ отношение $R=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\wedge "b\ \text{квадрат}\ a"\}$.

6.3.2 При каких условиях выполняется равенство упорядоченных пар $\langle\langle a;b\rangle;c\rangle$ и $\langle\langle d;e\rangle;f\rangle$?

6.3.3 Доказать, что при любом наборе элементов для произвольных множеств A, B, C выполняется равенство $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

6.3.4 Для бинарного отношения $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge "y\ делит\ x"\}$ найти $Dom(R)$, $Im(R)$, $R^{\cup}$, $R\circ R$, $R\circ R^{\cup}$, $R^{\cup}\circ R$.

6.3.5 Для бинарных отношений $R=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 8,5\rangle\}$ и $S=\{\langle 3,4\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 6,8\rangle\}$ найти области определения и значения, инверсии и всевозможные их композиции, а также их инверсий.

7 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ГРАФАМИ. МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ (практическое занятие № 7)

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Графом называется фигура на плоскости, которая состоит из конечного числа точек (вершин графа) и линий (рёбер), соединяющих некоторые из вершин. Граф, на котором указаны стрелками направления всех его рёбер, называется ориентированным графом или орграфом. Если граф не имеет ориентированных рёбер, то он называется неориентированным или неографом. Каждой упорядоченной паре $\langle a; b\rangle$ сопоставляется ребро графа со стрелкой, идущей от точки a к точке b. Упорядоченной паре $\langle a; a\rangle$ сопоставим петлю с направлением против часовой стрелки.

Матрицей смежности Sm для неориентированного графа, порядка n называется матрица, состоящая из чисел sm_{ij}, равных сумме чисел неориентированных ребер, соединяющих вершины графа. Если дуга отсутствует, то $sm_{ij} = 0$.

Матрицей инцидентности In размерности $m \times n$ для неориентируемого графа называется матрица, элементами которой являются числа

$$in_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребро } u_j \text{ существует,} \\ 0, \text{если такого ребра } u_j \text{ не существует.} \end{cases}$$

Матрицей смежности Sm порядка n для ориентируемого графа называется матрица, состоящая из чисел sm_{ij}, равных сумме чисел ориентированных ребер, идущих из вершины x_i в вершину x_j. Если дуга отсутствует, то $sm_{ij} = 0$.

Матрицей инцидентности In размерности $m \times n$, для ориентируемого графа называется матрица, элементами которой являются числа

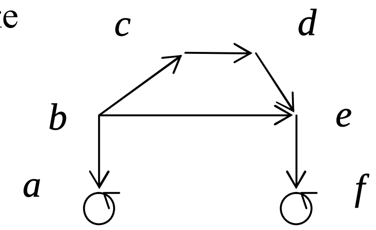
$$in_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } u_j \text{ выходит из вершины } x_i, \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ входит в вершину } x_i, \\ 0, \text{если такой дуги нет.} \end{cases}$$

Объединением графов называется граф, у которого множество вершин и множество дуг объединены, то есть одинаковые вершины и дуги совпадают. Суммой графов называется граф, определяемый как объединение графов, причём каждая вершина, не вошедшая в объединение, соединяется с другими вершинами графа. Произведением двух графов называется граф, вершины которого являются парой (первый элемент совпадает с вершинами первого графа, а второй элемент – второго), а рёбра соединяют те вершины, у которых нет ни одного совпадения.

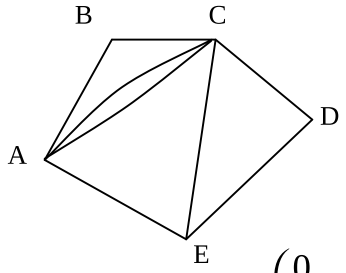
7.2 Практикум по теме занятия раздела

7.2.1 Построить граф бинарного отношения $R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle b,k\rangle, \langle b,m\rangle, \langle m,n\rangle, \langle n,n\rangle, \langle e,e\rangle\}$.

7.2.2 Записать бинарное отношение, которому соответствует орграф, изображённый на рисунке



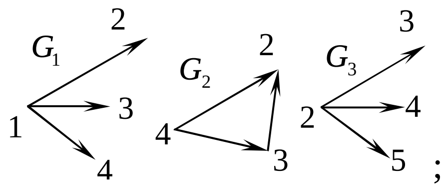
7.2.3 Для неориентированного графа, который изображён на рисунке, записать матрицу смежности Sm и матрицу инцидентности In.



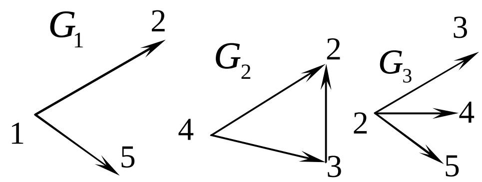
7.2.4 Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Построить соответствующий ей ориентированный граф, имеющий матрицу A, своей матрицей смежности. Найти матрицу инцидентности для построенного графа.

