МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА

Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра

Методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)»

ВИТЕБСК
2017

УДК 512.64:514.442.2

Математика. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра: методические указания по к практическим занятиям для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)».

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2016.

Составители: ст. преп. Коваленко А. В.,
доц., д. т. н. Джежора А. А.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В. С.,
ст. преп. Дмитриев А. П.,
ст. преп. Завацкий Ю. А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В. Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по трём разделам курса «Математика»: аналитическая геометрия, линейная и векторная алгебра для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-53 01 01-01 и курса «Высшая математика» для студентов специальности 1-40 05 01-01. Методические указания предназначены для проведения практических занятий у студентов первого курса механико-технологического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ»
20 октября 2016 г., протокол № 3.

Рецензент: доц., к.ф.-м.н. Дунина Е. Б.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» 30 ноября 2016 г., протокол № 9.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч.-изд. лист. _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ №____

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплин «Математика» и «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих инженеров. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты механико-технологических специальностей в следующих семестрах.

Данные методические материалы предназначены для студентов механико-технологического факультета. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанным дисциплинам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Математика» и «Высшая математика» для студентов первого года обучения специальностей: 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-40 05 01-01.

В методических указаниях рассмотрены три раздела дисциплин «Математика» и «Высшая математика»: аналитическая геометрия, линейная и векторная алгебра. Согласно учебной программе курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов механико-технологических специальностей все эти разделы студенты должны изучить на 17 аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой указанных дисциплин для студентов механико-технологических специальностей, а также могут применяться на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в методических указаниях теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА» И «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-40 05 01-01 (ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР)

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями.
2. Булевы функции.
3. Множества. Пустое и универсальное множества. Подмножества.
4. Операции над множествами.
5. Свойства операций над множествами.
6. Векторы и линейные операции над ними.
7. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств.
8. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов линейного пространства.
9. Линейная зависимость и линейная независимость системы геометрических векторов.
10. Размерность и базис линейного пространства.
11. Проекция геометрического вектора на ось, её свойства.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе.
14. Векторное произведение векторов и его свойства.
15. Вычисление векторного и смешанного произведения в ортонормированном базисе.
16. Смешанное произведение векторов и его свойства.
17. Основные задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника, объём пирамиды).
18. Уравнение прямой проходящей через точку, с заданным нормальным вектором. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование.
19. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой проходящей через две точки и уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом.
20. Отклонение и расстояние точки от прямой. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
21. Взаимное расположение прямых на плоскости.
22. Уравнение плоскости, проходящей через точку, с заданным нормальным вектором. Общее уравнение плоскости в пространстве и его исследование.

23. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках.

24. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

25. Отклонение и расстояние точки от плоскости. Нормальное уравнение плоскости в пространстве.

26. Векторно-параметрическое, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

27. Общее уравнение прямой в пространстве. Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду.

28. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

29. Матрицы. Линейные операции над матрицами.

30. Определитель n-го порядка. Вычисление определителя второго и третьего порядка.

31. Свойства определителя.

32. Алгебраические дополнения и миноры элементов определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

33. Обратная матрица. Теоремы существования и единственности обратной матрицы.

34. Общие понятия о системах линейных уравнений. Решение систем методом Гаусса.

35. Решение систем линейных уравнений посредством матричного исчисления и по формулам Крамера.

36. Ранг матрицы, его свойства. Теорема Кронекера – Капелли.

37. Исследование произвольных систем линейных уравнений.

38. Однородные системы линейных уравнений.

39. Евклидово пространство.

40. Матрица перехода от одного базиса к другому базису линейного пространства.

41. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

42. Линейный оператор векторного пространства. Матрица линейного оператора. Операции над линейными операторами. Образ и ядро линейного оператора.

43. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

44. Линии второго порядка. Парабола и её характеристики.

45. Эллипс и его характеристики.

46. Гипербола и её характеристики.

47. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

48. Поверхности второго порядка.

49. Действительные числа. Модуль действительного числа.

50. Комплексные числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.

51. Комплексные числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.

52. Комплексные числа. Показательная форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.

53. Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей.

54. Многочлены и уравнения. Основная теорема алгебры.

55. Ограниченные и монотонные числовые последовательности.

56. Предел числовой последовательности и его свойства.

57. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности и их свойства.

58. Правила предельного перехода для числовых последовательностей.

59. Предел монотонной последовательности. Второй замечательный предел.

60. Предел функции и его свойства.

61. Бесконечно малые функции и их свойства. Бесконечно большие функции и их свойства.

62. Правила предельного перехода для функций.

63. Замечательные пределы функций.

64. Различные определения непрерывности функции в точке. Классификация точек разрыва.

65. Производная функции. Теорема о связи дифференцируемой и непрерывной функции.

66. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.

67. Производная степенной и показательной функции.

68. Производная тригонометрических функций.

69. Производная обратной функции. Производная обратно тригонометрических функций.

70. Производная обратной функции. Производная логарифмической функции.

71. Производная сложной функции. Производная гиперболических функций.

72. Основные правила дифференцирования.

73. Дифференциал функции. Его геометрический смысл и свойства.

74. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной неявно.

75. Производная функции, заданной параметрическим образом.

76. Производные высшего порядка. Механический смысл первой и второй производной.

77. Теорема Ролля и её геометрический смысл.

78. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл.

79. Теоремы Коши и её геометрический смысл.

80. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей различных типов.

81. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Пеано.

82. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Лагранжа.

83. Монотонные функции. Необходимое и достаточное условие монотонности функции.

84. Локальный экстремум функций одной переменной. Необходимое условие локального экстремума.

85. Локальный экстремум функций одной переменной. Достаточные условия локального экстремума.

86. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

87. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции.

88. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба.

89. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования асимптот графика функции.

90. Схема полного исследования функции.

91. Вектор-функция скалярного аргумента. Годограф. Предел и непрерывность вектор-функции в точке.

92. Производная вектор-функции скалярного аргумента и ее свойства.

93. Векторное и параметрические уравнения линий в пространстве. Уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ (практическое занятие 1)

Содержание: высказывания; операции над высказываниями; контактные схемы; булевы функции; логическое следствие, метод доказательства от противного.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 1.1.1 Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Вопросительные и восклицательные предложения, а также определения не являются высказываниями. Истинность или ложность высказывания рассматривается как его истинностное значение. Эти значения обозначаются 1 и 0 для значений «истина» и «ложь». Любое высказывание либо истинно, либо ложно, и никакое высказывание не является одновременно истинным и ложным.

Если суждение об истинности высказывания можно получить из самого высказывания, то такое высказывание называется элементарным или простым высказыванием. В противном случае будем иметь сложное высказывание. Из простых высказываний можно образовывать сложные высказывания с помощью логических операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и другие. Истинностное значение сложного высказывания зависит от истинностного значения элементарных высказываний.

Пусть A и B – произвольные высказывания, относительно которых мы не предполагаем, что известны их истинностные значения.

Определение 1.1.2 *Отрицанием* высказывания A называется новое высказывание $\neg A$ (читается «не A» или « неверно, что A»), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A является ложным.

Определение 1.1.3 *Конъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Определение 1.1.4 *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно.

Определение 1.1.5 *Импликацией* с посылкой A и заключением B называется новое высказывание $A \to B$ (читается «если A, то B», или «из высказывания A следует B», или «A влечёт B»), которое ложно тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

Определение 1.1.6 *Эквиваленцией высказываний* A и B называется новое высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается «A тогда и только тогда, когда B», или «A эквивалентно B», или «A необходимо и достаточно для выказывания B»), которое истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B принимают одинаковые истинностные значения.

Определения 1.1.1 – 1.1.5 можно записать в таблицы истинности 1.1.1.

Таблица 1.1.1 – Таблица истинности основных логических операций

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Понятие формулы логики высказываний определим следующим образом:

1) элементарные формулы (атомы) являются формулами логики высказываний;

2) если A и B – формулы, то $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$ тоже являются формулами логики высказываний;

3) только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из первого и второго пунктов.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если принять следующие соглашения: 1) будем опускать внешнюю пару скобок; 2) упорядочим знаки логических операций по старшинству: $\leftrightarrow, \to, \vee, \wedge, \neg$. При восстановлении скобок сначала расставляются все скобки, относящиеся ко всем вхождением знака $\neg$, затем ко всем вхождением знака $\wedge$ и так далее.

Формулы логики высказываний, которые принимают значение «истинна» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно истинной формулой, тавтологией или законом логики высказываний. Запись $\models X$ означает, что логическая формула A является формулой логики высказываний. Формулы логики высказываний, которые принимают значение «ложь» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно ложной формулой или противоречием. Для доказательства того, что формула является тавтологией, необходимо составить таблицу истинности для этой формулы и показать, что все элементы последнего столбца равны единице.

Функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая может принять одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает эти же значения 0 или 1, называют булевой функцией от n переменных. Для построения булевой функции применяют конъюнктивную и дизъюнктивную нормальную форму

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1} \left(x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n} \right),$$

где $x^{\alpha} = x$, если $\alpha = 1$, $x^{\alpha} = \neg x$, если $\alpha = 0$.

Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если для любого набора истинностных значений элементарных формул, входящих в формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, формула B получает значение «истина» каждый раз, когда каждая из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ получает значение «истина».

Запись $A_1, A_2, ..., A_n \models B$ означает, что формула B – логическое следствие формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

Метод доказательства от противного. Требуется доказать следствие $A_1, A_2, ..., A_n \models B$. Предположим $\begin{cases} B = 0, \\ A_i = 1, i = \overline{1, n} \end{cases}$. Если система имеет хотя бы одно решение, то следствие неверно, если решений нет, то следствие верно.

Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называются предикатами. По числу переменных, входящих в предикат, различают одноместные, двухместные и так далее предикаты. Для записи предикатов и высказываний вводятся два квантора: квантор общности и квантор существования. Для квантора существования употребляется символ $\exists$, для квантора общности символ $\forall$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Составить таблицу истинности для формулы логики высказываний: $A \wedge (B \to C) \leftrightarrow A \wedge C$.

Решение. Для заданной формулы составляем таблицу истинности.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \to C$	$A \wedge (B \to C)$	$A \wedge (B \to C) \leftrightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

1.2.2 Решить логическое уравнение: $p \vee q \wedge \neg g \to (q \leftrightarrow g) = 1$.

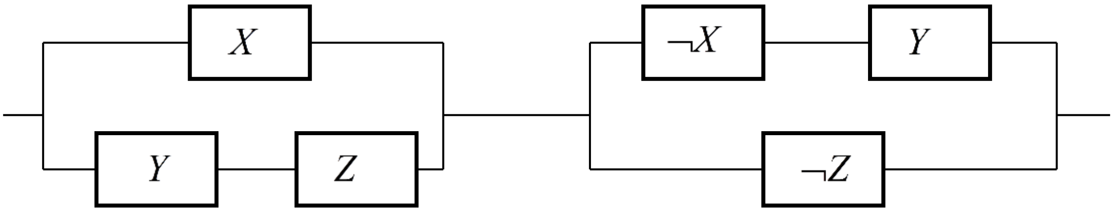
Решение. Составляем таблицу истинности и выбираем элементарные наборы $(p; q; g)$, при которых формула логики высказываний $p \vee q \wedge \neg g \to (q \leftrightarrow g)$ принимает значение «истина».

p	q	g	$\neg g$	$q \wedge \neg g$	$p \vee q \wedge \neg g$	$q \leftrightarrow g$	$p \vee q \wedge \neg g \to (q \leftrightarrow g)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Таким образом, решением заданного логического уравнения являются значения высказываний: $(1;1;1)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;0;0)$.

1.2.3 Построить контактную схему по заданной функции проводимости $A(X;Y;Z)$: $\left(X \vee Y \wedge Z\right) \wedge \left(\neg X \wedge Y \vee \neg Z\right)$. Установить, при каких наборах элементов, входящих в данную схему, она будет работоспособна.

Решение. Построим контактную схему по заданной функции проводимости.



Проверим работоспособность полученной контактной схемы, для чего составим таблицу истинности для указанной формулы.

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Z$	$\neg X \wedge Y$	$Y \wedge Z$	$X \vee Y \wedge Z$	$\neg X \wedge Y \vee \neg Z$	$A(X;Y;Z)$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Контактная схема работает при замыкании−размыкании контактов X, Y, Z: $(1;1;0)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$. Во всех остальных случаях контактная схема является неработоспособной.

1.2.4 Представить в явном виде булеву функцию, заданную таблицей.

$F(x_1;x_2;x_{3)}$	1	1	1	1	0	0	0	1
$\left(x_1;x_2;x_3\right)$	$(1;1;1)$	$(1;1;0)$	$(1;0;1)$	$(0;1;1)$	$(1;0;0)$	$(0;1;0)$	$(0;0;1)$	$(0;0;0)$

Решение. Используя свойства булевых функций, а именно совершенную дизъюнктивную нормальную форму, получаем формулы:

$$F(x_1;x_2;x_3) = (x_1 \wedge F(1;x_2;x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge F(0;x_2;x_3));$$

$$F(1;x_2;x_3) = (x_2 \wedge F(1;1;x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(1;0;x_3));$$

$$F(0;x_2;x_3) = (x_2 \wedge F(0;1;x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(0;0;x_3));$$

$$F(1;1;x_3) = (x_3 \wedge F(1;1;1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1;1;0));$$

$$F(1;0;x_3) = (x_3 \wedge F(1;0;1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1;0;0));$$

$$F(0;1;x_3) = (x_3 \wedge F(0;1;1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0;1;0));$$

$$F(0;0;x_3) = (x_3 \wedge F(0;0;1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0;0;0)).$$

Подставим в полученные формулы значения из таблицы.

$$F(0;0;x_3) = (x_3 \wedge 0) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = \neg x_3;$$

$$F(0;1;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1;0;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1;1;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = 1;$$

$$F(0;x_2;x_3) = (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) = x_2 \leftrightarrow x_3;$$

$$F(1;x_2;x_3) = (x_2 \wedge 1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_3);$$

$$F(x_1;x_2;x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg x_1 \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3).$$

1.2.5 Методом от противного проверить справедливость логического следствия $A \to B,\ A \to \neg B \models \neg A$.

Решение. Предположим от противное, то есть $\neg A = 0$, $A \to B = 1$ и $A \to \neg B = 1$. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} A = 1, \\ 1 \to B = 1, \\ 1 \to \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Высказывание B не может быть одновременно истинным и ложным, то есть система не имеет решения. Следовательно, логическое следование верно.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Составить таблицы истинности для указанных формул:

а) $X \wedge Y \to \neg X \leftrightarrow \neg Y \vee (X \to Y)$;

б) $A \vee (B \leftrightarrow C) \to \neg(B \wedge C \vee A)$;

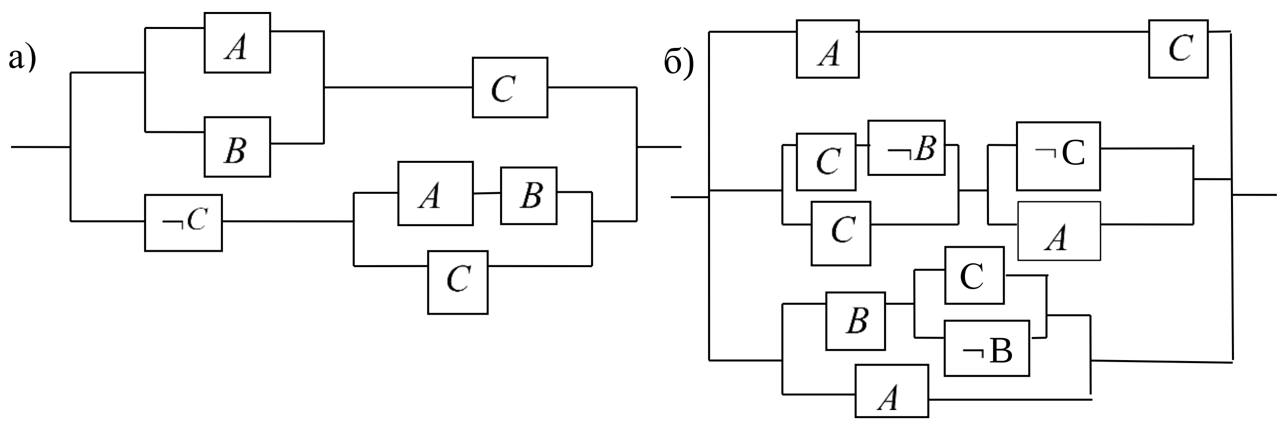
в) $(A \wedge B) \to (C \wedge \neg B \to A \vee C)$.

1.3.2 Решить логические уравнения:

а) $(A \leftrightarrow B \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \to B \vee C) = 1$;

б) $\neg(A \vee C \to B \wedge A) \leftrightarrow (\neg A \wedge C) = 0$.

1.3.3 Записать логические формулы для контактных схем функций проводимости и проверить их работоспособность.



1.3.4 Построить контактные схемы по заданным функциям проводимости. При каком замыкании-размыкании контактов X, Y и Z, которые входят в функцию проводимости, представленной логической формулой, электрическая цепь будет проводить ток, если логическая формула схемы имеет вид:

а) $\left(\left(\neg X \vee Y\right) \wedge Z\right) \vee \left(X \wedge \neg Y \wedge Z\right)$; б) $Y \wedge \left(\neg X \vee \left(X \wedge \left(Y \vee Z\right)\right)\right)$.

1.3.5 Представить в явном виде булевы функции F, которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

1.3.6 Представить в явном виде булеву функцию, заданную таблицей.

а)

$F(x_1;x_2)$	0	1	1	0
$(x_1;x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1;x_2;x_3)$	0	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

1.3.7 Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

а) $A \to B, A \to C, B \wedge C \models A$; б) $A \to B, C \to B, A \wedge C \models B$;

в) $A \to B, \neg B \models \neg A$; г) $A \to B, B \to C \models A \to C$.

1.3.8 Проанализировать справедливость следующих рассуждений:

а)

б) если число дробное, то оно рационально. Если число рациональное, то оно действительное. Следовательно, если число дробное, то оно действительное;

в) если число четное, то оно делится на два. Число делится на два. Следовательно, число четное;

г) если корни $ax^2 + bx + c$ не являются комплексными, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) > 0$. Корни $ax^2 + bx + c$ комплексные тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$. Если $ac < 0$, то не верно, что $D = b^2 - 4ac < 0$. Следовательно, если $ac < 0$, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) > 0$;

д) если $x + 3 = \sqrt{3 - x}$, то $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$, но $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$ тогда и только тогда, когда $\left(x + 6\right)\left(x + 1\right) = 0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Следовательно, $x+3=\sqrt{3-x}$ влечет $x=-6$ или $x=-1$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Составить таблицу истинности логической формулы относительно высказываний X,Y,Z: $(\neg(X\wedge Y)\leftrightarrow Z)\to Z\vee\neg X$.

1.4.2 Решить логическое уравнение $X\wedge Y\vee X\wedge Z\vee Y\wedge Z\vee(\neg X\to Z)=1$.

1.4.3 Построить контактную схему по заданной функции проводимости $((\neg X\vee Y)\wedge Z)\vee(X\wedge\neg Y\wedge Z)$. При каком замыкании-размыкании контактов X,Y и Z, которые входят в функцию проводимости, представленной логической формулой, электрическая цепь будет проводить ток?

1.4.4 Представить в явном виде булеву функцию F, которая задана в виде таблицы

$F(x_1;x_2;x_3)$	1	0	0	0	1	1	1	0
$(x_1;x_2;x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

Построить контактную схему, которая отражает формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

1.4.5 Методом от противного проверить справедливость логического следствия: $A\to B, B\to C\models A\to C$.

1.4.6 Проанализировать справедливость рассуждения: «Я пойду домой или останусь здесь и буду решать поставленные задачи. Я не пойду домой. Следовательно, я буду решать поставленные задачи».

2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. (практическое занятие 2)

Содержание: множество; пустое и универсальное множество; равенство множеств; операции над множествами.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Понятие множества является первоначальным и неопределяемым. Под *множеством* понимают совокупность объектов или предметов, которые объединены некоторым общим признаком. Эти объекты или предметы, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$.

Все множества делятся на конечные и бесконечные множества.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множества, которые состоят из бесконечного числа элементов, называются *бесконечными*. Если A является конечным множеством, то число его элементов называется мощностью множества и обозначается $|A|$.

Определение 2.1.1 Множества A и B называются *равными*, если любой элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент 2-го множества является элементом первого множества.

Равенство двух множеств A и B обозначают $A = B$. Равные множества, по определению, состоят из одних и тех же элементов. Для доказательства равенства множеств необходимо взять любой элемент одного множества и доказать, что он принадлежит второму множеству, и обратно.

Определение 2.1.2 Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Если множество A является подмножеством множества B, то записывают $A \subseteq B$ и читают «множество A является подмножеством множества B», или «множество A содержится во множестве B», или «A включено в множество B» и т. д.

Рассмотрим операции над множествами. Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется универсальным и обозначается буквой $\boldsymbol{U}$ или Ω.