7.2.5 Построить матрицу смежности и инцидентности объединения графов $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

а)

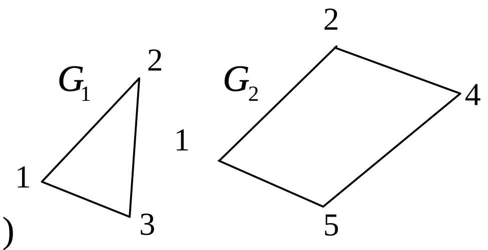


б)



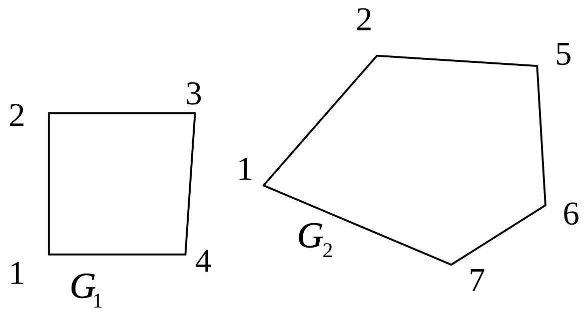
7.2.6 Найти сумму графов G_1 и G_2.

а)



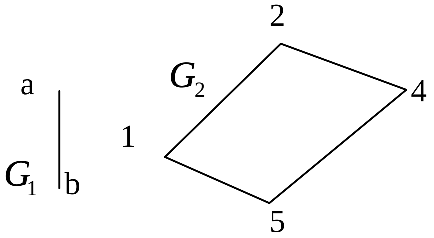
1)

б)

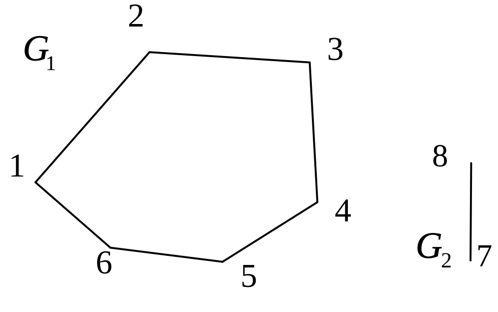


7.2.7 Найти произведение графов G_1 и G_2.

а)



б)



7.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

7.3.1 Дана матрица $Sm = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Необходимо: а) построить соответствующий ей не ориентируемый граф, который имеет заданную матрицу Sm матрицей смежности, определить матрицу инцидентности In для построенного графа; б) построить орграф (ориентируемый граф), который имеет матрицу смежности Sm. Найдите матрицу инцидентности In для построенного орграфа.

8 ДИСКРЕТНОЕ СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
(практическое занятие № 8 – 9)

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Сетевой график должен удовлетворять условиям:

1) существует единственная вершина R_0 графа, из которой дуги выходят;
2) существует единственная вершина R_n графа, в которую дуги входят;
3) в графе отсутствуют замкнутые пути;
4) для любой вершины графа существует единственный путь, проходящий из вершины R_0 в вершину R_n, который содержит дугу при данной вершине;

В сетевом планировании вершины называются событиями, а дуги – работами; t_j – время выполнения j-ой работы; работа r_j называется опорной работой работы r_i, если она предшествует ей; критический путь – самый длинный путь.

Для оптимизации сетевой модели по критерию минимума времени изображаем график в масштабе реального времени. Из него определяем критические и некритические работы. Критические работы – это работы, которые не имеют запаса времени. Критический путь – это самый длинный путь прохождения от начального до конечного события.

Оптимизация производится путем переноса средств с некритических работ, которые имеют резерв времени, на работы критического пути. Нельзя переносить средства на работы, принадлежащие одному пути.

Перенос средств с некритической работы r_i пути T_n на работу r_j критического пути $T_{кр}$ (с учетом коэффициентов пересчета) осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = \tilde{x}_j \\ T_{кр} - t_j \cdot c_j \cdot \tilde{x}_j = T_n + t_i \cdot c_i \cdot \tilde{x}_i \end{cases}; \quad \tilde{x}_i = \tilde{x}_j = \frac{T_{кр} - T_n}{t_i \cdot c_i + t_j \cdot c_j}.$$

При этом необходимо учитывать условие допустимости: $\tilde{x}_i \le \dfrac{t_{i срв}}{t_i \cdot c_i}$. Далее выполняем пересчет длительности работ и времени критического пути по формулам:

$$\begin{cases} t_j^{(1)} = t_j - t_j \cdot c_j \cdot \tilde{x}_j \\ t_i^{(1)} = t_i + t_i \cdot c_i \cdot \tilde{x}_i \end{cases} \text{ и } \begin{cases} T_{кр}^{(1)} = T_{кр} - t_j + t_j^{(1)} \\ T_{кр}^{(1)} = T_n - t_i + t_i^{(1)} \end{cases}.$$

Оптимизация модели по критерию минимума времени считается законченной, если все пути от начального события до конечного события оказываются равными.

8.2 Практикум по теме занятия раздела

8.2.1 Дана упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ r_i. Необходимо построить сетевой график, определить критический путь, критические и некритические работы, резервы времени.