Определение 2.1.3 *Объединением* множества A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (в частности, одновременно обоим множествам): $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Объединением множеств A_i, $i \in \boldsymbol{N}$, называется множество $\underset{i}{\cup} A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i. В частном случае, объединение конечного числа множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ будем обозначать $\underset{i=1}{\cup} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

Определение 2.1.4 *Пересечением* множества A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и B: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

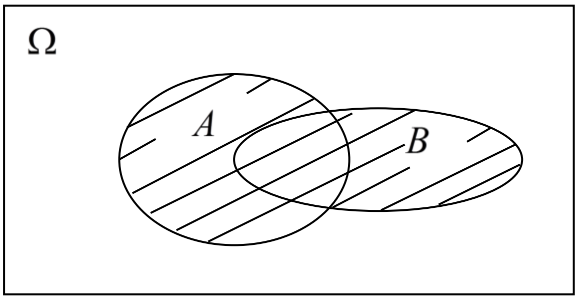
Пересечением множеств A_i, $i \in \boldsymbol{N}$ называется множество $\underset{i}{\cap} A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно всем множествам A_i. В частном случае, пересечение конечного числа множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ будем обозначать $\underset{i=1}{\cap} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$.

Определение 2.1.5 *Разностью* множества A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

Определение 2.1.6 *Дополнением* множества A до универсального множества Ω называется множество $\overline{A} = \Omega \setminus A$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат универсальному множеству и не принадлежат множеству A: $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\}$.

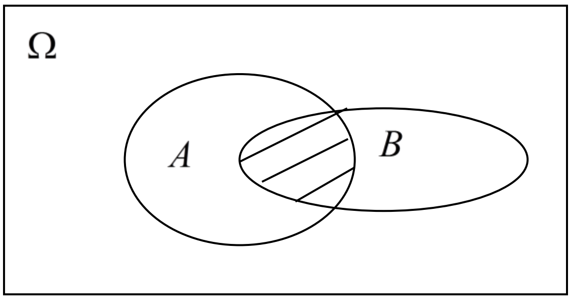
Геометрически операции над множествами интерпретируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

На рисунках 2.1.1 – 2.1.4 заштрихованные области изображают объединение, пересечение, разность и дополнение двух множеств, соответственно.



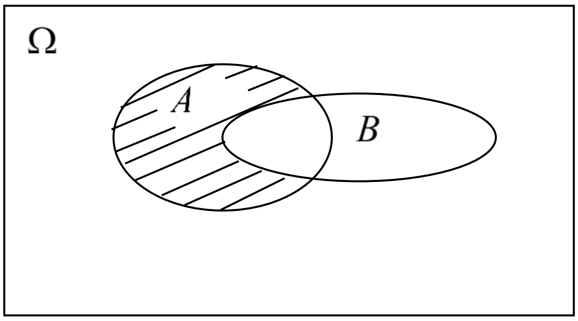
$A \cup B$

Рисунок 2.1.1 – Объединение



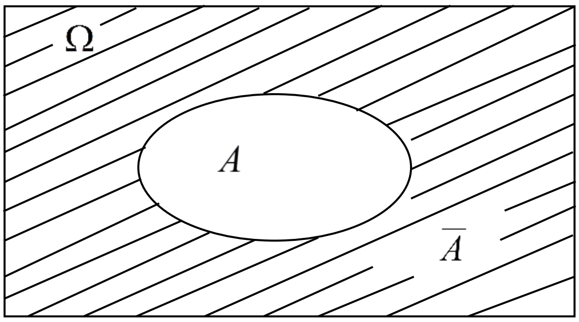
$A \cap B$

Рисунок 2.1.2 – Пересечение



A / B

Рисунок 2.1.3 – Разность



$\overline{A} = \Omega / A$

Рисунок 2.1.4 – Дополнение

Рассмотрим основные свойства операций над множествами.

$\varnothing \subset A$ – пустое множество содержится в любом множестве;

$A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \Omega = A$

$A \cup \overline{A} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{\overline{A}} = A$ – закон инволюции;

$A \cup A = A$ – закон идемпотентности объединения;

$A \cap A = A$ – идемпотентность пересечения;

$A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;

$A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность объединения;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – ассоциативность пересечения;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

$$\left.\begin{aligned}\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}\\ \overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}\end{aligned}\right\}$$ – законы де Моргана для множеств.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Описать перечислением всех элементов множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ и $B\setminus A$, если $A=\left\{x\in R\middle|x^2-5x+6=0\right\}$, $B=\left\{x\in R\middle|x^2-x-2=0\right\}$.

Решение. Запишем множества A и B перечислением их элементов, предварительно решив квадратные уравнения: $A=\{2;3\}$, $B=\{-1;2\}$.

$$A\cup B=\{-1;2;3\},\ A\cap B=\{2\},\ A\setminus B=\{3\},\ B\setminus A=\{-1\}.$$

2.2.2 Используя определение равенства множеств и операции над множествами, проверить равенство $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ и проиллюстрировать решение с помощью диаграммы Эйлера–Венна.

Решение. Рассмотрим два множества $M=A\cup(B\cap C)$ и $N=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Надо доказать, что $M=N$. Для того чтобы эти множества были равны, необходимо выполнение двух условий:

1) если $\forall x\in M$, то $x\in N$;

2) если $\forall x\in N$, то $x\in M$.

Проверим выполнимость условия 1). пусть $x\in M=A\cup(B\cap C)$. Тогда возможны два случая $x\in A$ или $x\in B\cap C$. Если $x\in A$, то $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$. Следовательно, $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)=N$. Если $x\in B\cap C$, то $x\in B$ и $x\in C$. Но тогда $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$, а это означает, что $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)=N$. Таким образом, в обоих случаях справедливо утверждение: если $x\in M$, то $x\in N$.

Проверим выполнимость условия 2). пусть $x\in N=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Тогда, $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$. Если $x\in A$, то $x\in A\cup(B\cap C)=M$. Если $x\notin A$, то $x\in B\cap C$, а, следовательно, $x\in A\cup(B\cap C)=M$.

Из выполнимости условий 1) и 2) следует справедливость заданного равенства $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера–Венна.

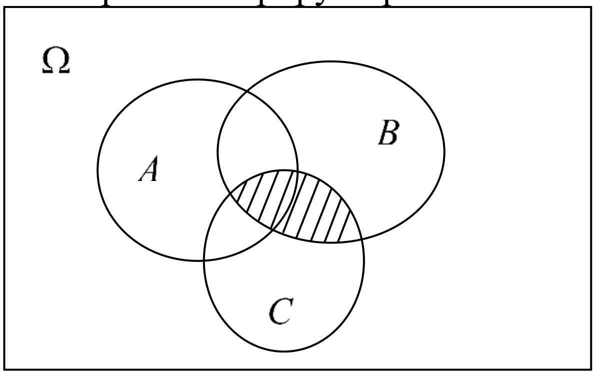


Диаграмма 2.2.1 – $B\cap C$

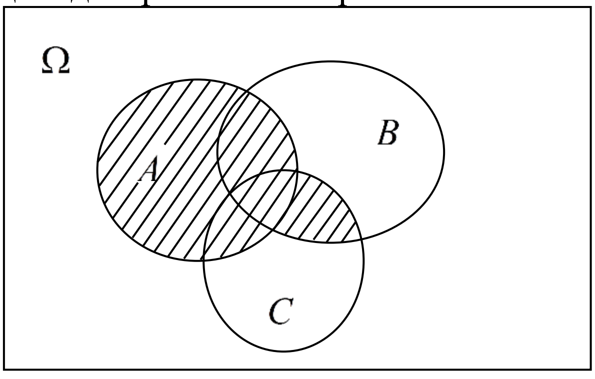


Диаграмма 2.2.2 – $A\cup(B\cap C)$

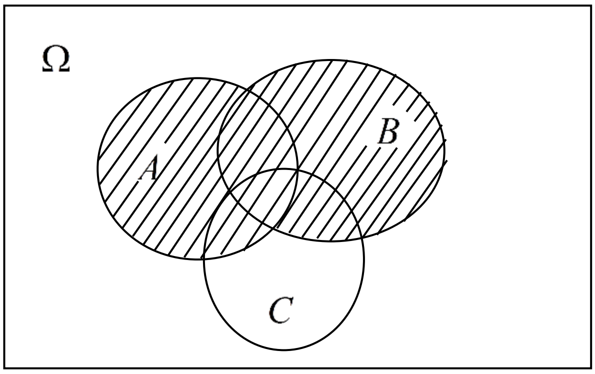


Диаграмма 2.2.3 – $A \cup B$

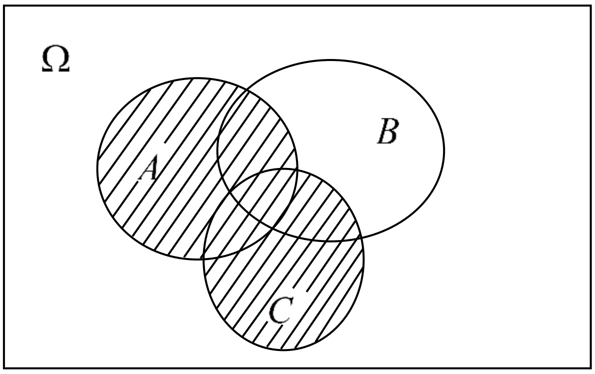


Диаграмма 2.2.4 – $A \cup C$

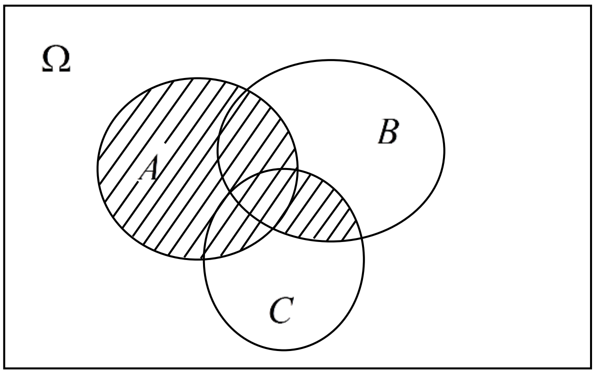


Диаграмма 2.2.5 – $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

На диаграмме 2.2.2 Эйлера–Венна заштрихованная область представляет собой левую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На диаграмме 2.2.5 Эйлера–Венна заштрихованная область представляет собой правую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Заштрихованные области на обеих диаграммах Эйлера-Венна совпадают. Следовательно, указанное равенство справедливо.

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Описать заданные множества перечислением своих элементов.

2.3.1.1 $A = \left\{ x \in R \middle| x^2 - 4x + 3 = 0 \right\}$; **2.3.1.2** $A = \left\{ x \in R \middle| x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0 \right\}$;

2.3.1.3 $A = \left\{ x \in R \middle| x^2 - 9x + 8 \le 0 \right\}$; **2.3.1.4** $A = \left\{ x \in R \middle| \log_{1/3} \frac{1}{x} \le 2 \right\}$;

2.3.1.5 $A = \left\{ x \in R \middle| \cos^2 3x = 0 \right\}$; **2.3.1.6** $A = \left\{ x \in R \middle| \sqrt{2 - x} = -x \right\}$.

2.3.2 Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

2.3.2.1 $x - y \le 5$; **2.3.2.2** $y \le x^2$; **2.3.2.3** $\sin 2x \ge 0{,}5$.

2.3.3 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \left\{ x \in R \middle| x^2 - 3x + 2 = 0 \right\}$, $B = \left\{ x \in R \middle| x^2 + x - 2 = 0 \right\}$.

2.3.4 Пусть задано некоторое множество $A=\left\{x\in R\,|\,x^2-4\le 0\right\}$ и множество $B=\left\{x\in R\,\big|\,|x|>1\right\}$. Заштриховать на числовой прямой пересечение, объединение и разность этих множеств.

2.3.5 Пусть A и B — конечные множества. Доказать, что $n(A\cup B)=$ $=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, где $n(M)$ — число элементов множества M.

2.3.6 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождества и проиллюстрировать решение с помощью диаграмм Эйлера$-$Венна.

а) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$;

б) $A\cap\big(B\cup(A\cap C)\big)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

в) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

г) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

д) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;

е) $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождество $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, проиллюстрировав решение с помощью диаграмм Эйлера$-$Венна.

2.4.2 Пусть $A-$множество всех точек плоскости, образующих стороны произвольного треугольника, вписанного в заданную окружность. Описать объединение и пересечение всех таких множеств, если:

а) треугольники произвольные;

б) треугольники правильные;

в) треугольники прямоугольные.

3 ВЕКТОРЫ
(практическое занятие 3)

Содержание: векторы; линейные операции над векторами.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В естественных науках рассматривают *скалярные* и *векторные* величины. Скалярная величина полностью характеризуется своим числовым значением (масса m, температура T, время t и т. д.). Векторная величина характеризуется своим числовым значением и направлением (скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, сила $\vec{F}$ и т. д.).

Вектор является математической моделью векторной величины. Существуют различные подходы к понятию вектора.

1. *Вектор* – направленный отрезок.

2. *Вектор* – упорядоченная тройка чисел, которая определённым образом преобразуется при переходе от одной системы координат к другой.

3. *Вектор* – определённое преобразование пространства.

Геометрический вектор* – *это направленный отрезок. Исходя из определения геометрического вектора, он характеризуется длиной и направлением. Для геометрического вектора вводятся понятия равенства, сложения и умножения на число. Вектор, например $\overrightarrow{AB}$, изображается направленным отрезком со стрелкой, где точка A – начало вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка приложения вектора), а точка B – конец этого вектора (рисунок 3.1.1).

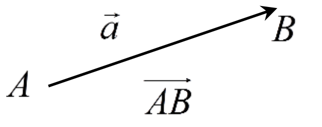


Рисунок 3.1.1 – $\overrightarrow{AB}$

Векторы могут обозначаться малыми буквами латинского алфавита: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д.

Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной вектора* или модулем вектора и обозначается, например, для вектора $\overrightarrow{AB}$ – $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

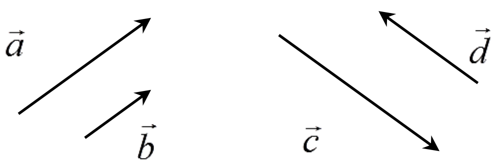


Рисунок 3.1.2 – Сонаправленность

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* и обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если они имеют одно и то же направление. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ называются *противоположно направленными* и обозначаются $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$, если они имеют противоположные направления (рисунок 3.1.2).

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковые длины и являются сонаправленными.

$$\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| \wedge \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

Следовательно, векторы можно переносить в пространстве, параллельно себе, поэтому векторы являются *свободными*. Свободный вектор – это множество всех направленных отрезков, равных между собой.

Нулевым вектором $\vec{o}$ называется вектор, начало и конец которого, совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю. Направление нулевой вектор не имеет. Вектор называется *единичным* или *ортом*, если длина его равна единице.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Рассмотрим линейные операции над векторами.

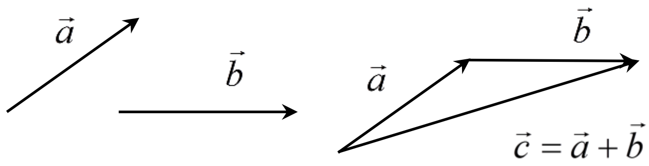


Рисунок 3.1.3 – Правило треугольника

Сложение векторов. *Правило треугольника*: *суммой двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который соединяет начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора

$\vec{b}$, причём начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рисунок 3.1.3).

Правило параллелограмма: *суммой двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, который является диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах и имеющий с ними общее начало (рисунок 3.1.4).

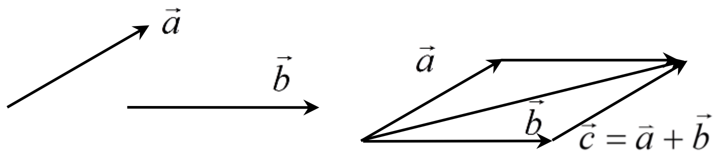


Рисунок 3.1.4 – Правило параллелограмма

Умножение вектора на число. *Произведением действительного числа* α *на ненулевой вектор* $\vec{a}$ называется вектор $\overrightarrow{\alpha a}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $\left|\overrightarrow{\alpha a}\right|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$; 2) $\overrightarrow{\alpha a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha>0$;

3) $\overrightarrow{\alpha a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha<0$; 4) $\overrightarrow{\alpha a}=\vec{o}$, если $\alpha=0$.

Если $|\alpha|>1$, то умножение вектора на число соответствует растяжению вектора $\vec{a}$ в $|\alpha|$ раз. Если $|\alpha|<1$, то умножение вектора на число соответствует сжатию вектора $\vec{a}$ в $1/|\alpha|$ раз.

Вектор $-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}$ называется вектор, противоположный вектору $\vec{a}$. Эти вектора имеют равные длины и противоположные направления. *Разностью двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, равный сумме $\vec{a}+(-\vec{b})$.

Рассмотрим пространство V геометрических векторов. Векторы, принадлежащие данному пространству, с введенными выше линейными операциями, очевидно, обладают следующими свойствами:

1) $\forall\vec{a},\vec{b}\in V,\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V,\ \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$;

3) $\forall\vec{a}\in V,\exists\vec{o}\in V,\ \vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$;

4) $\forall\vec{a}\in V,\exists\left(-\vec{a}\right)\in V,\ \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{o}$;

5) $\forall\vec{a}\in V,\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6) $\forall\vec{a}\in V,\forall\alpha,\beta\in R,\ \left(\alpha\cdot\beta\right)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\left(\beta\cdot\vec{a}\right)$;

7) $\forall\vec{a}\in V,\forall\alpha,\beta\in R,\ \left(\alpha+\beta\right)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;

8) $\forall\vec{a},\vec{b}\in V,\forall\alpha\in R,\ \alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Даны векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (рисунок 3.2.1 а). Изобразить на чертеже их линейную комбинацию $2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$.

Решение. Выбираем на плоскости произвольную точку A и откладываем от неё вектор $2\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, который совпадает по направлению с вектором $\vec{a}$ и имеет длину в два раза больше, чем этот вектор (рисунок 3.2.1 б). От точки B откладываем вектор $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, который по длине в два раза меньше вектора $\vec{b}$ и противоположен ему по направлению. Затем от полученной точки C строим вектор $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{c}$, который по длине равен одной трети вектора $\vec{c}$ и имеет с ним одно направление. Искомая линейная комбинация векторов $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ изображается вектором $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, который замыкает полученную ломаную, начало которой находится в начале вектора $2\vec{a}$, то есть в точке A, а конец в конце вектора $\frac{1}{3}\vec{c}$, а, следовательно, в точке D (рисунок 3.2.1 б).

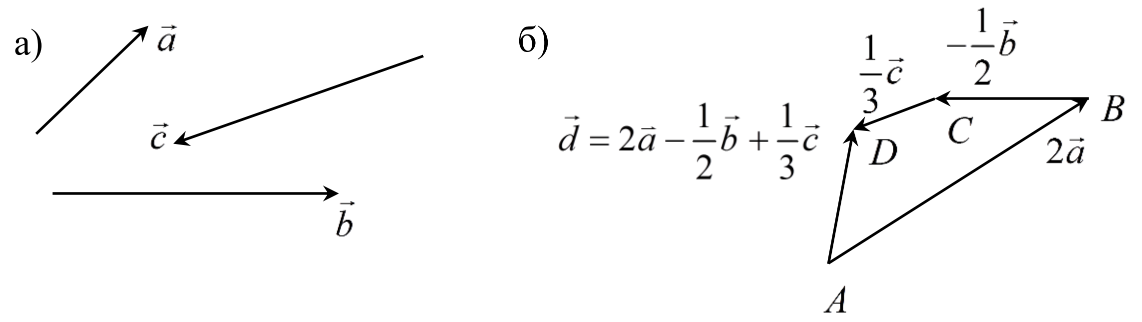


Рисунок 3.2.1 − Сумма векторов $2\vec{a}$, $-\vec{b}/2$ и $\vec{c}/3$

3.2.2 В равнобедренной трапеции $ABCD$ на стороне основания BC взята точка M, которая делит это основание в отношении $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 5:1$. Боковая сторона CD делится точкой N в отношении $|\overrightarrow{CN}| : |\overrightarrow{ND}| = 1:3$. Основание высоты BK делит отрезок AD в отношении $|\overrightarrow{AK}| : |\overrightarrow{KD}| = 1:7$. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

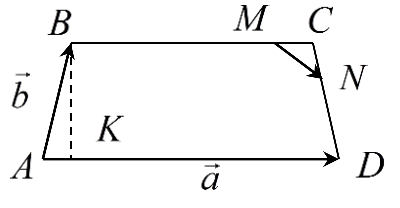


Рисунок 3.2.2 − Трапеция

Решение. Изобразим трапецию $ABCD$ с указанием необходимых векторов (рисунок 3.2.2) . Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} =$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=$$

$$=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{8}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{16}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{16}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\,.$$

3.2.3 Задан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить через векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$, где M и N – середины рёбер $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$, а K – точка пересечения медиан треугольника BCD.

Решение. Построим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. с указанием необходимых векторов (рисунок 3.2.3).