а)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
Опорная работа r_j	–	–	–	r_1	r_1	r_2, r_4	r_3	r_5, r_6, r_7	r_8
Время работы t_i	2	4	1	3	5	2	7	3	3
Коэффициент перерасчета c_i	0,1	0,2	0,3	0,8	1	0,4	0,7	0,2	0,5

б)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
Опорная работа r_j	–	–	r_1	r_2, r_3	r_2, r_3	r_1	r_4	r_5, r_6, r_7
Время работы t_i	1	2	3	1	5	6	4	2
Коэффициент перерасчета c_i	0,2	0,5	0,6	1,1	0,2	0,6	0,4	0,9

а)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
Опорная работа r_j	–	–	–	–	r_1	r_3	r_3	r_2, r_5, r_6	r_4	r_7, r_8, r_9
Время работы t_i	3	5	2	4	1	3	7	3	5	4
Коэффициент перерасчета c_i	0,1	0,3	0,6	0,2	0,4	0,5	0,8	0,9	1	0,9

8.2.2 По данным задачи 8.2.1 провести оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени. Определить экономию. Построить новый сетевой план работ.

8.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

8.3.1 Дана упорядоченная структурно - временная таблица перечня работ по производству некоторого вида продукции товаров.

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
Опорная работа r_j	–	r_1	–	r_1	r_3, r_4	r_2, r_5	r_2, r_5	r_6	r_7
Время работы t_i	3	5	7	5	4	7	8	6	5
Коэффициент перерасчета c_i	0,2	0,4	0,3	0,7	1	0,3	0,8	0,4	0,6

Постройте сетевой график, определите критический путь, критические работы, резерв времени, проведите графический анализ комплекса работ и оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени при заданных ресурсах. Определить экономию. Построить новый сетевой план работ.

9 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТОБРАЖЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ И ФУНКЦИЙ (практическое занятие № 10)

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Бинарное отношение f называется функцией (отображением), если для любых x, y, z из того, что $\langle x; y\rangle \in f$ и $\langle x; z\rangle \in f$, следует, что $y = z$. Если $\langle x; y\rangle \in f$, то используется общепринятая запись $y = f(x)$. Областью определения функции f называется множество $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in A \mid \exists y \in B, \langle x; y\rangle \in f\}$, а областью значений – множество $\mathrm{Im}\, f = \{y \in B \mid \exists x \in A, \langle x; y\rangle \in f\}$. Композиция функций понимается как композиция отношений.

Функция f называется отображением множества A в множество B ($f: A \xrightarrow{\text{в}} B$), если выполняется равенство $A = \mathrm{Dom}\, f$ и включение $\mathrm{Im}\, f \subset B$. Функция f называется отображением множества A на множество B ($f: A \xrightarrow{\text{на}} B$), если выполняются равенства $A = \mathrm{Dom}\, f$ и $B = \mathrm{Im}\, f$.

Функция f называется инъективной, если для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\, f$ из условия $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$. В силу закона контрапозиции следует, что функция f инъективна тогда и только тогда, когда для любых x, y, если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$. Функция $j: B \xrightarrow{\text{на}} A$ называется обратной к функции $f: A \xrightarrow{\text{на}} B$, если по определению $j \circ f = i_A$, $f \circ j = i_B$, где i_A, i_B – соответствующие тождественные отображения A на множество A и B на B.

9.2 Практикум по теме занятия раздела

9.2.1 Какие из следующих отношений являются функциями? Найти область определения и множество значений. Исследовать функции на инъективность:

а) $f = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \wedge y = x^2\}$;

б) $f = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \wedge x < y \leq x+1\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge y=x^2\}$;

г) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y\,\vdots\, x\}$;

д) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge y=|x|\}$;

е) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge x=y^2\}$;

ж) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=7^x\}$;

з) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x\in R^+, y\in \mathbb{R}\wedge y=\log_7 x\}$.

9.2.2 Пусть $A-$ двухэлементное множество $\{0;1\}$. Найти все отображения множества A в себя и указать какие из этих отображений являются инъективными.

9.2.3 Доказать, что каждая из следующих функций имеет обратную функцию. Найти область определения обратной функции:

а) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y=2x+1\}$;

б) $f=\{\langle n,n^2\rangle \mid n\in N\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y=x^3\}$;

г) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=6^x\}$;

д) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x\in R^+, y\in R\wedge y=\log_6 x\}$.

9.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

9.3.1 Какие из следующих отношений являются функциями? Найти область определения и множество значений. Исследовать функции на инъективность. Найти обратную функцию:

а) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y=x^3\}$;

б) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=3x+5\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=10^x\}$;

г) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x\in R^+, y\in R\wedge y=\log_6 x\}$.

9.3.2. Найти все отображения множества $A=\{0;1;2\}$ на двухэлементное множество $B=\{0;1\}$, и указать какие из этих отображений являются инъективными.