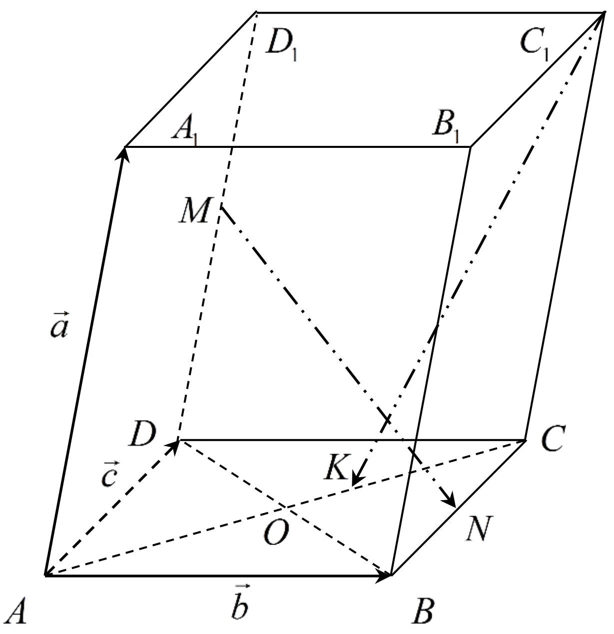


Рисунок 3.2.3 – Параллелепипед

Выразим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число. Находим вектор $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1D}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$$
$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\,.$$

Разложим вектор $\overrightarrow{C_1K}$ по заданным векторам векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{C_1K}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=$$

$$=-\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\,.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить их линейные комбинации: а) $3\vec{a}-2\vec{b}$; б) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

3.3.2 В параллелограмме $ABCD$ заданы векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3.3.3 Три вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$ являются сторонами треугольника. Выразить медианы треугольника $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CK}$ через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CK}$.

3.3.4 В треугольнике задачи 3.3.3 выразить все медианы через два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

3.3.5 Сторона AB треугольника ABC разделена на пять равных частей, и все точки деления K, L, M, N соединены с противолежащей вершиной C. Обозначив стороны треугольника $\overrightarrow{AC}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{q}$, найти выражения для векторов AK, AL, AM, AN.

3.3.6 Три вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$ являются сторонами треугольника. Найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

3.3.7 В ромбе $ABCD$ заданы диагонали $\overrightarrow{AC}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{n}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

3.3.8 В равнобедренной трапеции $ABCD$ известно нижнее основание $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, боковая сторона $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$ и угол между ними $\angle A=60^0$. Разложить по $\vec{m}$ и $\vec{n}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали заданной трапеции $ABCD$.

3.3.9 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

3.3.10 На трёх некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ построен параллелограмм $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить через $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы, совпадающие со всеми остальными рёбрам, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

3.3.11 Какой особенностью должны обладать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$; 4) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

3.3.12 В тетраэдре $ABCD$ даны рёбра, выходящие из вершины A: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}, \overrightarrow{AC}=\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{p}$. Выразить через заданные векторы остальные рёбра тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AL}$, где L – центр тяжести грани BCD.

3.3.13 Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а O – произвольная точка пространства, не лежащая в плоскости треугольника. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{DE}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, где D и E – середины векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, соответственно.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Три вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ являются рёбрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки $E, F, G, H, I, J, L, M,$ N, P, Q – середины рёбер $AB, BC, CD, AD, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$ и A_1D_1, соответственно. Точки O и O_1 являются, соответственно, точками пересечения диагоналей параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки R, S, T и U – точки пересечения медиан треугольников $ABD, BCD, A_1B_1C_1, A_1D_1C_1$, соответственно. Выразить через $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ указанные векторы.

3.4.1.1	$\overrightarrow{EQ}, \overrightarrow{MS}$.	**3.4.1.2**	$\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{MR}$.	**3.4.1.3**	$\overrightarrow{EN}, \overrightarrow{NS}$.
3.4.1.4	$\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{NR}$.	**3.4.1.5**	$\overrightarrow{FQ}, \overrightarrow{PS}$.	**3.4.1.6**	$\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{PR}$.
3.4.1.7	$\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{LS}$.	**3.4.1.8**	$\overrightarrow{GN}, \overrightarrow{LR}$.	**3.4.1.9**	$\overrightarrow{GQ}, \overrightarrow{LT}$.
3.4.1.10	$\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{LU}$.	**3.4.1.11**	$\overrightarrow{HN}, \overrightarrow{KS}$.	**3.4.1.12**	$\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{KR}$.
3.4.1.13	$\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{KT}$.	**3.4.1.14**	$\overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{KU}$.	**3.4.1.15**	$\overrightarrow{KQ}, \overrightarrow{JR}$.
3.4.1.16	$\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{JR}$.	**3.4.1.17**	$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{JT}$.	**3.4.1.18**	$\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{JU}$.
3.4.1.19	$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{IS}$.	**3.4.1.20**	$\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{IR}$.	**3.4.1.21**	$\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IT}$.
3.4.1.22	$\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IU}$.	**3.4.1.23**	$\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{HT}$.	**3.4.1.24**	$\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{HU}$.
3.4.1.25	$\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{GT}$.	**3.4.1.26**	$\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{GU}$.	**3.4.1.27**	$\overrightarrow{LE}, \overrightarrow{FT}$.
3.4.1.28	$\overrightarrow{LF}, \overrightarrow{FU}$.	**3.4.1.29**	$\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{ET}$.	**3.4.1.30**	$\overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{EU}$.

4 ДЕКАРТОВАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ
(практическое занятие 4)

Содержание: линейная зависимость и линейная независимость векторов; базис на плоскости и в трёхмерном пространстве, декартовая система координат на плоскости и в пространстве, координаты вектора, длина вектора, направляющие косинусы.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим систему векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ линейного пространства L.

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ называется выражение вида:

$\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{x_i}$, где $\alpha_i \in R$ и $i=\overline{1,n}$.

Определение 4.1.1 Система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ линейного пространства L называется *линейно-зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_m^2\neq 0\right)$, что линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1\overrightarrow{x_1}+...+\alpha_n\overrightarrow{x_n}=\vec{o}$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах $(\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0)$, то система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ называется *линейно-независимой*.

Теорема 4.1.1 Два ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 4.1.2 Три ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они компланарные.

Теорема 4.1.3 Любые четыре геометрических вектора трехмерного пространства являются линейно-зависимыми векторами.

Любой геометрический вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам.

Определение 4.1.2 *Базисом* линейного пространства L, размерности n называется любая упорядоченная совокупность n линейно-независимых векторов этого пространства.

Базисом линейного пространства V^3 является любая совокупность трех некомпланарных векторов. Наиболее часто используют ортонормированный базис. Ортонормированный базис $B = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ состоит из трех взаимно ортогональных единичных векторов: $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ и $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Координаты вектора представляют проекцию вектора на соответствующие базисные векторы. Для того чтобы сложить два вектора, необходимо сложить соответствующие координаты. Умножение вектора на число означает умножение каждой координаты на это число.

Базисом линейного пространства V^2 является любая совокупность двух неколлинеарных векторов. Наиболее часто используется ортонормированный базис $B = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$, который состоит из двух взаимно ортогональных единичных векторов: $\vec{i} \perp \vec{j}$ и $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, где a_x, a_y – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Сложение и умножение вектора на скаляр вводится аналогично, как и для линейного пространства V^3.

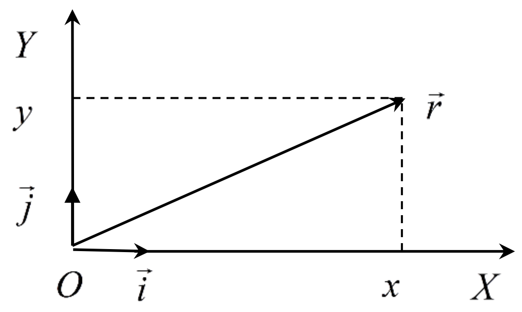


Рисунок 4.1.1 – Система координат на плоскости

Декартовой системой координат на плоскости называется совокупность точки и любых двух неколлинеарных векторов. Наиболее часто используется прямоугольная декартовая система координат – $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$. В пространстве $\boldsymbol{R}^2$ прямоугольная декартовая система координат представляет собой совокупность взаимно перпендикулярных осей OX и OY, которые называются *осями координат*, и точки O – *начало координат* (рисунок 4.1.1). Единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, направленные вдоль осей OX и OY соответственно, образуют прямоугольный базис. Любой точке $M(x;y)$ в декартовой системе координат будет соответствовать вектор $\vec{r}$, который называется *радиус*-вектором. Он имеет те же координаты, что и точка M. Таким образом, любой радиус-вектор можно единственным образом разложить по базисным векторам: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Аналогично вводится декартовая система координат в пространстве, как совокупность точки и любых трех некомпланарных векторов. Наиболее часто используется прямоугольная декартовая система координат – $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ прямоугольная декартовая система координат представляет собой совокупность взаимно перпендикулярных осей OX, OY и OZ, которые называются *осями координат*, и точки O – *начало координат* (рисунок 4.1.2). Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$, направленные вдоль осей OX, OY и OZ соответственно, образуют прямоугольный базис. Любой точке $M(x;y;z)$ в системе координат будет соответствовать единственный вектор $\vec{r}$, который называется *радиус-вектором*, с теми же координатами, что и точка M. Таким образом, любой радиус-вектор можно единственным образом разложить по базисным векторам: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

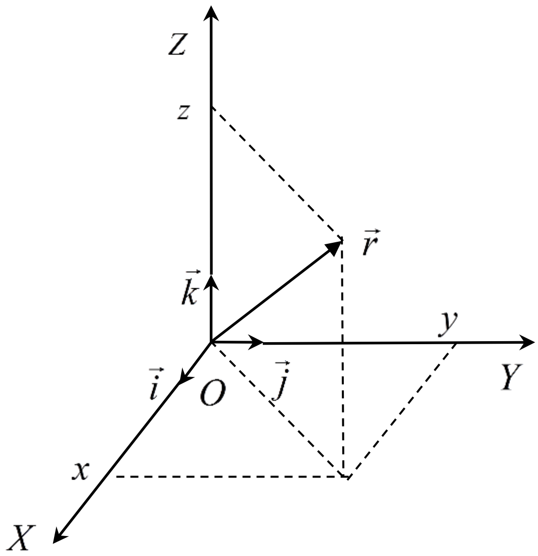


Рисунок 4.1.2 – Система координат в пространстве

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$.

Координаты вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\vec{r}$ на базисные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно, а длина вектора $\vec{r}$ равна

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{4.1.1}$$

Если $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – произвольные точки пространства, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\,. \tag{4.1.2}$$

Отсюда на основании (4.1.1) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{4.1.3}$$

Если точка $M(x;y;z)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, то её координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (4.1.4)$$

В частном случае, если точка M делит указанный отрезок пополам, то есть $\lambda = 1$, формулы (4.1.4) принимают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (4.1.5)$$

Кроме линейных операций над векторами вводятся и другие нелинейные операции. При рассмотрении этих операций необходимо ввести понятия матриц и определителей второго и третьего порядков, а также методы решения систем алгебраических уравнений.

Матрицей размерности 2×2 называется таблица чисел, содержащая две строки и два столбца.

Определителем второго порядка называется число $|A| = \det A$, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c. \qquad (4.1.6)$$

Матрицей размерности 3×3 называется таблица чисел, содержащая три строки и три столбца.

Определителем третьего порядка называется число $|A|$, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad (4.1.7)$$

или

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \qquad (4.1.8)$$

Метод вычисления определителя по формуле (4.1.8) называется «правилом треугольника»: со знаком «+» выбираем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «–» выбираем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Рассмотрим один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений, а именно метод Крамера: $x_j = \Delta / \Delta_j$, где Δ – определитель основной матрицы системы (состоит из коэффициентов при неизвестных), а Δ_j – определитель, полученный путём замены j-го столбца основной матрицы системы столбцом свободных членов.

Понятие матриц и операции над ними, вычисление определителей произвольного порядка, а также методы решения систем линейных алгебраических уравнений разобраны в полном объёме на практических занятиях $14-17$.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 В условиях задачи 3.2.2 найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Решение. При решении задачи 3.2.2 было определено разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты вектора $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{16}; -\frac{1}{4}\right)$ в заданном базисе.

4.2.2 В условиях задачи 3.2.3 найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ в базисе $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. При решении задачи 3.2.3 были получены разложения векторов $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{C_1K} = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ в заданном базисе, то есть $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

4.2.3 Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(0;7;-3)$, $B(2;5;7)$ и $C(4;3;5)$. Вычислить длину медианы AL.

Решение. Найдем координаты точки L, которая, по определению медианы треугольника, делит сторону BC пополам. Воспользуемся формулами (4.1.5):

$$x_L = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3; \quad y_L = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4; \quad z_L = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{7+5}{2} = 6.$$

Находим длину медианы AL по формуле (4.1.3):

$$\left|\overrightarrow{AL}\right| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-7)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$

Пусть точка M является точкой пересечения медиан треугольника. Если AL является медианой, то, по свойству медианы, точка M делит медианы в отношении два к одному, считая от вершины A, то есть $\lambda=\frac{2}{1}=2$. Воспользуемся формулами (4.1.4): $x_M=\frac{x_A+2\cdot x_L}{1+2}=\frac{0+2\cdot 3}{3}=2;\ y_M=\frac{y_A+2\cdot y_L}{1+2}=\frac{7+2\cdot 4}{3}=5;$ $z_M=\frac{z_A+2\cdot z_L}{1+2}=\frac{-3+2\cdot 6}{3}=3$. Следовательно, точка $M(2;5;3)$.

4.2.4 Заданы векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$. Найти: а) координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}-3\vec{k}$; б) разложение вектора $2\vec{a}-\vec{b}+4\vec{k}$ по базису $B=\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$; в) координаты орта $\overrightarrow{c^0}$.

Решение. а) $\vec{a}+\vec{b}-3\vec{k}=(2;3;-2)+(1;-1;3)-3\cdot(2;6;3)=(3;2;1)-(6;18;9)=$ $=(-3;-16;-8)$; б) $2\vec{a}-\vec{b}+4\vec{k}=2\cdot\left(2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\right)-\left(\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)+4\cdot\left(2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}\right)=$ $=\left(4\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}\right)-\left(\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)+\left(8\vec{i}+24\vec{j}+12\vec{k}\right)=11\vec{i}+31\vec{j}+5\vec{k}$; в) $\overrightarrow{c^0}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=$

$$=\frac{2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}}=\frac{2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}}{7}=\frac{2}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}+\frac{3}{7}\vec{k}.$$

4.2.5 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}+12\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}|=26$.

Решение. Вектор $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)$ является коллинеарным вектору $\vec{a}$, а, следовательно, координаты векторов пропорциональны, то есть $\vec{x}=\alpha\vec{a}$ или $\vec{x}=(4\alpha;-3\alpha;12\alpha)$. По условию $|\vec{x}|=26$. Тогда $\sqrt{16\alpha^2+9\alpha^2+144\alpha^2}=13|\alpha|$ или $|\alpha|=2$. Вектор $\vec{x}$ образует с ортом $\vec{k}$ тупой угол, то есть $x_3=12\alpha<0$ и значение $\alpha<0$. Следовательно, $\alpha=-2$, а искомый вектор имеет координаты $\vec{x}=(-8;6;-24)$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Доказать, что для любых заданных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ векторы $\vec{x}+\vec{y},\ \vec{y}+\vec{z}$ и $\vec{z}-\vec{x}$ компланарны.

4.3.2 Доказать, что для любых некомпланарных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ векторы $-\vec{x}+5\vec{y}-3\vec{z},\ \vec{x}+2\vec{y}-\vec{z}$ и $\vec{z}-\vec{y}+3\vec{x}$ компланарны.

4.3.3 Даны три некомпланарных вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Найти значения параметра α, при которых векторы $\vec{x}+\vec{y}+\alpha\vec{z},\ \vec{x}+\alpha\vec{y}+\vec{z}$, $\alpha\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ компланарны.

4.3.4 В трапеции $ABCD$ известно отношение длин оснований: $\left|\overrightarrow{AB}\right|:\left|\overrightarrow{CD}\right|=5:3$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ в базисе $B=\left\{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right\}$.

4.3.5 Задана пирамида $ABCD$. В базисе из рёбер $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$ найти координаты векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{DM}$, где E и F – середины рёбер $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$, M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

4.3.6 В тетраэдре $OABC$ медиана AL грани ABC делится точкой M в отношении $\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{ML}\right| = 3:7$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{TM}$ в базисе $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, а точка T – середина ребра AB.

4.3.7 Найти координаты вектора $2\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{c}$, если $\vec{a} = (3;2;5)$, $\vec{b} = (1;4;7)$, $\vec{c} = (6;3;-2)$. Вычислить длину заданного вектора.

4.3.8 Выразить вектор $\vec{c} = (1;-7)$ через векторы $\vec{a} = (4;-2)$ и $\vec{b} = (3;8)$.

4.3.9 Найти вектор x, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 15$.

4.3.10 Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

4.3.11 Даны три вершины $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$ и $C(1;2;-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвёртую вершину D, противоположную B.

4.3.12 Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2;6)$, $B(2;8)$ и точка пересечения диагоналей $M(2;2)$. Найти две другие вершины.

4.3.13 На оси ординат найти точку C, равноудалённую от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

4.3.14 Треугольник задан координатами своих вершин $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

4.3.15 Вычислить длину биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(1;2;3)$, $B(4;4;9)$, $C(13;6;6)$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, образует острый угол с ортом $\vec{i}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $|\vec{x}| = p$.

4.4.1.1	$\vec{a} = (-2;3;-4),\ p = \sqrt{58}$.	**4.4.1.2**	$\vec{a} = (3;5;-1),\ p = \sqrt{105}$.
4.4.1.3	$\vec{a} = (5;2;3),\ p = 2\sqrt{57}$.	**4.4.1.4**	$\vec{a} = (-4;1;7),\ p = \sqrt{330}$.
4.4.1.5	$\vec{a} = (-3;8;6),\ p = \sqrt{109}$.	**4.4.1.6**	$\vec{a} = (4;-3;9),\ p = 2\sqrt{53}$.
4.4.1.7	$\vec{a} = (3;-7;1),\ p = \sqrt{177}$.	**4.4.1.8**	$\vec{a} = (-5;2;2),\ p = 2\sqrt{33}$.
4.4.1.9	$\vec{a} = (-1;2;-3),\ p = \sqrt{70}$.	**4.4.1.10**	$\vec{a} = (6;-7;6),\ p = \sqrt{149}$.
4.4.1.11	$\vec{a} = (5;-4;7),\ p = 6\sqrt{5}$.	**4.4.1.12**	$\vec{a} = (-6;2;-1),\ p = \sqrt{123}$.

4.4.1.13	$\vec{a}=(-1;-4;-2),\ p=3\sqrt{14}$.	**4.4.1.14**	$\vec{a}=(2;3;-7),\ p=\sqrt{310}$.
4.4.1.15	$\vec{a}=(9;-7;8),\ p=\sqrt{194}$.	**4.4.1.16**	$\vec{a}=(-7;8;-5),\ p=\sqrt{138}$.
4.4.1.17	$\vec{a}=(-5;4;6),\ p=7\sqrt{11}$.	**4.4.1.18**	$\vec{a}=(4;-2;5),\ p=3\sqrt{15}$.
4.4.1.19	$\vec{a}=(2;-2;-5),\ p=\sqrt{165}$.	**4.4.1.20**	$\vec{a}=(-7;-10;-3),\ p=\sqrt{158}$.
4.4.1.21	$\vec{a}=(-11;6;-4),\ p=\sqrt{346}$.	**4.4.1.22**	$\vec{a}=(6;-5;-4),\ p=\sqrt{231}$.
4.4.1.23	$\vec{a}=(1;3;5),\ p=7\sqrt{5}$.	**4.4.1.24**	$\vec{a}=(-3;-4;2),\ p=\sqrt{145}$.
4.4.1.25	$\vec{a}=(-12;-7;8),\ p=\sqrt{257}$.	**4.4.1.26**	$\vec{a}=(10;5;4),\ p=\sqrt{282}$.
4.4.1.27	$\vec{a}=(4;-7;3),\ p=2\sqrt{37}$.	**4.4.1.28**	$\vec{a}=(-4;5;-4),\ p=3\sqrt{19}$.
4.4.1.29	$\vec{a}=(-1;-5;-4),\ p=\sqrt{210}$.	**4.4.1.30**	$\vec{a}=(3;-13;12),\ p=\sqrt{322}$.

5 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ (практическое занятие 5)

Содержание: скалярное произведение векторов; проекция вектора на ось; механический смысл скалярного произведения векторов; угол между векторами; направляющие косинусы, как координаты единичного вектора; длина вектора; вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 5.1.1 *Скалярной проекцией* или просто *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, определенное равенством

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{e^{\text{o}}},\\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{e^{\text{o}}},\end{cases} \tag{5.1.1}$$

где точки A_1 и B_1 – ортогональные проекции точек A и B на ось l, соответственно. Вектор $\overrightarrow{e^{\text{o}}}$ задает направление оси l.

Проекция вектора вычисляется по формуле: $np_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle\left(\vec{a},\overrightarrow{e^{\text{o}}}\right)$.

Определение 5.1.2 *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла $\varphi=(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi. \tag{5.1.2}$$

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0\leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$;

3) $(\alpha\,\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\alpha\,\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$; 4) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 6) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Рассмотрим ортонормированный базис $B=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Предположим, что в этом базисе заданы векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ и $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$. Тогда скалярное произведение определяем по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3. \tag{5.1.3}$$

Длина вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Косинус угла между векторами: $\cos\varphi=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

Проекция вектора на другой вектор: $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$.

Определение 5.1.3 *Направляющими косинусами* вектора называются координаты единичного вектора по направлению заданного вектора.

Найдем координаты единичного вектора $\vec{a}^0$ для вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(a_1;a_2;a_3)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right).$$

Следовательно, направляющие косинусы равны

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

где α,β,γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с базисными векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, соответственно.

Замечание. Все указанные выше формулы приведены для трехмерного пространства. На плоскости указанные формулы также справедливы. Отличие состоит в отсутствии третьей координаты.