10 ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ
(практическое занятие № 11)

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть бинарное отношение $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\}$ определено на непустом множестве A. Бинарное отношение R называется рефлексивным, если $\langle x,x\rangle\in R$ и антирефлексивным, если $\langle x,x\rangle\notin R$. Бинарное отношение R называется симметричным, если $\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R$ и антисимметричным, если

$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x = y$. Бинарное отношение R называется транзитивным, если $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R$.

Бинарное отношение R является отношением эквивалентности, если оно обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности. Бинарное отношение R является отношением порядка, если оно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Бинарное отношение R является отношением линейного порядка, если $\forall x, y \in A \rightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y$.

10.2 Практикум по теме занятия раздела

10.2.1 Проверить, являются ли бинарные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными. С точки зрения наличия этих свойств рассмотреть бинарные отношения:

а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in Z \wedge x \le y + 1\}$;

б) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in Z \wedge |x| = |y|\}$;

в) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \wedge y \,\vdots\, x\}$;

г) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \wedge x < y\}$;

д) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in Z \wedge x^2 + x = y^2 + y\}$.

10.2.2 Показать, что отношение $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in Z \wedge (y \,\vdots\, x \vee x < y)\}$ – линейный порядок.

10.2.3 Пусть имеется множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. На этом множестве задано отношение $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x > y\}$. Построить граф отношения. Построить график и проверить свойства заданного отношения.

10.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

10.3.1 Проверить является ли отношение $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \wedge x \ge y\}$ рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным. С точки зрения наличия этих свойств рассмотреть отношение R.

10.3.2 Пусть имеется множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Показать, что отношение $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge (x - y) \,\vdots\, 2\}$ есть отношение порядка. Построить граф отношения. Построить график и проверить все свойства заданного отношения.

11. БИНАРНЫЕ И n-МЕСТНЫЕ ОПЕРАЦИИ (практическое занятие № 12)

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть A – непустое множество. Бинарной операцией на множестве A называется отображение прямого произведения $A \times A$ в A. Отображение A^n в A называется n-местной операцией на множестве A, а число n – рангом операции. Нульместной операцией называется выделение какого-либо элемента.

Пусть $\top$ и $\wedge$ – произвольные бинарные операции на множестве A.

Бинарная операция $\top$ называется коммутативной, если $a\top b = b\top a$, и ассоциативной, если $a\top(b\top c) = (a\top b)\top c$. Бинарная операция $\top$ называется дистрибутивной относительно бинарной операции $\wedge$, если выполняются равенства $a\top(b \wedge c) = (a\top b) \wedge (a\top c)$ и $(a \perp b)\top c = (a\top c) \perp (b\top c)$, для любых $a,b,c \in A$.

11.2 Практикум по теме занятия раздела

11.2.1 Дано множество $Z^+ = \{z \mid z \in Z \wedge z > 0\}$. На данном множестве задана бинарная операция $\perp$: $a \perp b = a^b$, $\forall a,b \in Z^+$. Показать, что операция $\perp$ не является коммутативной и ассоциативной.

11.2.2 Пусть $a \neq b$ – фиксированные рациональные числа. На множестве рациональных чисел задана бинарная операция $\perp$: $x \perp y = ax + by$, $\forall x, y \in Q$. Показать, что операция $\perp$ не является коммутативной и ассоциативной.

11.2.3 Дано множество натуральных чисел N. На данном множестве задана бинарная операция $\perp$: $x \perp y = \text{НОД}(x;y)$. Показать, что операция $\perp$ является коммутативной и ассоциативной.

11.2.4 Дано непустое множество U и множество $P(U)$ – множество всех подмножеств U. На данном множестве $P(U)$ задана бинарная операция Δ, которая носит название симметрической разности множеств X и Y и определяется по формуле $X\Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Показать, что операция симметрической разности обладает свойством коммутативности и ассоциативности. Доказать дистрибутивность операции пересечения относительно симметрической разности.

11.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

11.3.1 Дано множество натуральных чисел N. На данном множестве задана бинарная операция $\perp$: $x \perp y = \text{НОК}(x;y)$. Показать, что операция $\perp$ является коммутативной и ассоциативной.

11.3.2 Проверить на выполнения свойства коммутативности и ассоциативности скалярного произведения геометрических векторов, а также дистрибутивность скалярного произведения, относительно сложения векторов.

11.3.3 Проверить на выполнения свойства коммутативности и ассоциативности векторного произведения геометрических векторов, а также дистрибутивность векторного произведения, относительно сложения векторов.

12 АЛГЕБРЫ. ГОМОМОРФИЗМ АЛГЕБР (практическое занятие № 13)

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Алгеброй называется упорядоченная пара $\mathrm{A} = \langle A, \Omega \rangle$, где A – непустое множество и Ω – множество операций на множестве A. Пусть $f_1, f_2, ..., f_n \in \Omega$ главные операции алгебры A, а $f_1', f_2', ..., f_n' \in \Omega'$ главные операции алгебры

$\mathsf{B} = \langle B, \Omega' \rangle$. Типом алгебры $\mathsf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется последовательность $(r(f_1), r(f_2), ..., r(f_n))$, где $r(f_i)$ – ранг операции f_i, причём $i = \overline{1; n}$. Алгебры $\mathsf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ и $\mathsf{B} = \langle B, \Omega' \rangle$ называются однотипными, если их типы совпадают, то есть ранг операции f_i алгебры A совпадает с рангом f_i' алгебры B.