Механический смысл скалярного произведения. Работа A силы $\vec{F}$, произведённая этой силой при перемещении материальной точки на пути $|\vec{s}|$, определяемом вектором $\vec{s}$, вычисляется по формуле

$$A=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\left(\vec{F},\vec{s}\right). \tag{5.1.4}$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Даны длины векторов $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, и угол между ними равен 60^0. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=4\cdot6\cdot\cos60^0=12$, $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{12}{6}=2$.

5.2.2 Заданы векторы $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$, $\vec{b}=-6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{k}$. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ и $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$. Найти координаты единичного вектора $\overrightarrow{a^{o}}$. Какой угол (острый или тупой) образует вектор $\vec{a}$ с ортом $\vec{j}$?

Решение. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot 2-4\cdot 0+12\cdot 3=42.$$

Для определения угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим косинус угла между этими векторами:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3\cdot(-6)-4\cdot 3+12\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+3^2+(-2)^2}}=-\frac{54}{91}.$$

Следовательно, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\arccos\left(-54/91\right)=\pi-\arccos\left(54/91\right)$.

Вычислим проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{-6\cdot 4+3\cdot 0-2\cdot 3}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}}=\frac{-30}{5}=-6.$$

Для определения координат единичного вектора $\overrightarrow{a^{o}}$ вычисляем длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=13$. Находим координаты искомого единичного вектора:

$$\overrightarrow{a^{o}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}}{13}=\frac{3}{13}\vec{i}-\frac{4}{13}\vec{j}+\frac{12}{13}\vec{k}.$$

Координаты единичного вектора являются направляющими косинусами, следовательно, $\cos\beta=-4/13<0$, а поэтому угол между вектором $\vec{a}$ и ортом $\vec{j}$ является тупым углом.

5.2.3 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(-1;2;4)$, $B(-4;2;0)$ и $C(3;2;1)$.

Решение. Определим координаты и длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB}=\left(-4-(-1);2-2;0-4\right)=\left(-3;0;-4\right)$, $\quad\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+0^2+\left(-4\right)^2}=5$;

$\overrightarrow{AC}=\left(3-(-1);2-2;1-4\right)=\left(4;0;-3\right)$, $\quad\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+\left(-3\right)^2}=5$;

$\overrightarrow{BC}=\left(3-(-4);2-2;1-0\right)=\left(7;0;1\right)$, $\quad\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{7^2+0^2+1^2}=5\sqrt{2}$.

Находим углы треугольника: $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-3\cdot 4+0\cdot 0-4\cdot(-3)}{5\cdot 5}=0$,

тогда $\angle A=90^0$. Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$, то треугольник является равнобедренным, а, следовательно, $\angle B=\angle C=\dfrac{180^0-\angle A}{2}=45^0$.

5.2.4 Вычислить работу A силы $\vec{F}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $M(2;3;4)$ в положение $N(4;7;8)$.

Решение. Находим вектор $\overrightarrow{MN}=(4-2;7-3;8-4)=(2;4;4)$. Тогда работа силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$ равна: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}=2\cdot2-3\cdot4+5\cdot4=12\,(\textit{Дж.})$.

5.2.5 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3;6;-4)$ и $\vec{b}(8;5;-7)$, и удовлетворяет условию $(3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})\cdot\vec{x}=23$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ через x_1,x_2,x_3. Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ и $\vec{b}\cdot\vec{x}=0$. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}3x_1+6x_2-4x_3=0,\\ 8x_1+5x_2-7x_3=0,\\ 3x_1+2x_2+5x_3=23.\end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера: $x_j=\Delta/\Delta_j$, где Δ – определитель основной матрицы системы, а Δ_j – определитель, полученный путём замены *j*-го столбца столбцом свободных членов. Вычислим необходимые определители по формуле (4.1.8):

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&6&-4\\8&5&-7\\3&2&5\end{vmatrix}=3\cdot5\cdot5-7\cdot6\cdot3-4\cdot2\cdot8+4\cdot5\cdot3-8\cdot6\cdot5+7\cdot2\cdot3=-253;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&6&-4\\0&5&-7\\23&2&5\end{vmatrix}=0\cdot5\cdot5-7\cdot6\cdot23-4\cdot2\cdot0+4\cdot5\cdot23-0\cdot6\cdot5+7\cdot2\cdot0=-506;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&0&-4\\8&0&-7\\3&23&5\end{vmatrix}=3\cdot0\cdot5-7\cdot0\cdot3-4\cdot23\cdot8+4\cdot0\cdot3-8\cdot0\cdot5+7\cdot23\cdot3=-253;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&6&0\\8&5&0\\3&2&23\end{vmatrix}=3\cdot5\cdot23+0\cdot6\cdot3+8\cdot2\cdot0-0\cdot5\cdot3-8\cdot6\cdot23-0\cdot2\cdot3=-759.$$

Решение системы представляют собой координаты искомого вектора $\vec{x}$:
$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-506}{-253}=2$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-253}{-253}=1$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-759}{-253}=3$.

Итак, $\vec{x}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(2;1;3)$.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти $\vec{a}\cdot\vec{c}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{c}|=8$, $\angle(\vec{a};\vec{c})=\pi/3$.

5.3.2 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ образуют угол $\varphi=2\pi/3$ и $|\vec{a}|=4$, $|\vec{c}|=5$. Вычислить: а) $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$; б) $(4\vec{a}-3\vec{c})\cdot(3\vec{a}+2\vec{c})$; в) $(\vec{a}-\vec{c})^2$.

5.3.3 При каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{c}=3\vec{p}+\alpha\vec{q}$ окажутся коллинеарными, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные?

5.3.4 Найти угол между единичными векторами $\overrightarrow{e_1^{o}}$ и $\overrightarrow{e_2^{o}}$, если известно, что векторы $\vec{a}=\overrightarrow{e_1^{o}}+4\overrightarrow{e_2^{o}}$ и $\vec{b}=2\overrightarrow{e_1^{o}}-3\overrightarrow{e_2^{o}}$ перпендикулярны.

5.3.5 Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, если известно, что $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$.

5.3.6 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$.

5.3.7 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a}+4\vec{b})^2+(\vec{a}-5\vec{b})^2=206$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$.

5.3.8 Вычислить работу силы $\vec{F}$, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 20 метров под углом 60° к направлению силы, если $|\vec{F}|=20$ Н.

5.3.9 Заданы векторы $\vec{a}=4\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$. Вычислить $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})$, $(3\vec{a}-\vec{c})\cdot(2\vec{b}+5\vec{c})$, $|4\vec{a}-3\vec{c}|$, $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$ и $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$. Найти координаты единичного вектора $\overrightarrow{a^{o}}$. Какие углы (острые или тупые) образует вектор $\vec{a}$ с базисными ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$?

5.3.10 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(4;-2;1)$ и $C(-3;1;2)$.

5.3.11 Найти угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(2;1;5)$, $B(-3;-6;2)$ и $C(-3;4;-2)$.

5.3.12 Найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{a}(3;5;-1)$ и удовлетворяющего условию $\vec{a}\cdot\vec{x}=-70$.

5.3.13 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(4;5;-22)$ и $\vec{b}(2;3;-12)$, и удовлетворяет условию $(3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{x}=5$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.

5.3.14 Вычислить работу A равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F_1}(6;-5;-5)$ и $\vec{F_2}(-2;8;-7)$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $M(3;15;5)$ в положение $N(19;15;17)$. Найти угол между направлениями равнодействующей силы $\vec{F}$ и перемещения.

5.3.15 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ в ортонормированном базисе $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$. Требуется:

а) вычислить длины сторон и углы в треугольнике ABC;

б) вычислить проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$;

в) вычислить работу равнодействующей силы $\vec{F}$ сил $\vec{F_1}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{F_2}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{F_3}=\overrightarrow{DC}$, приложенных к материальной точке D, которая под воздействием силы перемещается прямолинейно из точки D в точку пересечения медиан треугольника ABC;

г) найти координаты единичного вектора для вектора $\overrightarrow{BD}$ и записать, какие углы (острые или тупые) образует вектор $\overrightarrow{BD}$ с базисными ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ $\vec{k}$;

д) найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\overrightarrow{CD}$ и удовлетворяющего условию $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{x}=t$.

5.4.1.1 $A(5;2;6),\ B(5;7;4),\ C(4;10;9),\ D(1;8;2),\ t=40.$

5.4.1.2 $A(-5;7;-7),\ B(5;-3;1),\ C(2;3;7),\ D(7;2;2),\ t=180.$

5.4.1.3 $A(6;5;8),\ B(3;5;8),\ C(8;4;1),\ D(1;-1;3),\ t=168.$

5.4.1.4 $A(1;2;0),\ B(3;5;7),\ C(2;-3;5),\ D(4;2;10),\ t=378.$

5.4.1.5 $A(-2;3;5),\ B(4;2;10),\ C(1;2;7),\ D(5;3;7),\ t=30.$

5.4.1.6 $A(4;0;6),\ B(2;6;5),\ C(6;4;-1),\ D(3;2;5),\ t=60.$

5.4.1.7 $A(3;3;6),\ B(2;-3;9),\ C(1;2;5),\ D(2;1;7),\ t=44.$

5.4.1.8 $A(3;-2;1),\ B(4;5;6),\ C(3;3;2),\ D(0;4;5),\ t=57.$

5.4.1.9 $A(-1;0;1),\ B(1;7;3),\ C(8;5;8),\ D(3;-1;2),\ t=128.$

5.4.1.10 $A(1;1;5),\ B(4;9;3),\ C(3;6;7),\ D(2;4;3),\ t=121.$

5.4.1.11 $A(2;-1;5),\ B(1;6;3),\ C(3;-9;8),\ D(0;7;1),\ t=-1290.$

5.4.1.12 $A(4;6;6),\ B(4;2;0),\ C(1;2;6),\ D(6;1;1),\ t=-306.$

5.4.1.13 $A(5;4;7),\ B(2;4;7),\ C(7;3;7),\ D(6;8;2),\ t=-24.$

5.4.1.14 $A(7;10;2),\ B(2;8;4),\ C(9;6;9),\ D(4;4;10),\ t=-217.$

5.4.1.15 $A(8;7;4),\ B(5;10;4),\ C(4;7;8),\ D(3;5;4),\ t=-18.$

5.4.1.16 $A(4;9;5),\ B(4;6;11),\ C(6;9;3),\ D(6;6;5),\ t=-105.$

5.4.1.17 $A(10;5;-5),\ B(5;6;-8),\ C(8;10;7),\ D(8;-6;4),\ t=-28.$

5.4.1.18 $A(4;2;10),\ B(2;3;5),\ C(5;3;7),\ D(1;-2;7),\ t=-9.$

5.4.1.19 $A(5;3;-7),\ B(1;2;7),\ C(4;2;0),\ D(2;3;5),\ t=-154..$

5.4.1.20 $A(1;9;7),\ B(0;2;0),\ C(5;3;10),\ D(4;3;5),\ t=-36.$

5.4.1.21 $A(1;4;9),\ B(2;-5;8),\ C(5;4;2),\ D(2;1;6),\ t=200.$

5.4.1.22 $A(6;3;1),\ B(3;2;8),\ C(2;-3;7),\ D(2;-1;7),\ t=-18.$

5.4.1.23 $A(-1;6;1),\ B(-1;1;6),\ C(0;4;-1),\ D(3;1;4),\ t=320.$

5.4.1.24 $A(5;8;3),\ B(1;2;-2),\ C(-1;0;2),\ D(3;5;4),\ t=-392.$

5.4.1.25 $A(-3;7;1),\ B(5;7;8),\ C(6;9;2),\ D(9;5;5),\ t=270.$
5.4.1.26 $A(1;-1;4),\ B(3;5;1),\ C(5;8;-1),\ D(5;5;4),\ t=-165.$
5.4.1.27 $A(9;4;4),\ B(4;5;7),\ C(7;9;6),\ D(7;5;3),\ t=52.$
5.4.1.28 $A(0;7;1),\ B(0;2;7),\ C(1;5;0),\ D(4;2;5),\ t=-135.$
5.4.1.29 $A(6;9;4),\ B(2;10;10),\ C(7;5;9),\ D(4;6;5),\ t=22.$
5.4.1.30 $A(2;8;-2),\ B(9;8;9),\ C(7;10;3),\ D(10;9;6),\ t=-594.$

6 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ (практическое занятие № 6)

Содержание: ориентация векторов; векторное произведение векторов; механический и геометрический смысл векторного произведения векторов; вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 6.1.1 Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, начала которых совмещены, называется *правой*, если смотреть с конца последнего вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки. Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется *левой*.

Определение 6.1.2 *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Рассмотрим свойства векторного произведения векторов.

1. Два ненулевых вектора коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, то есть $\vec{a}\parallel\vec{b}\leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2. Длина векторного произведения двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то есть $S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

3. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

4. $[\alpha\,\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\alpha\,\vec{b}]=\alpha\cdot[\vec{a},\vec{b}]$.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\quad \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.$

Рассмотрим ортонормированный базис $B=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Предположим, что в базисе заданы векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\ \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},\ \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$.

Тогда векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (6.1.1)$$

Механический смысл векторного произведения. Вращающий момент $\overrightarrow{M}$ силы $\overrightarrow{F}$, приложенный к точке B тела, закреплённого в точке A, вычисляется по формуле:

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F}. \qquad (6.1.2)$$

Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (6.1.3)$$

Рассмотрим треугольник $M_1M_2M_3$ с вершинами в точках $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot S_{\square}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}. \qquad (6.1.4)$$

Если треугольник $M_1M_2M_3$ задан на плоскости, а вершины имеют координаты $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$, то площадь этого треугольника равна

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}. \qquad (6.1.5)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}-4\vec{q}$, если $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=5$, $\angle(\vec{p};\vec{q})=30^{\circ}$.

Решение. $S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|(2\vec{p}+3\vec{q})\times(3\vec{p}-4\vec{q})\right|=$

$$=\left|6\vec{p}\times\vec{p}-8\vec{p}\times\vec{q}+9\vec{q}\times\vec{p}-12\vec{q}\times\vec{q}\right|=\left|\vec{o}-8\vec{p}\times\vec{q}-9\vec{p}\times\vec{q}-\vec{o}\right|=$$

$$=\left|-17\vec{p}\times\vec{q}\right|=17\cdot\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=17\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)=17\cdot4\cdot5\cdot\sin30^{\circ}=170\ (\textit{кв. ед.}).$$

6.2.2 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3;6;-4)$ и $\vec{b}(8;5;-7)$ и удовлетворяет условию $(3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})\cdot\vec{x}=23$. Вычислить длину вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$, который задан в базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ тройкой чисел x_1,x_2,x_3. Исходя из условия задачи, имеем $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b}\to\vec{x}\parallel\vec{a}\times\vec{b}\to\vec{x}=\alpha\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. Найдём векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & -4\\ 8 & 5 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -4\\ 5 & -7\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -4\\ 8 & -7\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ 8 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=-22\vec{i}-11\vec{j}-33\vec{k}.$$

Следовательно, $\vec{x}=\alpha\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-22\cdot\alpha\cdot\vec{i}-11\cdot\alpha\cdot\vec{j}-33\cdot\alpha\cdot\vec{k}$. Воспользуемся скалярным произведением векторов $(3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})\cdot\vec{x}=23$. Следовательно, $3\cdot(-22\alpha)+2\cdot(-11\alpha)+5\cdot(-33\cdot\alpha)=23$ или $\alpha=-1/11$. Находим координаты вектора $\vec{x}=\alpha\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-22\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot\vec{i}-11\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot\vec{j}-33\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot\vec{k}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. При одном и том же условии задач 5.3.11 и 6.2.2, но различном подходе к решению, получаем одни и те же координаты искомого вектора $\vec{x}$. Находим длину вектора $\vec{x}$: $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$ (*лин. ед.*).

6.2.3 В параллелограмме с вершинами $A(1;2)$, $B(4;6)$, $C(8;7)$ и $D(4;6)$ найти высоту $h=\left|\overrightarrow{BH}\right|$, проведённую к стороне AD.

Решение. Площадь параллелограмма находим по формуле $S_{\square}=\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot h$, откуда $h=S_{\square}\big/\left|\overrightarrow{AD}\right|$. Находим длину вектора $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$ (*лин. ед.*).

Площадь параллелограмма равна

$$S_{\square}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}4-1 & 6-2\\ 5-1 & 3-2\end{vmatrix}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=\mathrm{mod}(-13)=13\ (\textit{кв. ед.}).$$

Следовательно, длина высоты равна $h=S_{\square}\big/\left|\overrightarrow{AD}\right|=13/5=2,6$ (*лин. ед.*).

6.2.4 Найти координаты вращающегося момента силы $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, приложенной к точке $B(6;8;13)$ относительно точки $A(4;5;9)$.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2), предварительно найдя координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(6-4;8-5;13-9)=(2;3;4)$.

$$\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-23\vec{i}+22\vec{j}-5\vec{k}.$$

6.2.5 Задан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$ и $C(4;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Для вычисления площади найдём координаты необходимых для этого векторов: $\overrightarrow{AB}(1;3;2)$ и $\overrightarrow{AC}(3;2;3)$.

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(5\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-7)^2}=\frac{\sqrt{83}}{2}\ (\text{кв. ед.}).$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ образуют угол $\varphi=5\pi/6$, а также известны длины этих векторов: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{c}|=6$. Вычислить: а) $|\vec{a}\times\vec{c}|$; б) $|(3\vec{a}-5\vec{c})\times(2\vec{a}+5\vec{c})|$; в) $|(\vec{a}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{c})|$.

6.3.2 Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $2\vec{a}-3\vec{b}$ и $3\vec{a}-2\vec{b}$ были коллинеарные?

6.3.3 Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=150^{\circ}$.

6.3.4 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=6\vec{p}+7\vec{q}$, если $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=3$, $\angle(\vec{p};\vec{q})=60^{0}$.

6.3.5 Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=135^{\circ}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор $\overrightarrow{c^{o}}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такой, что: а) тройка векторов $\left\{\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c^{o}}\right\}$ правая; б) тройка векторов $\left\{\vec{b},\overrightarrow{c^{o}},\vec{a}\right\}$ левая.

6.3.6 Заданы векторы $\vec{a}(2;7;-3)$ и $\vec{b}(4;5;-2)$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{b}+3\vec{a})$; в) $(5\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-7\vec{b})$; г) $(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$.

6.3.7 В параллелограмме с вершинами $A(2;2)$, $B(4;5)$, $C(8;6)$ и $D(6;3)$ найти высоту $h=\left|\overrightarrow{BH}\right|$ к стороне CD.

6.3.8 Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;3;4)$, $B(3;5;9)$ и $C(7;9;-6)$.

6.3.9 В треугольнике с вершинами $A(6;8;1)$, $B(-4;7;3)$ и $C(0;3;5)$ найти высоту $h=\left|\overrightarrow{AH}\right|$.

6.3.10 Вычислить координаты вращающегося момента $\overrightarrow{M}$ силы $\vec{F}=-3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$, приложенной к точке $B(7;12;19)$ относительно точки $A(5;9;13)$.

6.3.11 Даны три силы $\vec{F_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F_2} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{F_3} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, приложенных к точке $B(4;7;16)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующих этих сил относительно точки $A(6;10;20)$.

6.3.12 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(1;2;-5)$ и $\vec{b}(4;3;2)$, и удовлетворяет условию $(2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \vec{x} = 272$. Вычислить длину вектора $\vec{x}$.

6.3.13 Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(1;2;3)$ и $\vec{c}(5;1;2)$, образует с ортом $\vec{k}$ острый угол и $|\vec{x}| = 1004$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = a_1\vec{p} + a_2\vec{q}$ и $\vec{b} = b_1\vec{p} + b_2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = m$, $|\vec{q}| = n$, $\angle(\vec{p};\vec{q}) = \varphi$.

6.4.1.1 $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = 4\vec{p} - 5\vec{q},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{q}| = 2,\ \varphi = 150^\circ$.

6.4.1.2 $\vec{a} = 6\vec{p} - 7\vec{q},\ \vec{b} = 8\vec{p} + 9\vec{q},\ |\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 3,\ \varphi = 135^\circ$.

6.4.1.3 $\vec{a} = 10\vec{p} + 11\vec{q},\ \vec{b} = 12\vec{p} - 13\vec{q},\ |\vec{p}| = 3,\ |\vec{q}| = 4,\ \varphi = 120^\circ$.

6.4.1.4 $\vec{a} = 13\vec{p} - 14\vec{q},\ \vec{b} = 15\vec{p} + 16\vec{q},\ |\vec{p}| = 5,\ |\vec{q}| = 6,\ \varphi = 90^\circ$.

6.4.1.5 $\vec{a} = 17\vec{p} + 18\vec{q},\ \vec{b} = 19\vec{p} - 20\vec{q},\ |\vec{p}| = 7,\ |\vec{q}| = 8,\ \varphi = 60^\circ$.

6.4.1.6 $\vec{a} = 6\vec{p} - 5\vec{q},\ \vec{b} = 4\vec{p} + 3\vec{q},\ |\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 5,\ \varphi = 45^\circ$.

6.4.1.7 $\vec{a} = 7\vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} - 7\vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 5,\ \varphi = 30^\circ$.

6.4.1.8 $\vec{a} = 7\vec{p} - 4\vec{q},\ \vec{b} = 5\vec{p} + 6\vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 8,\ \varphi = 150^\circ$.

6.4.1.9 $\vec{a} = 9\vec{p} + 6\vec{q},\ \vec{b} = 5\vec{p} - 3\vec{q},\ |\vec{p}| = 7,\ |\vec{q}| = 4,\ \varphi = 135^\circ$.

6.4.1.10 $\vec{a} = 5\vec{p} - 2\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} + 4\vec{q},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{q}| = 10,\ \varphi = 120^\circ$.

6.4.1.11 $\vec{a} = 11\vec{p} + 12\vec{q},\ \vec{b} = 10\vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 5,\ |\vec{q}| = 12,\ \varphi = 90^\circ$.

6.4.1.12 $\vec{a} = 10\vec{p} - 10\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 12\vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 7,\ \varphi = 60^\circ$.

6.4.1.13 $\vec{a} = 3\vec{p} + 5\vec{q},\ \vec{b} = 7\vec{p} - 6\vec{q},\ |\vec{p}| = 12,\ |\vec{q}| = 13,\ \varphi = 45^\circ$.

6.4.1.14 $\vec{a} = 16\vec{p} - 15\vec{q},\ \vec{b} = 14\vec{p} + 13\vec{q},\ |\vec{p}| = 3,\ |\vec{q}| = 15,\ \varphi = 30^\circ$.

6.4.1.15 $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 24,\ |\vec{q}| = 25,\ \varphi = 150^\circ$.

6.4.1.16 $\vec{a} = 4\vec{p} - 8\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} + 7\vec{q},\ |\vec{p}| = 6,\ |\vec{q}| = 5,\ \varphi = 135^\circ$.

6.4.1.17 $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = 4\vec{p} - 3\vec{q},\ |\vec{p}| = 5,\ |\vec{q}| = 14,\ \varphi = 120^\circ$.

6.4.1.18 $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = 7\vec{p} + 9\vec{q},\ |\vec{p}| = 11,\ |\vec{q}| = 13,\ \varphi = 90^\circ$.

6.4.1.19 $\vec{a} = 2\vec{p} + 9\vec{q},\ \vec{b} = 6\vec{p} - 5\vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 17,\ \varphi = 60^\circ$.

6.4.1.20 $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} + 5\vec{q},\ |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 18,\ \varphi = 45^\circ$.

6.4.1.21 $\vec{a}=12\vec{p}+13\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-4\vec{q},\ |\vec{p}|=6,\ |\vec{q}|=9,\ \varphi=30^{\circ}$.

6.4.1.22 $\vec{a}=5\vec{p}-9\vec{q},\ \vec{b}=9\vec{p}+5\vec{q},\ |\vec{p}|=5,\ |\vec{q}|=9,\ \varphi=150^{\circ}$.

6.4.1.23 $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q},\ \vec{b}=5\vec{p}-6\vec{q},\ |\vec{p}|=9,\ |\vec{q}|=10,\ \varphi=135^{\circ}$.

6.4.1.24 $\vec{a}=15\vec{p}-12\vec{q},\ \vec{b}=13\vec{p}+14\vec{q},\ |\vec{p}|=8,\ |\vec{q}|=12,\ \varphi=120^{\circ}$.

6.4.1.25 $\vec{a}=4\vec{p}+2\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-8\vec{q},\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=1,\ \varphi=90^{\circ}$.

6.4.1.26 $\vec{a}=6\vec{p}-5\vec{q},\ \vec{b}=4\vec{p}+3\vec{q},\ |\vec{p}|=9,\ |\vec{q}|=11,\ \varphi=60^{\circ}$.

6.4.1.27 $\vec{a}=-3\vec{p}+7\vec{q},\ \vec{b}=-2\vec{p}-5\vec{q},\ |\vec{p}|=8,\ |\vec{q}|=11,\ \varphi=45^{\circ}$.

6.4.1.28 $\vec{a}=6\vec{p}-9\vec{q},\ \vec{b}=5\vec{p}+3\vec{q},\ |\vec{p}|=6,\ |\vec{q}|=12,\ \varphi=30^{\circ}$.

6.4.1.29 $\vec{a}=6\vec{p}+5\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-8\vec{q},\ |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=3,\ \varphi=150^{\circ}$.

6.4.1.30 $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q},\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=2,\ \varphi=135^{\circ}$.

6.4.2 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ (***координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1***). Требуется:

а) вычислить площадь треугольника ABC;

б) вычислить длину высоты $h=|\overrightarrow{BN}|$ треугольника BCD;

в) вычислить величину момента силы $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$, приложенной к материальной точке D, которая под воздействием силы перемещается прямолинейно из точки D в точку пересечения медиан треугольника ABC.

7 СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ (практическое занятие 7)

Содержание: смешанное произведение векторов; геометрический смысл смешанного произведения; вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 7.1.1 *Смешанным произведением* векторов называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на вектор $\vec{c}$.

Рассмотрим свойства смешанного произведения векторов.

1. Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти три вектора компланарны.

2. Смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равно объему параллелепипеда построенного на этих векторах, если тройка векторов

правая, и объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, если тройка векторов левая.

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$.

Таким образом, если в смешанном произведении поменять местами два вектора, то знак смешанного произведения изменится на противоположный знак. Если же в смешанном произведении поменять местами все три вектора, то знак смешанного произведения не изменится.

Так как три некомпланарных вектора в трёхмерном пространстве образуют базис, то на основании первого свойства смешанного произведения, для доказательства некомпланарности векторов или доказательства того, что три вектора образуют базис необходимо показать, что смешанное произведение трёх векторов отлично от нуля.

Если смешанное произведение трёх векторов имеет положительный знак, то эта тройка векторов правая, на основании второго свойства. Если смешанное произведение отрицательное, то тройка векторов является левой.

Рассмотрим ортонормированный базис $B=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Предположим, что в базисе заданы векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$.

Тогда смешанное произведение векторов определяем по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{7.1.1}$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Объём параллелепипеда равен абсолютной величине смешанного произведения трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, на которых он построен:

$$V_{параллелепипеда}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{7.1.2}$$

Рассмотрим пирамиду $M_1M_2M_3M_4$ с вершинами в точках $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, $M_4(x_4;y_4;z_4)$. Объём пирамиды V вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\cdot V_{парал-да}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_1M_4}\right|=\frac{1}{6}\cdot\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}. \tag{7.1.3}$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют левую тройку и $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=2$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Решение. Найдём вектор векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$. Длина этого вектора равна $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ=6\cdot4\cdot1=24$; $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$; вектора $\vec{a}$,

$\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку. По условию векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку. Следовательно, $\vec{a}\times\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, то есть $\angle\left(\vec{a}\times\vec{b};\vec{c}\right)=180^{\circ}$. Находим смешанное произведение заданных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos180^{\circ}==24\cdot2\cdot(-1)=-48$.

7.2.2 Заданы векторы $\vec{a}(3;4;9)$, $\vec{b}(1;3;1)$ и $\vec{c}(5;6;2)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Какова ориентация тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Решение. Находим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}3&4&9\\1&3&1\\5&6&2\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot2+4\cdot1\cdot5-1\cdot6\cdot9-9\cdot3\cdot5-4\cdot1\cdot2+1\cdot6\cdot3=-69<0.$$

Так как смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отрицательно, то на основании второго свойства смешанного произведения указанные векторы образуют левую тройку.

7.2.3 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$, $C(4;2;6)$ и $D(5;2;3)$. Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

Решение. $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}V_{параллелепипеда}=\dfrac{1}{6}\mathrm{mod}\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}1&3&2\\3&2&3\\4&2&0\end{vmatrix}=$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\left(1\cdot2\cdot0+3\cdot3\cdot4+3\cdot2\cdot2-2\cdot2\cdot4-3\cdot3\cdot0-3\cdot2\cdot1\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\ (куб.\ ед.).$$

7.2.4 Доказать, что векторы $\vec{e}_1=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{e}_2=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ в этом базисе.

Решение. Векторы образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. Вычисляем смешанное произведение векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3=\begin{vmatrix}2&1&-3\\3&2&-5\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot1-5\cdot1\cdot1+3\cdot3\cdot1+3\cdot2\cdot1-3\cdot1\cdot1-5\cdot1\cdot2=1\neq0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, и вектор $\vec{a}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{e}_1+\beta\cdot\vec{e}_2+\gamma\cdot\vec{e}_3$, или в координатной форме получаем систему линейных уравнений, которую решим по формулам Крамера.

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma=6,\\ \alpha+2\beta-\gamma=2,\\ -3\alpha-5\beta+\gamma=-7.\end{cases}$$

$$\Delta=\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}6&3&1\\2&2&-1\\-7&-5&1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&6&1\\1&2&-1\\-3&-7&1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2&3&6\\1&2&2\\-3&-5&-7\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, $\alpha=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1,\ \beta=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1,\ \gamma=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1$ или $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку и $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=7$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Чему равно смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если они образуют левую тройку?

7.3.2 Заданы векторы $\vec{a}(5;6;8)$, $\vec{b}(3;1;2)$ и $\vec{c}(6;5;3)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Какова ориентация троек

а) $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$; б) $(\vec{a};\vec{c};\vec{b})$; в) $(\vec{c};\vec{a};\vec{b})$?

7.3.3 Установить, образуют ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ базис в множестве всех векторов, если:

а) $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(4;1;5)$ и $\vec{c}(2;3;-3)$; б) $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(3;1;0)$ и $\vec{c}(4;5;2)$.

7.3.4 Доказать, что при любых $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны.

7.3.5 Вычислить объём пирамиды $ABCD$, если $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$, $\overrightarrow{AD}=8\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

7.3.6 Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(3;1;4)$, $B(5;0;7)$, $C(6;3;2)$ и $D(4;9;5)$. Указать ориентацию векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

7.3.7 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ и $D(3;4;-3)$. Вычислить высоту $h=|\overrightarrow{DT}|$.

7.3.8 Доказать, что векторы $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}=6\vec{i}+9\vec{j}+14\vec{k}$ в этом базисе.

7.3.9 Доказать, что четыре точки $A(1;2;3)$, $B(2;6;5)$, $C(4;3;3)$ и $D(5;7;5)$ лежат в одной плоскости.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ (***координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1***). Требуется:

а) доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ образуют базис;

б) указать ориентацию векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;

в) найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если M – точка пересечения медиан треугольника BCD, а точка N делит ребро AD пополам;

г) вычислить объём пирамиды $ABCD$;

д) вычислить длину высоты $h = \left|\overrightarrow{AH}\right|$ пирамиды $ABCD$.

8 ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ
(практические занятия 8 – 9)

Содержание: уравнение прямой на плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через заданную точку; общее уравнение; векторно-параметрическое уравнение; параметрическое уравнение; каноническое уравнение; уравнение прямой проходящей через две точки; уравнение прямой в отрезках; уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом; нормальное уравнение, расстояние от точки до прямой; взаимное расположение прямых на плоскости.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим различные уравнения прямых на плоскости. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой на плоскости, рассматривают различные уравнения прямой на плоскости:

1) *уравнение прямой с заданным нормальным вектором и проходящей через точку* (*нормальный вектор* $\vec{n}(A;B)$ – любой вектор, перпендикулярный прямой; $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ – заданная и произвольная точка на этой прямой):

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0; \tag{8.1.1}$$

2) *общее уравнение прямой* (при условии $A^2+B^2>0$):

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0; \tag{8.1.2}$$

3) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (*направляющий вектор* $\vec{s}(m;n)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0;y_0)$, $M(x,y)$ – заданная и произвольная точка прямой с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t\in R$ – параметр):

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}; \tag{8.1.3}$$

4) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot m, \\ y=y_0+t\cdot n; \end{cases} \tag{8.1.4}$$

5) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}; \tag{8.1.5}$$

6) *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \qquad (8.1.6)$$

7) *уравнение прямой в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси ординат, то есть прямая проходит через точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \qquad (8.1.7)$$

8) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку* (прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и задан угловой коэффициент прямой $k = \mathrm{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси абсцисс):

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0); \qquad (8.1.8)$$

9) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом* (для прямой задан угловой коэффициент k, и прямая проходит через точку $B(0;b)$):

$$y = k \cdot x + b; \qquad (8.1.9)$$

10) *нормальное уравнение прямой* ($\vec{n}^0(\cos\alpha; \sin\alpha)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к прямой; p – расстояние от начала координат до прямой):

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (8.1.10)$$

Уравнение (8.1.10) является нормальным уравнением прямой при выполнении двух условий: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $-p \le 0$.

Для приведения общего уравнения прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к нормальному виду необходимо умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, причём $\mu \cdot C \le 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $l: A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (8.1.11)$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямых на плоскости.

1. Угол φ между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ находится из формулы $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \ne \dfrac{C_1}{C_2}$.

В случае выполнения последнего знака равенства прямые совпадают.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. Угол φ между прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ находится из формулы $\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1\,||\,\vec{s}_2 \leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2=0$.

3. Угол φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ находится из формулы $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Условие параллельности прямых: $k_2=k_1$.

Условие перпендикулярности: $k_1\cdot k_2=-1$.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Записать уравнение прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(6;8)$ и проходящей через точку $M_0(-1;-3)$. Привести общее уравнение прямой к общему виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

Решение: Воспользуемся уравнением (8.1.1): $6\cdot(x+1)+8\cdot(y+3)=0$. Общее уравнение прямой имеет вид: $3x+4y+15=0$. Для записи нормального уравнения прямой умножим общее уравнение прямой на интегрирующий множитель $\mu=-\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{1}{5}$. Тогда нормальное уравнение имеет вид: $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$. Расстояние от начала координат до прямой равно $p=3$.

8.2.2 Составить уравнение прямой l_1, которая перпендикулярна прямой $l:3x-7y+4=0$ и проходит через точку $M_0(2;-5)$. Найти расстояние от точки M_0 до прямой l.

Решение. По условию прямые l_1 и l перпендикулярны. Следовательно, в качестве направляющего вектора $\vec{s}_1$ прямой l_1 можно выбрать нормальный вектор $\vec{n}(3;-7)$ прямой l, так как он параллелен этой прямой. Для составления уравнения прямой l_1 воспользуемся каноническим уравнением прямой (8.1.5): $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-7}$. Общее уравнение прямой l_1 имеет вид: $7x+3y+1=0$.

Расстояние от точки M_0 до прямой l находим по формуле (8.1.11):

$$\rho(M_0;l)=\frac{|3\cdot2-7\cdot(-5)+4|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\frac{45}{\sqrt{58}}=\frac{45\cdot\sqrt{58}}{58}.$$

8.2.3 Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(7;1)$. Указать направляющий и нормальный вектор этой прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (8.1.6): $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y+3}{1+3}$. Каноническое уравнение прямой имеет вид $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}$ с направляющим вектором $\vec{s}(5;4)$. Общее уравнение прямой имеет вид $4x-5y-23=0$ с нормальным вектором $\vec{n}(4;-5)$.

8.2.4 Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $l:3x+8y-24=0$ и координатными осями.

Решение. Уравнение прямой l в отрезках (8.1.7) имеет вид $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$, где $a=8$ и $b=3$ – отрезки, отсекаемые прямой от осей координат Ox и Oy, соответственно. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник с катетами длиною 8 и 3 $(\textit{лин. ед.})$. Площадь треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12\ (\textit{кв. ед.})$.

8.2.5 Записать уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(1;2)$ и образует угол 45^0 с прямой $y=2x+3$.

Решение. Воспользуемся формулой $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, где $\varphi=45^0$ – угол между искомой и заданной прямой, $k_1=2$ – угловой коэффициент заданной прямой, k_2 – угловой коэффициент искомой прямой. Находим угловой коэффициент k_2 искомой прямой из уравнения $\left|\frac{k_2-2}{1+2k_2}\right|=\operatorname{tg}45^0$ или $\left|\frac{k_2-2}{1+2k_2}\right|=1$, которое равносильно двум уравнениям $\frac{k_2-2}{1+2k_2}=1$ и $\frac{k_2-2}{1+2k_2}=-1$. Решая полученные уравнения, находим два возможных угловых коэффициента $k_2=-3$ и $k_1=\frac{1}{3}$. Используя уравнение $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку (4.1.8), находим уравнения искомых прямых, удовлетворяющих условию задачи: $y=-3x+5$ или $y=x/3+5/3$.

8.2.6 Найти угол между прямой $l_1:3x-4y-2=0$ и прямой $l_2:5x+12y-22=0$. Определить координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Решение. Угол между прямыми найдём как угол φ между нормальными векторами прямых l_1 и l_2, то есть между векторами $\vec{n}_1(3;-4)$ и $\vec{n}_1(5;12)$, соответственно.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{3\cdot 5+(-4)\cdot 12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{5^2+12^2}}=-\frac{33}{65},\ \varphi=\arccos\left(-\frac{33}{65}\right)=\pi-\arccos\frac{33}{65}.$$

Угол между прямыми равен $\pi-(\pi-\arccos 33/65)=\arccos 33/65$.

Для определения точки пересечения прямых решим систему уравнений.

$$\begin{cases}3x-4y-2=0,\\ 5x+12y-22=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3x-4y=2,\\ 5x+12y=22.\end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 5 & 12\end{vmatrix}=56,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 22 & 12\end{vmatrix}=112,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 22\end{vmatrix}=56.$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{56}{56}=1.$$

Точка пересечения прямых l_1 и l_2 имеет координаты $M_0(2;1)$.

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 В задачах 8.3.1.1 – 8.3.1.3 требуется:

а) записать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

б) привести общее уравнение прямой к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

8.3.1.1 Прямая l задана точкой $M_0(3;-2)$ и нормальным вектором $\vec{n}(3;-4)$.

8.3.1.2 Прямая l задана точкой $M_0(1;2)$ и направляющим вектором $\vec{s}(12;-5)$.

8.3.1.3 Прямая l задана двумя своими точками $M_1(5;8)$ и $M_2(13;14)$.

8.3.2 Из точки $M_0(3;1)$ выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg}3$ к оси Ox и отражается от неё. Написать уравнения падающего и отражённого лучей.

8.3.3 Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(4;1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью равной 8.

8.3.4 Задана прямая $l: -3x+4y-1=0$ и точка $M_0(5;3)$. Требуется:

а) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l;

б) написать уравнение прямой l_1, проходящей через точку M_0 параллельно прямой l;

в) написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой l.

8.3.5 В задачах 8.3.5.1 – 8.3.5.4 исследовать взаимное расположение заданных прямых l_1 и l_2. При этом в случае параллельности найти расстояние между этими прямыми, а в случае пересечения, найти угол между этими прямыми и точку их пересечения.

8.3.5.1 $l_1: 3x-2y-11=0$, $\quad l_2: \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+4}{6}$.

8.3.5.2 $l_1: \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-2}{7}$, $\quad l_2: 4x - 5y + 36 = 0$.

8.3.5.3 $l_1: 4x - 5y - 2 = 0$, $\quad l_2: \dfrac{x-3}{10} = \dfrac{y-2}{8}$.

8.3.5.4 $l_1: \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+2}{7}$, $\quad l_2: 3x - 7y + 11 = 0$.

8.3.6 Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(3;4)$, $B(7;7)$ и $C(8;16)$. Требуется:

а) написать уравнение стороны AB;

б) написать уравнение высоты CH и вычислить ее длину $h = \left|\overrightarrow{CH}\right|$;

в) найти угол φ между высотой CD и медианой AM;

г) написать уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине B.

8.3.7 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;2)$ под углом $\pi/4$ к прямой $l: x = 2 - t,\ y = 3 + 4t$.

8.3.8 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;4)$ на одинаковых расстояниях от точек $B(3;7)$ и $C(6;1)$.

8.3.9 Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана одна из его вершин $A(7;13)$, и уравнения двух медиан $x - 5 = 0$ и $4x - 3y - 3 = 0$.

8.3.10 Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана одна из его вершин $B(1;1)$, и уравнения двух высот $2x + y - 23 = 0$ и $4x - 3y - 11 = 0$.

8.3.11 Уравнение одной из сторон некоторого угла $2x - 9y - 3 = 0$, а уравнение биссектрисы $4x - y + 11 = 0$. Найти уравнение второй стороны угла.

8.3.12 Написать уравнения сторон треугольника, зная координаты одной из его вершин $A(4;5)$, а также уравнения биссектрисы $4x - 3y + 5 = 0$ и высоты $3x - 4y - 15 = 0$, которые проведены из одной вершины.

8.3.13 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(6;9)$, а также уравнения медианы $x - 3y + 13 = 0$ и высоты $x + y - 7 = 0$, проведённых из различных вершин.

8.3.14 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $C(1;5)$, а также уравнения медианы $3x + 4y - 25 = 0$ и биссектрисы $x - 3y + 4 = 0$, проведённых из различных вершин.

8.3.15 В треугольнике MNP даны уравнения стороны MN $x + 7y - 6 = 0$ и биссектрис $x + y - 2 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$. Найти координаты его вершин.

8.3.16 Найти точку, симметричную точке $N(1;7)$ относительно прямой $2x - 5y + 4 = 0$.

8.3.17 Две стороны квадрата лежат на прямых: $x + y - 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$. Вычислить площадь заданного квадрата.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Требуется:

а) записать общее уравнение прямой AB;

б) найти каноническое уравнение прямой BC;

в) найти уравнение высоты CH и вычислить ее длину $h = \left|\overrightarrow{CH}\right|$;

г) найти уравнение медианы AM;

д) найти точку пересечения медианы AM и высоты CD, а также угол между высотой и медианой;

е) вычислить расстояние от точки C до прямой AB;

ж) написать уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A.