Пусть f_{A} главная операция алгебры A, а f_{B} – соответствующая ей главная операция однотипной алгебры B. Говорят, что отображение $h: A \xrightarrow{\text{в}} B$ сохраняет операцию f_{A} алгебры A, если

$h(f_{\mathsf{A}}(x_1, x_2, ..., x_n)) = f_{\mathsf{B}}(h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n)), \quad \forall x_1, x_2, ..., x_n \in A$

Гомоморфизмом алгебры A в (на) алгебру B называется отображение h множества A в (на) множество B, сохраняющее все главные операции A. Гомоморфизм h алгебры A на алгебру B называется изоморфизмом ($\mathsf{A} \cong \mathsf{B}$), если h есть инъективное отображение множества A на B. В случае отображение «в» имеем мономорфизм алгебры A в алгебру B.

12.2 Практикум по теме занятия раздела

12.2.1 Пусть «$+$» и «$\cdot$» являются обычными операциями сложения и умножения на множестве действительных чисел R, а R^+ – множество положительных действительных чисел. Даны алгебры $\mathsf{R} = \langle R, + \rangle$ и $\mathsf{R}_1 = \langle R^+, \cdot \rangle$. Являются ли следующие отображения гомоморфизмами и изоморфизмами?

а) $h: R \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ h(x) = 2^x,\ \forall x \in R$;

б) $f: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R,\ f(x) = \log_2 x,\ \forall x \in R^+$;

в) $g: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ g(x) = \sqrt{x},\ \forall x \in R^+$;

г) $p: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ p(x) = |x|,\ \forall x \in R^+$.

12.2.2 Пусть h – гомоморфизм алгебры $\mathsf{A} = \langle A, \top \rangle$ на алгебру $\mathsf{B} = \langle B, \perp \rangle$, где $\top, \perp$ – некоторые бинарные операции. Доказать:

1) если операция $\top$ – коммутативна, то и операция $\perp$ – коммутативна;
2) если операция $\top$ – ассоциативна, то и операция $\perp$ – ассоциативна;
3) если e – нейтральный элемент относительно операции $\top$, то $h(e)$ – нейтральный элемент относительно операции $\perp$;
4) если a' – симметричный элемент относительно операции $\top$ для элемента a, то $h(a')$ – симметричный элемент относительно операции $\perp$ элемента $h(a)$.

12.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

12.3.1 Пусть «$+$» и «$\cdot$» являются обычными операциями сложения и умножения на множестве действительных чисел R, а R^+ – множество положительных действительных чисел. Даны алгебры $\mathsf{R} = \langle R, + \rangle$ и $\mathsf{R}_1 = \langle R^+, \cdot \rangle$. Являются ли следующие отображения гомоморфизмами и изоморфизмами?

а) $h: R \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ h(x) = 5^x,\ \forall x \in R$;

б) $f: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R,\ f(x) = \log_5 x,\ \forall x \in R^+$;

в) $g: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ g(x) = \sqrt[3]{x},\ \forall x \in R^+$;

г) $p: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+,\ p(x) = x^2,\ \forall x \in R^+$;

д) $q: R \xrightarrow{\text{на}} R,\ p(x) = x^3,\ \forall x \in R$.

13 ГРУППЫ
(практическое занятие № 14)

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Алгебра G = $\left\langle G, *, ^{/} \right\rangle$ типа (2;1) называется группой, если её главные операции удовлетворяют аксиомам:

1) бинарная операция «$*$» ассоциативна $a*(b*c) = (a*b)*c,\ \forall a,b,c \in G$;
2) существует правый нейтральный элемент $a*e = a,\ \forall a \in G$;
3) унарная операция «$^{/}$»удовлетворяет условию $\forall a \in G,\ \exists a^{/} \in G: a*a^{/} = e$.

Группа называется абелевой, если введенная операция «$*$» коммутативна. Основное множество группы является замкнутым относительно главных операций группы, если применение операций к элементам группы приводит к элементам этой же группы. Если бинарная операция представляет собой операцию сложения, то группа называется аддитивной группой, если же операцию умножения – то мультипликативной группой.

13.2 Практикум по теме занятия раздела

13.2.1 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций аддитивной группы действительных чисел:

а) множество всех натуральных чисел;
б) множество всех целых чисел;
в) множество всех чётных целых чисел;
г) множество всех нечётных целых чисел;
д) множество всех целых чисел, кратных заданному целому числу n;
е) множество всех рациональных чисел с нечётным знаменателем;
ж) множество всех рациональных чисел с чётным знаменателем.