8.4.1.1	$A(1;-1), B(4;2), C(3;-5)$.	**8.4.1.2**	$A(6;-4), B(4;10), C(-4;2)$.
8.4.1.3	$A(-7;4), B(5;-5), C(-7;-2)$.	**8.4.1.4**	$A(4;-5), B(-3;1), C(10;-2)$.
8.4.1.5	$A(-3;5), B(4;0), C(-2;-6)$.	**8.4.1.6**	$A(-7;-4), B(3;2), C(0;2)$.
8.4.1.7	$A(0;7), B(-2;4), C(1;-3)$.	**8.4.1.8**	$A(-3;1), B(0;4), C(2;5)$.
8.4.1.9	$A(14;4), B(6;8), C(-3;-2)$.	**8.4.1.10**	$A(-1;4), B(9;5), C(1;0)$.
8.4.1.11	$A(1;6), B(6;1), C(-2;-3)$.	**8.4.1.12**	$A(7;3), B(1;10), C(4;-3)$.
8.4.1.13	$A(2;5), B(-3;-4), C(7;6)$.	**8.4.1.14**	$A(5;11), B(4;-1), C(3;8)$.
8.4.1.15	$A(6;-5), B(-8;-1), C(3;5)$.	**8.4.1.16**	$A(5;2), B(7;3), C(4;-3)$.
8.4.1.17	$A(4;7), B(5;-5), C(4;8)$.	**8.4.1.18**	$A(6;-3), B(-7;1), C(-4;5)$.
8.4.1.19	$A(1;-2), B(4;7), C(3;-8)$.	**8.4.1.20**	$A(3;-5), B(-5;4), C(2;-6)$.
8.4.1.21	$A(9;-5), B(3;-1), C(-6;4)$.	**8.4.1.22**	$A(6;-5), B(1;1), C(3;0)$.
8.4.1.23	$A(8;), B(0;-1), C(3;7)$.	**8.4.1.24**	$A(2;-1), B(3;1), C(4;-4)$.
8.4.1.25	$A(1;-6), B(-3;-1), C(1;5)$.	**8.4.1.26**	$A(8;-10), B(-5;7), C(-3;8)$.
8.4.1.27	$A(9;11), B(10;12), C(12;9)$.	**8.4.1.28**	$A(4;-5), B(-5;6), C(6;-4)$.
8.4.1.29	$A(10;2), B(12;5), C(3;-4)$.	**8.4.1.30**	$A(5;-6), B(-3;2), C(4;1)$.

9 ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ
(практическое занятие 10)

Содержание: уравнение плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через точку; общее уравнение плоскости и его исследование; уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости в отрезках; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости; взаимное расположение плоскостей.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим различные уравнения плоскостей в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение плоскости в пространстве, рассматривают различные уравнения плоскостей:

1) *уравнение плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через точку* (*нормальный вектор* $\vec{n}(A;B;C)$) – любой вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка на этой плоскости):

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0; \tag{9.1.1}$$

2) *общее уравнение плоскости* (при условии $A^2+B^2+C^2>0$):

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0; \tag{9.1.2}$$

3) *векторно-параметрическое уравнение плоскости* (*направляющие векторы* $\vec{p}(p_1;p_2;p_3)$, $\vec{q}(q_1;q_2;q_3)$ – любые два неколлинеарных вектора, параллельные плоскости; $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка плоскости с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $\alpha\in R,\ \beta\in R$ – параметры):

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\alpha\cdot\vec{p}+\beta\cdot\vec{q}; \tag{9.1.3}$$

4) *параметрические уравнения плоскости*:

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot p_1+\beta\cdot q_1, \\ y=y_0+\alpha\cdot p_2+\beta\cdot q_2, \\ z=z_0+\alpha\cdot p_3+\beta\cdot q_3; \end{cases} \tag{9.1.4}$$

5) *уравнение плоскости, проходящей через три точки* $M_i(x_i;y_i;z_i),\ i=1;2;3$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \tag{9.1.5}$$

6) *уравнение плоскости в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси ординат, значение c равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси аппликат, то есть плоскость проходит через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1; \tag{9.1.6}$$

7) *нормальное уравнение плоскости* (вектор $\vec{n}^0(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к плоскости; p – расстояние от начала координат до плоскости):

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{9.1.7}$$

Уравнение (9.1.7) является нормальным уравнением плоскости при выполнении двух условий: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; $-p\le 0$.

Для приведения общего уравнения плоскости $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ к нормальному виду необходимо умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, причём $\mu\cdot D\le 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до плоскости* $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0;\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9.1.8)$$

Угол φ между плоскостями $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ равен углу между нормальными векторами плоскостей, а, следовательно, его можно определить по формуле

$$\cos\phi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (9.1.9)$$

Условие параллельности плоскостей: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\ne\dfrac{D_1}{D_2}$.

В случае выполнения последнего знака равенства плоскости совпадают.

Условие перпендикулярности плоскостей: $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\leftrightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\leftrightarrow$ $\leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Написать уравнение плоскости π_1, проходящей через точку $M_0(2;1;3)$ параллельно плоскости $\pi: 2x-6y+3z+1=0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

Решение. Так как плоскости параллельны, то нормальные векторы являются коллинеарными. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости π_1 выбираем нормальный вектор плоскости π, то есть нормальный вектор плоскости π_1 имеет координаты: $\vec{n}_1(2;-6;3)$. Воспользуемся уравнением плоскости (9.1.1): $2\cdot(x-2)-6\cdot(y-1)+3\cdot(z-3)=0$ или $2x-6y+3z-7=0$.

Расстояние между плоскостями найдём как расстояние от точки $M_0(2;1;3)$ до плоскости $\pi: 2x-6y+3z+1=0$ по формуле (9.1.8):

$$\rho(\pi_1;\pi)=\rho(M_0;\pi)==\frac{|2\cdot 2-6\cdot 1+3\cdot 3+1|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{8}{7}.$$

9.2.2 Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;4;5)$, $M_2(5;7;9)$ и $M_3(6;8;6)$. Определить угол между полученной плоскостью и плоскостью π, заданной в задаче 9.2.1.

Решение. Находим уравнение плоскости $M_1M_2M_3$, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки (9.1.5):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 13x-10y-z-4=0.$$

Определим угол между плоскостью $13x-10y-z-4=0$ и плоскостью $2x-6y+3\cdot z-7=0$. Угол между плоскостями находим как угол между нормальными векторами плоскостей по формуле (9.1.9):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{M_1M_2M_3}}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right|\cdot\left|\vec{n}_{M_1M_2M_3}\right|} \frac{13\cdot2+(-10)\cdot(-6)+(-1)\cdot3}{\sqrt{13^2+(-10)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \frac{83}{21\sqrt{30}}.$$

Тогда угол между плоскостями равен значению $\varphi = \arccos\dfrac{83}{21\sqrt{30}}$.

9.2.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно векторам $\vec{a}(3;5;7)$ и $\vec{c}(4;1;3)$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости, а, следовательно, вектор их векторного произведения будет перпендикулярен плоскости и его можно выбрать в качестве нормального вектора.

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 8\vec{i} + 19\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Воспользуемся уравнением плоскости (9.1.1):

$$8\cdot(x-1)+19\cdot(y-2)-17\cdot(z-3)=0 \text{ или } 8x+19y-17z+5=0.$$

9.2.4 Вычислить объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью π: $3x-4y+6z-24=0$.

Решение. Запишем уравнение плоскости π в отрезках, то есть воспользуемся уравнением плоскости (9.1.6): $\dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{4}=1$. Тогда

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{3}\cdot S_{основания}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot 4 = 32\ (кв.\,ед.).$$

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Написать уравнение плоскости π_1, проходящей через точку $M_0(4;2;5)$ параллельно плоскости $\pi: 12x-3y+4z-13=0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

9.3.2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(0;1;2)$ и $\vec{a}_2(-1;0;1)$.

9.3.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;5;4)$ и $M_2(4;8;3)$ параллельно вектору $\vec{a}(3;2;7)$.

9.3.4 Написать уравнение плоскости π_1, проходящей через точки $M_1(3;4;5)$ и $M_2(1;-3;0)$ перпендикулярно плоскости $\pi: 2x-3y+5z-3=0$.

9.3.5 Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;1)$ и $M_3(2;1;1)$.

9.3.6 Вычислить объём пирамиды ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\pi:\ 5x-3y-7z+105=0$.

9.3.7 В задачах 9.3.7.1–9.3.7.3 исследовать взаимное расположение заданных плоскостей π_1 и π_2. При этом в случае параллельности найти расстояние между плоскостями, а в случае пересечения, найти угол между этими плоскостями.

9.3.7.1 $\pi_1: 2x-3y+6z-5=0,\quad \pi_2: 12x+3y-4z-19=0$.

9.3.7.2 $\pi_1: 12x-8y+3z-25=0,\quad \pi_2: \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{8}=1$.

9.3.7.3 $\pi_1: 20x+15y-12z-60=0,\quad \pi_2: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}-\dfrac{z}{5}=1$.

9.3.8 Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $\pi_1: x-3y+2z-5=0$ и $\pi_2: 3x-2y-z+3=0$.

9.3.9 Написать уравнение плоскости, равноудалённой от двух заданных плоскостей $\pi_1: 4x-y-2z-3=0$ и $\pi_2: 4x-y-2z-5=0$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$(***координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1***). Требуется:

а) найти уравнение плоскости ABC;

б) найти нормальное уравнение плоскости ABD и указать расстояние от этой плоскости до начала координат;

в) найти уравнение плоскости, которая параллельна векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$ и проходит через точку C;

г) вычислить расстояние от точки D до плоскости ABC;

д) найти угол между плоскостью ABD и плоскостью ABC.

10 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ
(практическое занятие 11)

Содержание: векторно-параметрическое уравнение прямой, параметрическое уравнение прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой в отрезках, общее уравнение прямой и её приведение к каноническому виду, взаимное расположение прямых в пространстве, взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим различные уравнения прямых в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой в пространстве, рассматривают различные уравнения прямой:

1) *общее уравнение прямой в пространстве*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \tag{10.1.1}$$

2) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (*направляющий вектор* $\vec{s}(m;n;p)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка прямой, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t \in R$ – параметр):

$$\vec{r} = \overline{r_0} + t \cdot \vec{s}; \tag{10.1.2}$$

3) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p; \end{cases} \tag{10.1.3}$$

4) *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \tag{10.1.4}$$

5) *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_i(x_i;y_i;z_i), i = 1;2$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10.1.5}$$

Угол φ между прямыми $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ совпадает с углом между направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Следовательно, угол между прямыми находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{10.1.6}$$

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Угол Θ между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ совпадает с углом между направляющим вектором $\vec{s}(m;n;p)$ прямой и нормальным вектором $\vec{n}(A;B;C)$ плоскости. Следовательно, угол между прямой и плоскостью находится из формулы

$$\sin\Theta = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (10.1.7)$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $\vec{s}\perp\vec{n} \leftrightarrow mA+nB+pC=0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\vec{s}\parallel\vec{n} \leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(5;-1;7)$ на плоскость $4x+7y-9z+3=0$.

Решение. Так как уравнение прямой является перпендикулярной заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора прямой выбираем нормальный вектор плоскости: $\vec{n}(4;7;-9)=\vec{s}$. Используя каноническое уравнение прямой (10.1.4), получаем искомое уравнение прямой: $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-7}{-9}$.

10.2.2 Найти точку пересечения прямой l и плоскости π, записав уравнение прямой l в каноническом виде, если заданы уравнения прямой и плоскости.

$$l:\begin{cases}3x+4y-6z-11=0;\\ 2x-3y+9z+4=0,\end{cases} \qquad \pi: x+4y-z-4=0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой l в каноническом виде. Для определения точки, которая принадлежит прямой, предположим, что одна из переменных равна нулю. Например, пусть $z=0$. В результате приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}3x+4y=11,\\ 2x-3y=-4.\end{cases}$$

Решение системы $x=1$, $y=2$. Таким образом, точка $M_0(1;2;0)$ принадлежит прямой l. В качестве направляющего вектора прямой l возьмём вектор векторного произведения нормальных векторов плоскостей, которые задают прямую l.

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -6\\ 2 & -3 & 9\end{vmatrix}=18\vec{i}-39\vec{j}-17\vec{k}.$$

Тогда уравнение прямой l в каноническом виде: $\dfrac{x-1}{18}=\dfrac{y-2}{-39}=\dfrac{z}{-17}$. Для определения точки пересечения прямой и плоскости запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 18t, \\ y = 2 - 39t, \\ z = -17t. \end{cases}$$

Подставляя переменные x, y и z в уравнение плоскости π, находим значение параметра t: $\pi : 1 + 18t + 4 \cdot (2 - 39t) + 17t - 4 = 0$, $t = \dfrac{5}{121}$. Подставляя значение параметра t в последнюю систему, определяем координаты точки пересечения прямой l с плоскостью π: $M_0\left(211/121; 47/121; -85/121\right)$.

10.2.3 Найти угол между прямыми l_1: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-8}{-1}$ и l_2: $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+8}{0}$.

Решение. Угол между прямыми найдём как угол между направляющими векторами прямых: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \dfrac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{406}}$, $\varphi = \angle(l_1; l_2) = \arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{406}}\right)$.

10.2.4 Найти угол между прямой l: $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-9}{3}$ и плоскостью π: $4 \cdot x + 7 \cdot y + z - 12 = 0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью найдём по формуле $\sin\Theta = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где $\vec{n}(A; B; C)$ и $\vec{s}(m; n; p)$ – нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой, соответственно. Находим синус угла между заданной прямой l и плоскостью π: $\sin\Theta = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2}} = \dfrac{21}{2\sqrt{231}}$. Тогда угол между прямой l и плоскостью π равен: $\Theta = \angle(l; \pi) = \arcsin\left(\dfrac{21}{2\sqrt{231}}\right)$.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a}(0; 3; 2)$; б) оси Oz; б) прямой $x = 4 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = 7t$;

в) прямой $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+6}{5}$; г) прямой $\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

10.3.2 Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3;0;2)$ и $M_2(3;5;-2)$.

10.3.3 Задана прямая $l:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$ и точка $M_0(3;1;4)$. Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку $M_0(3;1;4)$;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой l;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l;

г) найти координаты точки M_1, которая симметрична точке M_0 относительно прямой l;

д) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l.

10.3.4 Задана плоскость $\pi: 2x-6y+3z-17=0$ и прямая $l:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{12}$. Требуется:

а) проверить, принадлежит ли прямая l заданной плоскости π;

б) найти координаты точки пересечения прямой l и плоскости π;

в) вычислить синус угла между прямой l и плоскостью π;

г) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно к плоскости π.

10.3.5 Написать каноническое уравнение прямой которая проходит через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно плоскости $2x-6y+3z+1=0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-3}{12}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{3}$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ (***координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1***). Требуется:

а) найти уравнение прямой AB;

б) найти уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC;

в) найти координаты точки D_1, которая симметрична точке D относительно плоскости ABC;

г) найти уравнение прямой DN, которая параллельна прямой AB;

д) найти уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB;

е) вычислить угол между прямой AD и плоскостью ABC;

ж) вычислить угол между прямыми AB и AD.

11 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
(практическое занятие 12)

Содержание: вектора и операции над ними; скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; прямая на плоскости; прямая и плоскость в пространстве.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Теоретический материал для выполнения контрольной работы приведён в практических занятиях № $3-11$.

11.2 Примеры решения типовых задач

Примеры решения типовых задач для выполнения контрольной работы приведены в практических занятиях $3-11$.

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Точки M и N служат серединами сторон BC CD параллелограмма $ABCD$. Положив $\overrightarrow{AM}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{q}$, выразить через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ указанные векторы.

В I $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DN}$. В II $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BN}$.

В III $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$. В IV $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

В V $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BN}$. В VI $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MB}$.

11.3.2 Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{c}$.

В I $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}, \vec{c}=7\vec{i}+4\vec{i}-3\vec{k}$. В II $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}, \vec{c}=8\vec{i}+5\vec{i}-4\vec{k}$.

В III $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}, \vec{c}=6\vec{i}+3\vec{i}-2\vec{k}$. В IV $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=9\vec{i}-3\vec{i}+2\vec{k}$.

В V $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=4\vec{i}-2\vec{i}+5\vec{k}$. В VI $\vec{a}=9\vec{i}-8\vec{j}+7\vec{k}, \vec{c}=6\vec{i}+5\vec{i}-4\vec{k}$.

11.3.3 Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{c}$, образует с базисным вектором $\vec{k}$ тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $|\vec{x}|=s$.

В I $\vec{a}(7;5;3), \vec{c}(2;1;4), s=\sqrt{782}$. В II $\vec{a}(-1;7;2), \vec{c}(4;9;5), s=27\sqrt{203}$..

В III $\vec{a}(4;1;7), \vec{c}(2;5;6), s=\sqrt{1265}$. В IV $\vec{a}(0;4;5), \vec{c}(3;7;2), s=12\sqrt{122}$..

В V $\vec{a}(4;2;1), \vec{c}(5;6;3), s=252\sqrt{7}$. В VI $\vec{a}(1;0;1), \vec{c}(3;5;-7), s=125\sqrt{6}$.

11.3.4 Найти угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ при указанных условиях.

В I $|\vec{p}|=1, |\vec{q}|=2, (2\vec{p}-3\vec{q})^2+(3\vec{p}+2\vec{q})^2=241$.

В II $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3, (4\vec{p}+\vec{q})^2+(7\vec{p}-3\vec{q})^2=850$.

В III $|\vec{p}|=3, |\vec{q}|=4, (3\vec{p}-7\vec{q})^2+(8\vec{p}+5\vec{q})^2=18369$.

В IV $|\vec{p}|=7, |\vec{q}|=2, (\vec{p}+4\vec{q})^2+(3\vec{p}-7\vec{q})^2=274$.

В V $|\vec{p}|=4, |\vec{q}|=1, (3\vec{p}+2\vec{q})^2+(\vec{p}-5\vec{q})^2=189$.

В VI $|\vec{p}|=7, |\vec{q}|=2, (\vec{p}+4\vec{q})^2+(3\vec{p}-7\vec{q})^2=274$.

11.3.5 Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, если за основание выбран параллелограмм, построенный на векторах $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

В I $\vec{m}(-12;2;-4), \vec{n}(-4;2;3), \vec{p}(-3;-4;-3)$.

В II $\vec{m}(-2;3;0), \vec{n}(-2;0;6), \vec{p}(0;3;-2)$.

В III $\vec{m}(2;3;-1), \vec{n}(-2;4;5), \vec{p}(3;-1;4)$.

В IV $\vec{m}(2;-1;1), \vec{n}(-3;0;4), \vec{p}(0;4;3)$.

В V $\vec{m}(-1;5;-4), \vec{n}(-4;0;2), \vec{p}(-3;3;-5)$.

В VI $\vec{m}(4;-6;4), \vec{n}(4;-1;2), \vec{p}(3;2;7)$.

11.3.6 Вычислить расстояние между прямыми l_1 и l_2.

В I $l_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{7}$; $l_2: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+5}{1}$.

В II $l_1: \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{1}$; $l_2: \dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z+2}{2}$.

В III $l_1: \dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z-2}{1}$; $l_2: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{7}=\dfrac{z+3}{1}$.

В IV $l_1: \dfrac{x+6}{9}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-3}{71}$; $l_2: \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+6}{6}$.

В V $l_1: \dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-5}{8}$; $l_2: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+3}{5}$.

В VI $l_1: \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-7}{7}$; $l_2: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z+4}{8}$.

11.3.7 Записать уравнение плоскости π_1, проходящей через прямую l, которая перпендикулярна плоскости π.

В I $l: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{3}$; $\pi:\ 2x-5y+6z-3=0$.

В II $l: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{4}$; $\pi:\ 3x-4y+7z-10=0$.

В III $l: \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-7}{5}$; $\pi:\ 4x-6y+5z-3=0$.

В IV $l: \dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{1}$; $\pi:\ 6x-4y+7z-9=0$.

В V $l: \dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$; $\pi:\ x-9y+z+7=0$.

В VI $l: \dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-2}{5}$; $\pi:\ 5x-y+4z-8=0$.

11.3.8 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_3)$. Найти площадь треугольника ABC, уравнения сторон и уравнение высоты $\overrightarrow{AH}$, опущенной из точки A на сторону BC. Вычислить длину высоты $\left|\overrightarrow{AH}\right|$.

В I $A(4;5),\ B(7;-3), C(2;9)$. В II $A(3;1),\ B(2;6), C(-2;5)$.

В III $A(1;-5),\ B(3;-9), C(4;6)$. В IV $A(2;1),\ B(3;-4), C(1;-9)$.

В V $A(5;4),\ B(-3;-6), C(1;1)$. В VI $A(-3;2),\ B(1;-1), C(3;-5)$.

11.3.9 Найти проекцию точки M_0 на плоскость π, а также определить расстояние от указанной точки до заданной плоскости.

В I $M_0(4;2;3),\ \pi: 2x-3y+4z-3=0.$ В II $M_0(1;6;9),\ \pi: 3x-y+7z-9=0.$

В III $M_0(0;7;2),\ \pi: 5x-4y+2z-6=0.$ В IV $M_0(5;3;7),\ \pi: 8x-3y+4z-9=0.$

В V $M_0(1;1;6),\ \pi: 5x-4y+z-2=0.$ В VI $M_0(9;5;1),\ \pi: x+6y+2z-9=0.$

11.3.10 Определить, принадлежит ли прямая l плоскости π. В случае пересечения найти точку пересечения прямой l и плоскости π.

В I $l:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-7}{5};\quad \pi:\ 3x-4y+6z-98=0$.

В II $l:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-4}{4};\quad \pi:\ 2x+3y-4z+9=0$.

В III $l:\ \dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-3}{7};\quad \pi:\ 5x-6y+7z-142=0$.

В IV $l:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{1};\quad \pi:\ -3x+2y+z+18=0$.

В V $l:\ \dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3};\quad \pi:\ 5x+2y-3z-83=0$.

В VI $l:\ \dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{5};\quad \pi:\ 7x-8y+5z-66=0$.

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

Задания для контролируемой самостоятельной работы соответствуют заданиям практического занятия 11.

12 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ (практическое занятие 13)

Содержание: линии второго порядка: канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы, параболы в декартовой прямоугольной системе координат, их свойства и характеристики; приведение линий второго порядка к каноническому виду методом выделения полного квадрата; полярная система координат.

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 12.1.1 *Линией второго порядка* в декартовой системе координат называется множество точек плоскости, удовлетворяющих следующему уравнению $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$, где $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$.

Рассмотрим основные линии второго порядка.

1. *Окружность*.

Окружность (рисунок 12.1.1) с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом R задаётся уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (12.1.1)$$

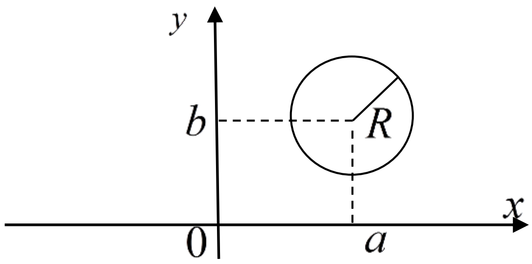


Рисунок 12.1.1 – Окружность

2. *Эллипс.*

Определение 12.1.2 *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, которые называются фокусами, есть величина постоянная: $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=Const$.

Эллипс (рисунок 12.1.2) с полуосями a и b $(a\geq b>0)$, центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12.1.2)$$

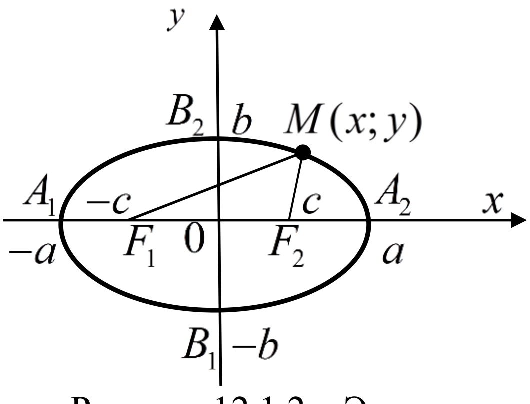


Рисунок 12.1.2 – Эллипс

Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – главными осями, а центр симметрии

O – центром эллипса. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\geq 0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – фокальными радиусами точки $M(x;y)$, принадлежащей эллипсу. В частном случае, если $a=b$, то фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение принимает вид $x^2+y^2=a^2$, то есть описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}<1$ называется эксцентриситетом эллипса и показывает степень вытянутости вдоль большей главной оси (при значении $\varepsilon=0$ эллипс является окружностью). Прямые $D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами эллипса.

3. *Гипербола.*

Определение 12.1.3 *Гиперболой* называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, которые называются фокусами, есть величина постоянная: $\left\|\overrightarrow{F_1M}\right|-\left|\overrightarrow{F_2M}\right\|=Const$.

Гипербола (рисунок 12.1.3) с действительной полуосью a и мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{12.1.3}$$

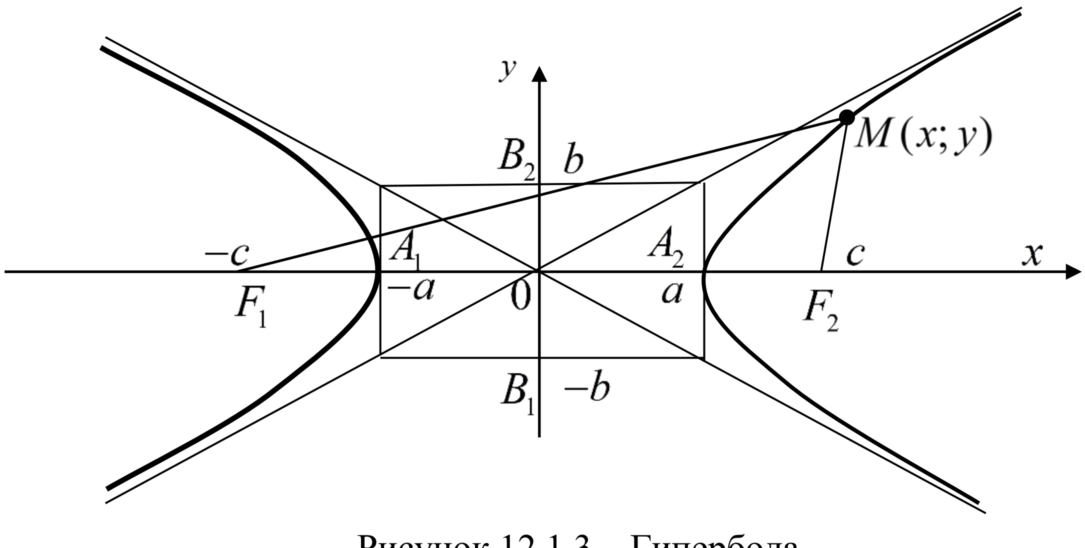


Рисунок 12.1.3 – Гипербола

Параметры a и b называются полуосями гиперболы (действительной и мнимой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – действительной и мнимой осями, а центр симметрии O – центром гиперболы. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – фокальными радиусами точки $M(x;y)$, принадлежащей гиперболе.

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}>1$ называется эксцентриситетом гиперболы и показывает степень вытянутости вдоль действительной оси. Прямые $D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами гиперболы. Прямые $C_1: y=-\dfrac{b}{a}x$ и $C_2: y=\dfrac{b}{a}x$, к которым неограниченно близко приближаются ветви гиперболы на бесконечности, называются асимптотами гиперболы. Гипербола, уравнение которой имеет вид $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, называется сопряжённой к гиперболе вида (12.1.3).

4. *Парабола.*

Определение 12.1.4 *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от фиксированной точки F, которая называется фокусом, и некоторой данной прямой, которая называется директрисой: $\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\overrightarrow{NM}\right|$.

Парабола (рисунок 12.1.4) с вершиной в начале координат и симметричная относительно оси Ox, при условии $p>0$, задаётся каноническим уравнением

$$y^2=2px. \tag{12.1.4}$$

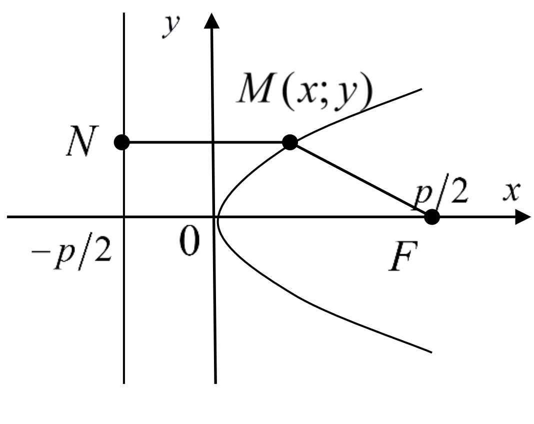


Рисунок 12.1.4 – Парабола

Число p называется параметром параболы, начало координат – её вершиной, а ось абсцисс – осью параболы. Точка $F(p/2;0)$ называется фокусом параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ – фокальным радиус-вектором, а число $r=\left|\overrightarrow{FM}\right|$ – фокальным радиусом точки M параболы. Прямая $D: x=-p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется её директрисой. Эксцентриситет параболы равен единице.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо, имеет вид: $y^2=-2px$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вверх, имеет вид: $x^2=2py$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вниз, имеет вид: $x^2=-2py$.

Если общее уравнение линии второго порядка определяет окружность, эллипс, гиперболу или параболу, то поворотом базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вокруг начала координат на угол φ, который определяется из тригонометрического уравнения $\operatorname{tg}2\varphi=2a_{12}/(a_{11}-a_{22})$, и параллельным переносом этих осей всегда можно добиться того, чтобы в новой системе координат уравнения заданных линий принимали канонический вид. Наиболее простым примером является приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду в случае $a_{12}=0$. В данном случае применяют *метод выделения полных квадратов*.

Положение произвольной точки $M(x;y)$ на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат OXY определяется числами $x-$ абсцисса и $y-$ ордината. Эту точку можно задать и другим способом: с помощью расстояния $r=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ и угла φ, отсчитываемого против хода часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс.

Полярными координатами точки $M(\varphi;r)$ называют два числа: *полярный радиус* $r=r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|\geq 0$ и *полярный угол* $\varphi=\varphi(M)-$ угол, на который следует повернуть *полярную ось* OP, выходящую из *полюса* O для того, чтобы её направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (при этом, $\varphi>0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi<0$ в противном случае).

Полярный угол φ имеет бесконечное множество возможных значений, которые отличаются друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0\leq\varphi<2\pi$ (или $-\pi<\varphi\leq\pi$), называют *главным*.

Связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки M (полюс совпадает с началом координат O, а полярная ось OP имеет одинаковое направление с ось Ox) задаётся формулами

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ \ y = r \cdot \sin\varphi, \tag{12.1.5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{12.1.6}$$

Уравнение линии в полярной системе координат имеет вид $F(\varphi; r) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено непосредственно, исходя из геометрических свойств линии, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой линии, заданной в декартовой прямоугольной системе координат.

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен 0,6.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = 2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0,6$. Следовательно, $c = 3$ и $a = 5$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

12.2.2 Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между её фокусами равно 8, а расстояние между директрисами равно 18.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = 2c = 8$, а расстояние между директрисами $\left|\overrightarrow{D_1D_2}\right| = 2\dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{1}{8}$. Учитывая, что эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, получаем значения параметров: $c = 4$ и $a = {}^1\!/_2$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{255}}{4}$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\dfrac{x^2}{1/4} - \dfrac{y^2}{255/16} = 1$.

12.2.3 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M_0(-2;-4)$.

Решение. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M_0(-2;-4)$, то каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -2px$. Так как точка $M_0(-2;-4)$ принадлежит параболе, то справедливо равенство: $\left(-4\right)^2=-2\cdot p\cdot\left(-2\right)$. Следовательно, значение параметра $p=4$. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2=-8x$.

12.2.4 Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $4x^2-25y^2-8x-100y-196=0$. Найти основные характеристики данной линии.

Решение. Для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду воспользуемся методом выделения полного квадрата.

$$4x^2-25y^2-8x-100y-196=0,$$

$$4(x^2-2x+1)-25(y^2+4y+4)-4+100-196=0,$$

$$4(x-1)^2-25(y+2)^2=100,$$

$$\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Выполним замену $x'=x-1,\ y'=y+2$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{25}-\frac{y'^2}{4}=1,$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(1;-2)$. В новой системе координат действительная полуось равна $a=5$, а мнимая полуось $b=2$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Следовательно, координаты фокусов равны: $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=c/a=\sqrt{5}/5$. Уравнения директрис: $x=\pm a/\varepsilon$ или $x=\pm5\sqrt{5}$. Уравнения асимптот: $y=\pm bx/a$ или $y=\pm2x/5$.

12.2.5 Составить канонические уравнения: а) эллипса, если сумма полуосей $a+b=12$, а расстояние между фокусами $2c=8\sqrt{3}$; б) гиперболы, с вершиной в точке $A(2;0)$ и проходящей через точку $B(4;3\sqrt{3})$; в) параболы, зная, что её вершина находится в начале координат, расстояние от фокуса до вершины равно 4, осью симметрии служит ось Ox и она проходит через точку $C(-1;4)$.

Решение: а) каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где a – малая полуось; b – большая полуось. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. Для определения уравнения эллипса необходимо найти неизвестные параметры a и b. По свойствам уравнения эллипса формула, которая связывает его параметры, имеет вид: $a^2-b^2=c^2$. По условию $c=4\sqrt{3}$. В результате получаем систему уравнений: $\begin{cases}a^2-b^2=48,\\ a-b=4.\end{cases}$

Решая полученную систему, находим, что $a=8,\ b=4$. Следовательно, каноническое уравнение искомого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$;

б) каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a – действительная полуось; b – мнимая полуось. Гипербола проходит через две известные точки A и B, а, следовательно, координаты этих точек удовлетворяют искомому уравнению гиперболы, то есть при подстановке координат точек получаем верные равенства. В результате имеем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{2^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1, \\ \frac{4^2}{a^2}-\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1, \end{cases}$$

решив которую, находим, что действительная полуось a=2, мнимая полуось b=3. Следовательно, каноническое уравнение искомой гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$$

в) так как осью симметрии параболы служит ось Ох, а вершиной – начало координат, то уравнение параболы может быть определено одним из канонических уравнений $y^2=2px$ или $y^2=-2px$, где p – расстояние от директрисы $x=-\frac{p}{2}$ до начала координат. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра p. Следовательно, $p/2=4$ и $p=8$. Подставляя это значение p в каждое из приведённых выше уравнений, получаем уравнения парабол: $y^2=16x$ или $y^2=-16x$. Учитывая, что искомая парабола проходит через точку $C(-1;4)$, получаем, что уравнение искомой параболы $y^2=-16x$.

12.2.6 Найти уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(3;-4)$ на расстоянии в три раза большем, чем от прямой $x=-13$.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомой линии. По условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right|=3\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|$, где $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ – расстояние от точки M до прямой $x=-13$. Так как

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2},\ \left|\overrightarrow{BM}\right|=\sqrt{(x+13)^2+(y-y)^2}=|x+13|,$$

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=3\cdot|x+13|.$$

Преобразуем уравнение, возведя обе части в квадрат. Имеем

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=9x^2+234x+1521,$$

$$8x^2 - y^2 + 240x - 8y + 1496 = 0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, приходим к уравнению вида $\dfrac{(x+15)^2}{36} - \dfrac{(y+4)^2}{288} = 1$.

Выполним замену $x' = x + 16$, $y' = y + 4$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{288} = 1,$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(-15;-4)$. В новой системе координат действительная полуось равна $a = 6$, а мнимая полуось – $b = 12\sqrt{2}$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + (12\sqrt{2})^2} = 18$. Следовательно, координаты фокусов равны: $F_1(-18;0)$, $F_2(18;0)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = c/a = 3$. Уравнения директрис: $x = \pm a/\varepsilon$ или $x = \pm 2$. Уравнения асимптот: $y = \pm bx/a$ или $y = \pm 2\sqrt{2}\,x$.

12.2.7 Построить кривую, заданную в полярной системе координат. Записать уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

Решение. Полярному углу φ будем придавать значения от угла $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$ и вычисляем соответствующие значения полярного радиуса r. Полярный радиус $r \geq 0$, тогда $\cos 2\varphi \geq 0$ и угол φ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Найденные значения запишем в виде таблицы:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$r = a\cos 2\varphi$	a	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	a	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	a

Построим заданную кривую. При построении кривой линии принимаем произвольный отрезок за единицу масштаба. Полюс полярной системы координат помещаем в центр декартовой прямоугольной системы, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Полученная кривая называется двулепестковой розой (рисунок 12.2.1).

Найдем уравнение двулепестковой розы в декартовой системе координат, используя формулы перехода от полярных координат $(\varphi; r)$ к декартовым координатам $(x; y)$:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

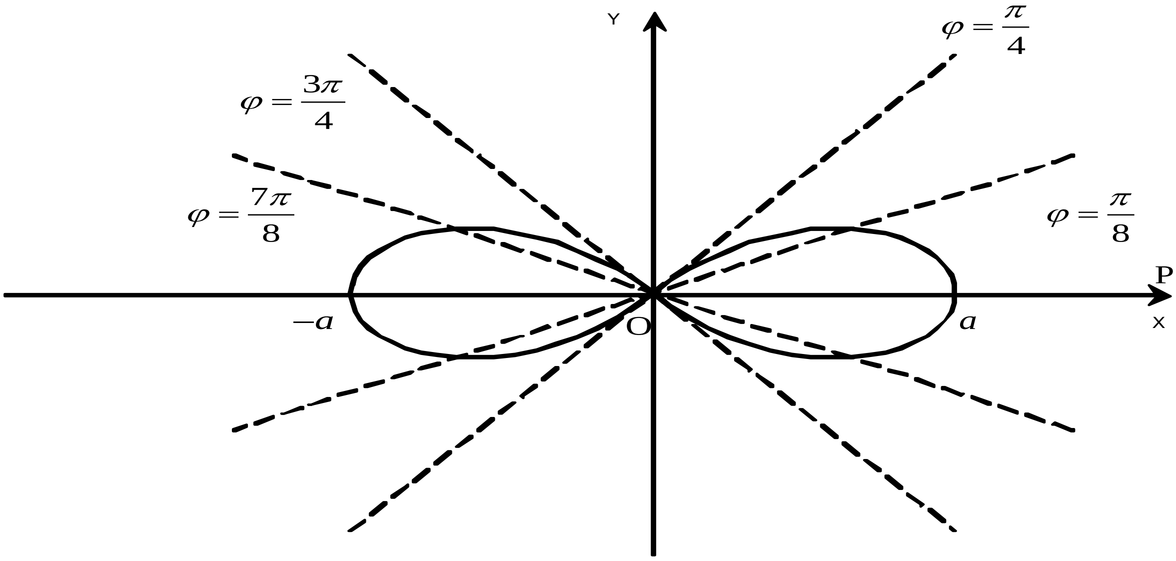


Рисунок 12.2.1 – Двухлепестковая роза

Следовательно, уравнение двухлепестковой розы в декартовой системе координат имеет вид $\sqrt{x^2+y^2} = a\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$ или $\sqrt{x^2+y^2} = a\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Умножая обе части уравнения на множитель x^2+y^2, получаем уравнение вида:

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)=a\cdot\left(x^2-y^2\right).$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем окончательно уравнение двулепестковой розы: $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)^2$.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

12.3.2 Построить гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

12.3.3 Построить следующие параболы и найти их параметры: а) $y^2=6x$; б) $x^2=8y$; в) $y^2=-10x$; г) $x^2=-4y$.

12.3.4 Написать каноническое уравнение эллипса и построить его, если:

а) малая полуось равна 3 и большая полуось равна 5;

б) большая полуось равна 13 и расстояние между фокусами равно 24;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 3/5;

г) малая полуось равна 5 и эксцентриситет равен 12/13;

д) расстояние между фокусами равно 4 и расстояние между директрисами равно 5;

е) эксцентриситет равен 3/5 и расстояние между директрисами равно 32.

12.3.5 Написать каноническое уравнение гиперболы и построить её, если:

а) мнимая полуось равна 3 и действительная полуось равна 2;

б) мнимая полуось равна 4 и расстояние между фокусами равно 10;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 3/2;

г) действительная полуось равна 8 и эксцентриситет равен 5/4;

д) расстояние между фокусами равно 20 и уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;

е) эксцентриситет равен 3/2 и расстояние между директрисами равно 8/3.

12.3.6 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и построить её, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p={}^{1}\!/_{2}$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $A(4;-8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0;-3)$.

12.3.7 Определить тип уравнения линии второго порядка, предварительно приведя его к каноническому виду. Построить линию в новой системе координат и определить его характеристики.

а) $x^2+y^2+8x-14y+16=0$;

б) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

в) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

г) $2y^2-3x-12y+18=0$.

12.3.8 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от неё до точки $A(1,4)$ остаётся в три раза меньше расстояния до прямой $x=-7$.

12.3.9 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от неё до точки $A(1,3)$ остаётся в три раза больше расстояния до прямой $x=-6$.

12.3.10 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от неё до точки $A(5,2)$ равно расстоянию до прямой $x=1$.

12.3.11 Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

а) $y=x$; б) $x+y-2=0$; в) $x^2+y^2=9$; г) $x^2-y^2=4$; д) $x^2+y^2=12y$.

12.3.12 Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

а) $r=4$; б) $\varphi=3\pi/4$; в) $r=10\cos\varphi$; г) $r=1-\cos\varphi$; д) $r=10(1+\sin\varphi)$.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Задана точка $N(n;0)$ и прямая $l: y=-n$, где n – номер варианта. Написать уравнение линии γ, каждая точка которой:

а) равноудалена от точки N и прямой l;

б) расположена в два раза дальше от точки N, чем к прямой l;

в) расположена в два раза ближе к точке N, чем к прямой l.

Привести полученные уравнения линий к каноническому виду, указать их параметры и характеристики. Построить линии.