13.2.2 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций мультипликативной группы действительных чисел:

а) множество всех отличных от нуля рациональных чисел с чётным знаменателем;
б) множество всех отличных от нуля рациональных чисел с нечётным знаменателем;
в) множество всех целочисленных степеней числа 3;

г) множество чисел, которые принадлежат множеству $\{1;-1\}$.

13.2.3 Пусть задано множество $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos j & -\sin j\\ \sin j & \cos j\end{pmatrix}, j\in\square\right\}$. Доказать, что алгебра $\mathsf{G}=\left\langle G,\cdot,^{-1}\right\rangle$ является группой. Будет ли данная группа абелевой.

13.2.4 Доказать, что алгебры с введёнными очевидным образом операциями являются группами. Являются ли группы абелевыми. Составить таблицу умножения для элементов следующих групп:
а) алгебра вращений правильного треугольника относительно его центра;
б) алгебра вращений правильного пятиугольника относительного его центра;
в) алгебра всех симметрий правильного треугольника;
г) алгебра всех симметрий ромба.

13.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

13.3.1 Доказать, что алгебры с введёнными очевидным образом операциями являются группами. Являются ли группы абелевыми. Составить таблицу умножения для элементов следующих групп:
а) алгебра вращений квадрат относительного его центра;
б) алгебра вращений ромба относительно его центра;
в) алгебра вращений прямоугольника, не являющегося квадратом;
г) алгебра всех симметрий параллелограмма;
д) алгебра всех симметрий квадрата.

13.3.2 Пусть задано множество $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}, a,b\in\square\right\}$. Доказать, что алгебра $\mathsf{G}=\left\langle G,\cdot,^{-1}\right\rangle$ является группой. Будет ли данная группа абелевой.

13.3.3 Определить, образуют ли следующие множества аддитивную и мультипликативную группы:
а) множество всех натуральных чисел;
б) множество всех действительных чисел;
в) множество всех отрицательных действительных чисел;
г) множество всех целых положительных степеней тройки.

14 ПОДГРУППЫ. ГОМОМОРФИЗМ ГРУПП (практическое занятие № 15)

14.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Приведём в данном разделе основные теоретические сведения для мультипликативной группы, для других видов групп теоретический материал аналогичен. Алгебра $\mathsf{H}=\left\langle H,\times,^{-1}\right\rangle$ типа (2;1) называется подгруппой $\mathsf{G}=\left\langle G,\cdot,^{-1}\right\rangle$, если $H \subset G$ и тождественное отображение множества H в множество G является мономорфизмом алгебры H в алгебру G, то есть выполняются условия:

1) $x \times y = x \cdot y, \quad \forall x, y \in H$;

2) $x^{-1} = x^{-1}, \quad \forall x \in H$.

Группа называется циклической, если она порождена одним элементом. Для нахождения подгрупп циклической группы используют тот факт, что порядок подгруппы является делителем порядка группы.

Так как группа является частным случаем алгебры, то определения гомоморфизма и изоморфизма групп аналогичны таким же определениям для алгебр (раздел12).

14.2 Практикум по теме занятия раздела

14.2.1 Доказать, что алгебра $\mathsf{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ является подгруппой аддитивной группы действительных чисел $\mathsf{R} = \langle R, +, - \rangle$, если множество $H = \left\{ a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \square \right\}$. Показать, что алгебра $\mathsf{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ – группа.

14.2.2 Найти все подгруппы циклической группы $\mathsf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ порядка $m = 6$ и $m = 24$, где множество $G = \left\{ e, g^1, g^2, ..., g^{m-1} \right\}$ порождено элементом g. Предварительно доказать, что алгебра $\mathsf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ является группой.

14.2.3 Пусть заданы две алгебры $\mathsf{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$ и $\mathsf{G}' = \langle G', \cdot, E \rangle$ с основными множествами $G = \left\{ a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \square \right\}$ и $G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} | \, a, b \in \square \right\}$, причем $a^2 + b^2 > 0$. Определим отображение $h : G \to G'$ следующим образом: $h\left(a + b\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$. Доказать, что алгебры G и G' являются группами, а отображение является гомоморфным и изоморфным.

14.2.4 В условии предыдущей задачи определим отображение $j : G' \to H$, где $H = R \setminus \{0\}$ и $j(x) = |x|, \; x \in G'$. Доказать, что отображение является гомоморфным и изоморфным.

14.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

14.3.1 Доказать, что алгебра $\mathsf{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ является подгруппой аддитивной группы действительных чисел $\mathsf{R} = \langle R, +, - \rangle$, если множество $H = \left\{ \sqrt{2} \cdot a + \sqrt{7} \cdot b \,|\, a, b \in \square \right\}$. Показать что алгебра $\mathsf{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ – группа.

14.3.2 Найти все подгруппы циклической группы G = $\langle G,\cdot,^{-1}\rangle$ порядка $m=18$ и $m=25$, где множество $G=\{e,g^1,g^2,...,g^{m-1}\}$ порождено элементом g. Предварительно доказать, что алгебра G = $\langle G,\cdot,^{-1}\rangle$ является группой.

14.3.3 Проверить является ли отображение $h:G\to G'$ гомоморфизмом и изоморфизмом, где $G=\{(a_{ij})\,|\,a_{ij}\in R,\ i,j=\overline{1,n}\}$ и $G'=\{x\,|\,x\in R\setminus\{0\}\}$ основные множества групп G $=\langle G,\cdot,1\rangle$ и G$'=\langle G',\cdot,1\rangle$ соответственно, а отображение h определяется по формуле $h(A)=\det(A),\ \forall A\in G$.

15 КОЛЬЦА. ГОМОМОРФИЗМ КОЛЕЦ
(практическое занятие № 16 – 17)

15.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Кольцом называется алгебра K $=\langle K,+,-,\cdot,1\rangle$ типа (2,1,2,0), главные операции которой удовлетворяют аксиомам:

1) $a+(b+c)=(a+b)+c,\ \forall a,b,c\in K$ (ассоциативность);

2) $\exists 0\in K:\quad a+0=a,\ \forall a\in K$ (существование нейтрального элемента по сложению);

3) $\forall a\in K,\ \exists(-a)\in K:\quad a+(-a)=0$ (существование симметричного элемента), то есть алгебра $\langle K,+,-\rangle$ является абелевой группой;

4) $a+b=b+a,\ \forall a,b\in K$ (коммутативность);

5) $\forall a\in K\Rightarrow a\cdot 1=a$, то есть алгебра $\langle K,\cdot,1\rangle$ является моноидом;

6) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ и $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ \forall a,b,c\in K$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Кольцо K называется коммутативным, если для любых элементов кольца a и b выполняется равенство $a\cdot b=b\cdot a$. Кольцо K называется нулевым, если $K=0_{\mathrm{K}}$. Кольцо K называется областью целостности, если оно коммутативно, $0_{\mathrm{K}}\neq 1_{\mathrm{K}}$ и для любых $a,b\in K$ из равенства $a\cdot b=0$ следует $a=0\vee b=0$.

Подкольцом кольца K называется любая подалгебра этого кольца. При этом любое подкольцо является кольцом, при этом нуль и единица кольца является нулём и единицей любого его подкольца.

Так как кольцо является частным случаем алгебры, то определения гомоморфизма и изоморфизма колец аналогичны таким же определениям для алгебр (раздел12).

15.2 Практикум по теме занятия раздела

15.2.1 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций кольца действительных чисел:

а) множество всех нечетных целых чисел;
б) множество всех рациональных чисел, знаменатели которых равны единице или чётному числу;
в) множество всех рациональных чисел с нечётным знаменателем;

15.2.2 Является ли алгебра $\mathrm{K} = \langle K, \oplus, -, \odot, 1\rangle$ кольцом. Установить, будет ли являться кольцо областью целостности, если основное множество кольца определено следующим образом:
а) K – множество всех четных чисел с введёнными операциями сложения и умножения обычным образом;
б) $K = Z \times Z = \{(x, y) \mid x, y \in Z\}$, где операции на множестве определены по формулам $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$;
в) $K = Z(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{3} \,\middle|\, a, b \in Z\right\}$, с введёнными операциями сложения и умножения обычным образом.

15.2.3 Проверить, являются ли гомоморфизмом и изоморфизмом колец следующие отображения:
а) $j : Z \to 2Z,\ j(z) = 2z,\ \forall z \in Z$;
б) $f : A \to Z$, где $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in Z\right\}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a - b$;
в) $h : K \to K'$, где $K = \left\{a + b\sqrt{3} \,\middle|\, a, b \in 2Z\right\}$, $K' = \left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in 2Z\right\}$,
$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + \sqrt{3}b$.

15.2.4 Пусть K – ненулевое кольцо. Докажите, что кольцо 2×2 матриц над кольцом K является некоммутативным кольцом с делителями нуля.

15.3 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

15.3.1 Является ли алгебра $\mathrm{K} = \langle K, \oplus, -, \odot, 1\rangle$ кольцом, если основное множество $K = Q(\sqrt{5}) = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q\right\}$. Установить, будет ли являться кольцо областью целостности.

15.3.2 Проверить, является ли гомоморфизмом и изоморфизмом колец отображения $h : K \to K'$, где $K = \left\{a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in 2Z\right\}$, $K' = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in 2Z\right\}$,
$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + \sqrt{3}b$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Таблица истинности для логических операций

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \mid Y$	$X \downarrow Y$	$X + Y$
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0

В таблице истинное значение высказывания обозначено символом 1, ложное значение обозначено символом 0. Из таблицы истинности получаем для логических операций следующие утверждения:

– отрицание $\neg Z$ ложно тогда и только тогда, когда Z – истинно;
– конъюнкция $X \wedge Y$ истинна тогда и только тогда, когда высказывания X и Y – истинны;
– дизъюнкция $X \vee Y$ ложна тогда и только тогда, когда высказывания X и Y – ложны;
– импликация $X \to Y$ ложна тогда и только тогда, когда посылка X истина, а заключение Y – ложно;
– эквиваленция $X \leftrightarrow Y$ истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания X и Y одновременно либо истинны, либо ложны;
– штрих Шеффера $X \mid Y$ ложен тогда и только тогда, когда оба высказывания X и Y – истины;
– стрелка Пирса $X \downarrow Y$ истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания X и Y – ложны;
– сумма Жегалкина $X + Y$ истинна тогда и только тогда, когда высказывания принимают различные логические значения.

Приложение 2. Законы логики.

Тавтологические импликации:

$X \wedge (X \to Y) \to Y$ – закон заключения;

$\left.\begin{array}{l} X \wedge Y \to X \\ X \wedge Y \to Y \end{array}\right\}$ – законы удаления конъюнкции;

$\left.\begin{array}{l} X \to X \vee Y \\ Y \to X \vee Y \end{array}\right\}$ – законы введения дизъюнкции;

$(X \vee Y) \wedge \neg Y \to X$ – закон удаления дизъюнкции;

$X \to \neg\neg X$ – закон введения двойного отрицания;

$\neg\neg X \to X$ – закон удаления двойного отрицания;

$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)$ – закон введения эквиваленции;

$$\left.\begin{array}{l}(X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)\\(X \leftrightarrow Y) \to (Y \to X)\end{array}\right\}$$ – законы удаления эквиваленции;

$(X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$ – закон контрапозиции для импликации;

$(\neg X \to Y) \wedge (\neg X \to \neg Y) \to X$ – закон доказательства от противного;

$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (X \to Z)$ – закон силлогизма;

$(X \to Z) \wedge (Y \to Z) \to (X \vee Y \to Z)$ – закон сложения посылок;

$(X \to Y) \wedge (X \to Z) \to (X \to Y \wedge Z)$ – закон умножения заключений;

$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \to (X \leftrightarrow Z)$ – закон транзитивности эквиваленции.

Тавтологические эквиваленции:

$X \leftrightarrow X$ – закон тождества;

$X \wedge X \leftrightarrow X$ – закон идемпотентности конъюнкции;

$X \vee X \leftrightarrow X$ – закон идемпотентности дизъюнкции;

$X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X$ – закон коммутативности конъюнкции;

$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X$ – закон коммутативности дизъюнкции;

$X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$ – закон ассоциативности конъюнкции;

$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$ – закон ассоциативности дизъюнкции;

$X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ – закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;

$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;

$\neg\neg X \leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания;

$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow X)$ – закон коммутативности эквиваленции;

$(X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)$ – закон контрапозиции для эквиваленции;

$\neg(X \vee Y) \leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$ – закон отрицания дизъюнкции;

$\neg(X \wedge Y) \leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$ – закон отрицания конъюнкции;

$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$ – закон противоположности;

$X \to (Y \to Z) \leftrightarrow Y \to (X \to Z)$ – закон перестановки посылок.

Тавтологии, выражающие одни операции через другие:

$X \to Y \leftrightarrow \neg X \vee Y$;

$X \to Y \leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$;

$X \vee Y \leftrightarrow \neg X \to Y$;

$X \vee Y \leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$;

$X \wedge Y \leftrightarrow \neg(X \to \neg Y)$;

$X \wedge Y \leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$;

$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Приложение 3. Определения операций над множествами. Основные свойства операций над множествами.

Под множеством понимают совокупность объектов (предметов или понятий), которая рассматривается как одно целое. Два множества A и B называются равными и пишут $A=B$, если A и B содержат одни и те же элементы.

$A\cup B\overset{def}{=}\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$	– объединение множеств A и B.
$A\cap B\overset{def}{=}\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$	– пересечение множеств A и B.
$A\setminus B\overset{def}{=}\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$	– разность множеств A и B.
Ω	– универсальное множество, которое содержит все остальные множества.
$\varnothing$	– пустое множество, которое не содержит ни одного элемента.
$\overline{A}=\Omega\setminus A\overset{def}{=}\{x \mid x\notin A\}$	– дополнение множества A.

Основные свойства операций над множествами.

$\varnothing\subset A$	– пустое множество содержится в любом множестве.
$A\cup\Omega=\Omega$.	
$A\cap\Omega=A$.	
$A\cup\overline{A}=\Omega$.	
$A\cap\overline{A}=\varnothing$.	
$\overline{\overline{A}}=A$	– закон инволюции.
$A\cup A=A$	– закон идемпотентность объединения.
$A\cap A=A$	– идемпотентность пересечения.
$A\cup B=B\cup A$	– коммутативность объединения.
$A\cap B=B\cap A$	– коммутативность пересечения.
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	– ассоциативность объединения.
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	– ассоциативность пересечения.
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	– дистрибутивность объединения относительно пересечения.
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	– дистрибутивность пересечения относительно объединения.
$\left.\begin{array}{l}\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}\\ \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}\end{array}\right\}$	– законы де Моргана для множеств.

ОГЛАВЛЕНИЕ