12.4.2 Построить кривую, заданную в полярной системе координат. Записать уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

12.4.2.1	$r=6\sin\varphi$.	**12.4.2.2**	$r=3(1-\cos\varphi)$.	**12.4.2.3**	$r=8\cos\varphi$.
12.4.2.4	$r=3\sin 2\varphi$.	**12.4.2.5**	$r=2(1+\cos\varphi)$.	**12.4.2.6**	$r=3\cos 2\varphi$.
12.4.2.7	$r=-4\sin 3\varphi$.	**12.4.2.8**	$r=3(1-\sin\varphi)$.	**12.4.2.9**	$r=4\cos 3\varphi$.
12.4.2.10	$r=-3\sin 4\varphi$.	**12.4.2.11**	$r=2(1+\sin\varphi)$.	**12.4.2.12**	$r=5\cos 4\varphi$.
12.4.2.13	$r=-2\sin\varphi$.	**12.4.2.14**	$r=6(1-\cos\varphi)$.	**12.4.2.15**	$r=-6\cos\varphi$.
12.4.2.16	$r=5\sin 2\varphi$.	**12.4.2.17**	$r=4(1+\cos\varphi)$.	**12.4.2.18**	$r=-2\cos 2\varphi$.
12.4.2.19	$r=2\sin 3\varphi$.	**12.4.2.20**	$r=6(1-\sin\varphi)$.	**12.4.2.21**	$r=-6\cos 3\varphi$.
12.4.2.22	$r=6\sin 4\varphi$.	**12.4.2.23**	$r=4(1+\sin\varphi)$.	**12.4.2.24**	$r=-7\cos 4\varphi$.
12.4.2.25	$r=-4\sin\varphi$.	**12.4.2.26**	$r=8(1-\cos\varphi)$.	**12.4.2.27**	$r=10\cos\varphi$.
12.4.2.28	$r=-6\sin 2\varphi$.	**12.4.2.29**	$r=12(1+\sin\varphi)$.	**12.4.2.30**	$r=2\cos 2\varphi$.

13 МАТРИЦЫ
(практическое занятие 14)

Содержание: определение матриц; сложение и умножение матриц; произведение и транспонирование матриц.

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 13.1.1 *Матрицей* размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица, которая содержит m строк и n столбцов.

$$A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},$$

где $a_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – элементы матрицы, которые могут быть числами, функциями, векторами, матрицами и другими произвольными объектами. Первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс j указывает номер столбца. Если $i=1$, то матрица называется *матрицей-строкой*, если $j=1$, то матрица называется *матрицей-столбцом*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O.

Матрица, в которой $i=j$, то есть число строк равно числу столбцов, называется квадратной матрицей. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ образуют побочную диагональ. Матрица, в которой ниже и выше главной диагонали все элементы равны 0, называется *диагональной* матрицей. Диагональная матрица, все элементы которой равны 1, называется *единичной* и обозначается E.

На множестве матриц вводятся следующие операции: сложение матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц, транспонирование матрицы.

1. *Сложение матриц.* Данная операция вводится только для матриц одинаковой размерности. Суммой матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ и матрицы $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)=A_{m\times n}+B_{m\times n}$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left(\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}\right)$.

2. *Умножение матрицы на число*. Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на число α называется матрица $C=\alpha\cdot A=\left(c_{ij}\right)$, где $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ $\left(\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}\right)$.

3. *Произведение матриц.* Данная операция вводится только для согласованных матриц. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p}=\left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p}=\left(c_{ik}\right)=A\cdot B$, где $c_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$ $\left(\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},\ \ k=\overline{1,p}\right)$. В общем случае операция произведения матриц не обладает свойством коммутативности, то есть $AB\neq BA$. Если выполняется равенство $AB=BA$, то матрицы называются перестановочными или коммутирующими. Для произведения матриц всегда справедливы равенства: $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$, $A\left(B+C\right)=AB+AC$, $\left(B+C\right)A=BA+CA$ и $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{n\ раз}$. Если матрицы A и E согласованы, то $AE=EA=A$.

4. *Транспонирование матриц.* Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если она получена из неё путём замены строк на столбцы, а столбцов на строки. Для транспонированных матриц справедливы равенства: $\left(A^T\right)^T=A$, $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$ и $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$.

Множество матриц одинаковой размерности, введёнными операциями сложения и умножения на число, образуют векторное пространство.

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти линейную комбинацию $2A-3B$, если матрицы A и B имеют вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 14 \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 \\ 6 & -9 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -23 & -4 \\ 0 & 19 & -8 \end{pmatrix}.$$

13.2.2 Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A\cdot B=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+5\cdot 2+3\cdot 7 & 2\cdot 6+5\cdot 1+3\cdot 3 \\ 4\cdot 4+8\cdot 2+2\cdot 7 & 4\cdot 6+8\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 46 & 38 \end{pmatrix}.$$

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти линейные комбинации $4A-5B$ и $2A+3C$, если матрицы A, B и С имеют вид: $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13.3.2 Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B^T\cdot A^T$, если матрицы A и B имеют вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

13.3.3 Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если матрицы A и B имеют вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

13.3.4 Вычислить $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

13.3.5 Найти: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

13.3.6 Найти значение многочлена $f(B)$ от матрицы B, если матрица B задана в задаче 13.3.2 и $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

13.3.7 Найти все матрицы перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Даны две матрицы A и B. Найти: а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$; в) $A^T \cdot B^T$; г) $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

13.4.1.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

13.4.1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

13.4.1.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

13.4.1.4 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

13.4.1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

13.4.1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13.4.1.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.4.1.8 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

13.4.1.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.10 $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

13.4.1.11 $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

13.4.1.12 $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

13.4.1.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

13.4.1.14 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

13.4.1.15 $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

13.4.1.16 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.17 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.18 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

13.4.1.19 $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

13.4.1.20 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

13.4.1.21 $A=\begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.22 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

13.4.1.23 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.24 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.25 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

13.4.1.26 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.27 $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.28 $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

13.4.1.29 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

13.4.1.30 $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$

14 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ
(практическое занятие 15)

Содержание: определитель n-го порядка, определитель второго и третьего порядков; свойства определителя; миноры и алгебраические дополнения; обратная матрица.

14.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Перестановкой чисел $1,2,3,...,n$ называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно $n!$. Рассмотрим перестановку из чисел $j_1, j_2,..., j_n$. Два числа в перестановке образуют инверсию, если большее число стоит левее меньшего. Число $t\left[j_1, j_2,..., j_n\right]$ указывает число инверсий в перестановке.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 14.1.1 *Определителем* n-го порядка называется алгебраическая сумма произведений вида $a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot ...\cdot a_{nj_n}$, где элементы $a_{1j_1}, a_{2j_2},..., a_{nj_n}$ матрицы A взяты по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Знак перед произведением ставится «$+$», если число инверсий в перестановке из чисел $j_1, j_2,..., j_n$ является чётным, а знак «$-$», если число инверсий в этой перестановке является нечётным.

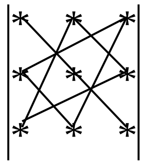
$$|A|=\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{\text{перестановки} \\ (j_1, j_2,..., j_n)}}(-1)^{t[j_1, j_2,..., j_n]}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot ...\cdot a_{nj_n}.$$

Определитель второго порядка равен числу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

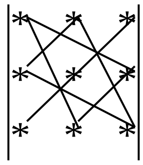
Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника или правилу Саррюса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематическая запись правила треугольника имеет вид:



"+"



"–"

Со знаком «+» выбираем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «–» выбираем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Приведём основные свойства определителей:

1) $\left|A^T\right| = |A|$;

2) если определитель содержит нулевую строку, то его значение равно нулю,

3) если в определителе имеются две равные строки, то его значение равно нулю;

4) если строка (столбец) определителя представляет собой линейную комбинацию других строк (столбцов), то его значение равно нулю;

5) если в определителе поменять местами две строки (столбца), то значение определителя изменит знак на противоположный;

6) постоянный множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

7) если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;

8) значение определителя не изменится, если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же произвольное число, отличное от нуля;

9) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Определение 14.1.2 *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка, путём вычёркивания i-ой строки и j-го столбца.

Определение 14.1.3 *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Значение определителя равно алгебраической сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Вычисление значения определителя путём разложения по i-ой строке:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in} .$$

Вычисление значения определителя путём разложения по j-у столбцу:

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj} .$$

Определение 14.1.4 Матрица называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля.

Определение 14.1.5 Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если существуют произведения матриц $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot A^{-1}$, которые равны между собой и равны единичной матрице, то есть $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Обратная матрица существует только у невырожденных квадратных матриц и имеет ту же размерность, что и сама матрица.

Для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которую находим по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Матрица C называется союзной или присоединённой, её элементами являются алгебраические дополнения транспонированной матрицы A^T.

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 11 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 11 \cdot 1 = 2 .$$

14.2.2 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ путём разложения по второй строке.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$

$$+2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1&0\\5&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2&1&4\\5&3&4\\2&3&1\end{vmatrix}=-3\cdot(-29)+2\cdot(-54)-2\cdot1+4\cdot21=61.$$

14.2.3 Найти обратную матрицу к матрице, заданной в примере 14.2.1.

Решение. Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1&5&1\\1&8&5\\2&11&4\end{pmatrix}$ найден в примере 14.2.1 и равен $|A|=2$. Найдём алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}8&5\\11&4\end{vmatrix}=-23,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}5&1\\11&4\end{vmatrix}=-9,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}5&1\\8&5\end{vmatrix}=17,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&8\\2&11\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&5\\1&8\end{vmatrix}=3.$$

Находим обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&-9&17\\6&2&-4\\-5&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11{,}5&-4{,}5&8{,}5\\3&1&-2\\-2{,}5&-0{,}5&1{,}5\end{pmatrix}.$$

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Определить чётность подстановки $(4\quad1\quad3\quad2\quad6\quad5)$.

14.3.2 Выяснить, какие из приведённых произведений входят в определители соответствующих порядков, и с какими знаками: а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; б) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; в) $a_{27}a_{35}a_{51}a_{74}a_{15}a_{43}a_{62}$; г) $a_{27}a_{35}a_{51}a_{74}a_{16}a_{43}a_{62}$.

14.3.3 Выбрать значения i и j так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в некоторый определитель со знаком: а) плюс; б) минус.

14.3.4 Решить уравнение: а) $\begin{vmatrix}x-1&7-x\\1&x+3\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}\cos9x&\sin9x\\\sin3x&\cos3x\end{vmatrix}=0$.

14.3.5 С помощью правила треугольников вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&6&2\\1&5&7\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}4&6&3\\1&5&9\\3&2&5\end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix}3&2&7\\7&8&15\\2&3&4\end{vmatrix}$.

14.3.6 Решить неравенства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4-x & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9-x \end{vmatrix} \le 0; \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 7-x & 6 & 3 \\ 2 & 3-x & 4 \\ 3 & 2 & x-7 \end{vmatrix} > 0.$$

14.3.7 Задан определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Найти миноры элементов a_{21} и a_{44}, а также алгебраические дополнения элементов a_{32} и a_{12}. Вычислить определитель: а) разложив его по элементам второй строки; б) разложив его по элементам третьего столбца; в) получив предварительно нули во втором столбце; г) получив предварительно нули в третьей строке.

14.3.8 Задан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. Найти миноры элементов a_{22} и a_{41}, а также алгебраические дополнения элементов a_{11} и a_{32}. Вычислить определитель: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам четвёртого столбца; в) получив предварительно нули в удобной для преобразования строке или столбцу.

14.3.9 Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и убедиться, что $AA^{-1}=E$ и $A^{-1}A=E$, если: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 В задаче 13.4.1 заданы матрицы A и B. Для матрицы B найти обратную матрицу B^{-1} и убедиться, что $B\cdot B^{-1}=E$ и $B^{-1}\cdot B=E$.

14.4.2 Для данного определителя найти миноры элементов a_{i1}, a_{4j} и алгебраические дополнения элементов a_{i3}, a_{2j}. Вычислить определитель $\det A$: а) разложив его по элементам *i*-ой строки; б) разложив его по элементам *j*-го столбца; в) получив предварительно нули в произвольной строке или столбце.

14.4.2.1 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & -9 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \quad i=4, \; j=2.$

14.4.2.2 $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 & -7 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad i=1, \; j=3.$

14.4.2.3 $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -7 \end{vmatrix}, \quad i=2, \; j=1.$

14.4.2.4 $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 7 & 2 \\ 9 & 4 & 6 & -7 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad i=3, \; j=4.$

14.4.2.5 $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & -6 & 3 \end{vmatrix}, \quad i=4, \; j=2.$

14.4.2.6 $\begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & -8 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad i=4, \; j=3.$

14.4.2.7 $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & -9 \end{vmatrix}, \quad i=1, \; j=2.$

14.4.2.8 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ -7 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -5 \end{vmatrix}, \quad i=3, \; j=2.$

14.4.2.9 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -9 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}, \quad i=3, \; j=4.$

14.4.2.10 $\begin{vmatrix} -4 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}, \quad i=3, \; j=1.$

14.4.2.11 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -9 & 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}, \quad i=2, \; j=1.$

14.4.2.12 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & 6 \\ -7 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}, \quad i=1, \; j=2.$

14.4.2.13 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 & 6 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}, \quad i=3, \; j=4.$

14.4.2.14 $\begin{vmatrix} -6 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & -8 \\ 6 & 1 & -7 & 8 \end{vmatrix}, \quad i=1, \; j=1.$

14.4.2.15 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & -6 \\ 9 & -7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & 4 \\ -8 & 9 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad i=4, \; j=1.$

14.4.2.16 $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad i=1, \; j=4.$

14.4.2.17 $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & -9 \\ 6 & 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=3, \\ j=3. \end{matrix}$ **14.4.2.18** $\begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -9 & 5 \\ -7 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=3, \\ j=2. \end{matrix}$

14.4.2.19 $\begin{vmatrix} -6 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=2, \\ j=4. \end{matrix}$ **14.4.2.20** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=2, \\ j=1. \end{matrix}$

14.4.2.21 $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=3. \end{matrix}$ **14.4.2.22** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 & -4 \\ -3 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & -9 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=2. \end{matrix}$

14.4.2.23 $\begin{vmatrix} 8 & -9 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=3, \\ j=2. \end{matrix}$ **14.4.2.24** $\begin{vmatrix} -8 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & -5 & 2 \\ 9 & -7 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=1, \\ j=3. \end{matrix}$

14.4.2.25 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=3. \end{matrix}$ **14.4.2.26** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & 3 & 6 \\ 8 & -5 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=1. \end{matrix}$

14.4.2.27 $\begin{vmatrix} -9 & 7 & 3 & 9 \\ 8 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=3. \end{matrix}$ **14.4.2.28** $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 2 & 5 \\ -6 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=1, \\ j=2. \end{matrix}$

14.4.2.29 $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -9 & 8 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=1, \\ j=4. \end{matrix}$ **14.4.2.30** $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 8 & 2 \\ 9 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}, \begin{matrix} i=4, \\ j=2. \end{matrix}$

15 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ
(практическое занятие 16)

Содержание: ранг матрицы и теорема о базисном миноре; методы определения ранга матрицы, решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом, по формулам Крамера, методом Гаусса.

15.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 15.1.1 *Рангом* матрицы A называется число $r = rangA$, которое равно наивысшему порядку минора, отличному от нуля.

Свойства ранга матрицы:

1) $0 \le rangA \le \min(m;n)$ где m, n – число строк и столбцов матрицы;

2) $rangA^T = rangA$;

3) элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы;

4) если все возможные миноры k-го порядка равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

К элементарным преобразованиям относятся:

a) перестановка строк (столбцов) матрицы;

b) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

c) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к ней соответствующих элементов другой строки (столбца).

Строку (столбец) матрицы назовём линейно-независимой, если её (его) нельзя представить в виде линейной комбинации остальных строк (столбцов).

Определение 15.1.2 *Минор называется базисным*, если он отличен от нуля и его порядок совпадает с рангом матрицы.

Теорема о базисном миноре. Базисные строки (столбцы) матрицы, которые соответствуют её базисному минору, являются линейно-независимыми, а любые строки (столбцы) матрицы, которые не входят в базисный минор, являются линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Ранг матрицы находится либо *методом окаймляющих миноров*, либо методом *элементарных преобразований*, которые не изменяют ранга матрицы.

При вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров переходим последовательно от миноров низшего порядка к минорам более высокого порядка. Если найден минор M, который имеет порядок k и при этом отличен от нуля, то необходимо вычислить миноры $k+1$ порядка, окаймляющие минор M, то есть содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен числу k. При вычислении ранга матрицы методом элементарных преобразований приводим матрицу к трапецеидальному виду, вычёркивая нулевые строки (столбцы). Преобразования проводим либо только над строками, либо только над столбцами. Ранг матрицы равен числу линейно-независимых строк (столбцов).

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений.

Общий вид *системы линейных уравнений*: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матричный вид систем линейных алгебраических уравнений: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *матрица-столбец свободных членов*; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *матрица-столбец неизвестных*;

$$A^* = A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – *расширенная матрица* системы.

Если столбец свободных членов ненулевой, то система называется неоднородной. Если столбец свободных членов нулевой, то система называется *однородной* и в матричной форме записи имеет вид: $AX = O$.

Матрица $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \end{pmatrix}^T$ называется решением системы линейных алгебраических уравнений, если при подстановке значений $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ все уравнения системы обращаются в тождества. Решить систему означает найти все её решения.

Определение 15.1.3 Система линейных алгебраических уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера – Капелли. Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы и ранг расширенной матрицы этой системы были равны, то есть $rangA = rang\, A|B$.

Рассмотрим решение систем с невырожденной основной матрицей системы.

Теорема 15.1.1 Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля $(\det A \neq 0)$, то система совместна и имеет единственное решение.

Это решение можно найти различными методами.

1. **Матричный метод.** Пусть система линейных алгебраических уравнений записана в матричном виде $AX = B$. Из данного матричного уравнения получаем решение системы в виде: $X = A^{-1}B$.

2. **Метод Крамера.** Решение системы находим по формулам: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$,

где Δ – определитель основной матрицы системы, Δ_j – определитель, полученный путём замены j-го столбца столбцом свободных членов и $j=\overline{1;n}$.

3. **Метод Гаусса.** Суть данного метода состоит в приведении расширенной матрицы системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы. После этой операции от полученной новой расширенной матрицы переходим к системе уравнений. Из последнего n-го уравнения находим значение переменной x_n и подставляем его в $(n-1)$-е уравнение, из которого определяем x_{n-1}. Продолжая аналогичный процесс из первого уравнения, находим x_1.

15.2 Примеры решения типовых задач

15.2.1 Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим ранг матрицы методом окаймляющих миноров. Находим окаймляющие миноры:

$$M_1^1=3\neq 0,\ M_{12}^{12}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot 6=0,\ M_{12}^{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot 7-2\cdot 6=9\neq 0,$$

$$M_{123}^{134}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 7\cdot 2+2\cdot 6\cdot 3+6\cdot 5\cdot 4-4\cdot 7\cdot 3-6\cdot 2\cdot 2-6\cdot 5\cdot 3=0,$$

$$M_{123}^{135}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 7\cdot 2+2\cdot 3\cdot 3+6\cdot 5\cdot 1-1\cdot 7\cdot 3-2\cdot 6\cdot 2-3\cdot 5\cdot 3=0.$$

Ранг матрицы равен $rangA=2$, а базисным минором является минор $M_{12}^{13}=9$.

15.2.2 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить её по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=13, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=12, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.

$$M_1^1 = 2 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\ M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 3$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, а более высокого порядка минор не существует, то ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Следовательно, $rangA|B = rangA = 3 = n$, то есть система совместна и имеет единственное решение. Решим систему по формулам Крамара: $\Delta = M_{123}^{123} = 4$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 12 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{4} = 3,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{20}{4} = 5.$

15.2.3 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{array}\right)$. Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,\ M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 2$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но при этом существует минор $M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, то ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Так как $rangA|B \neq rangA$, то система несовместна, то есть не имеет решения.

15.2.4 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=10, \\ x_1+8x_2+5x_3=25, \\ 2x_1+11x_2+4x_3=27. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим основную матрицу системы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$. В задаче 14.2.1 вычислен определитель этой матрицы. Так как $|A|=2\neq 0$, то, согласно теореме 15.1.1, система совместна и имеет единственное решение. Решим систему средствами матричного исчисления по формуле $X=A^{-1}\cdot B$. Обратная матрица найдена в задаче 14.2.3: $A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -23\cdot 10-9\cdot 25+17\cdot 27 \\ 6\cdot 10+2\cdot 25-4\cdot 27 \\ -5\cdot 10-1\cdot 25+3\cdot 27 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение системы имеет вид: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$.

15.2.5 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=-1, \\ 4x_1+7x_2+3x_3=5, \\ 6x_1+5x_2 \qquad =12. \end{cases}$$

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований.

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(\text{I})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right)\xrightarrow[-6\cdot(\text{I})+(\text{III})]{-4\cdot(\text{I})+(\text{II})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & -15 & 15 \end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{4\cdot(\text{II})+(\text{III})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -43 & 43 \end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{43}\cdot(\text{III})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{2}\cdot(\text{III})+(\text{I})]{7\cdot(\text{III})+(\text{II})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{3}{2}\cdot(\text{II})+(\text{I})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

На основании метода элементарных преобразований получаем равенство рангов основной и расширенной матрицы системы: $rangA = rangA|B = 3 = n$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. От преобразованной расширенной матрицы системы переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 2, \\ \quad x_2 \qquad = 0, \\ \qquad\quad x_3 = -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем решение системы $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

15.3 Задания для решения на практическом занятии

15.3.1 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 10 & 2 & 9 & 1 \\ 24 & 2 & 3 & 25 & 13 \end{pmatrix}$.

15.3.2 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 \qquad + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 21, \\ 5x_1 + 22x_2 + 9x_3 = 17. \end{cases}$

15.3.3 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 \qquad + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 8, \\ \quad -14x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 11x_2 - 9x_3 = -6, \\ 3x_1 + 22x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$

15.3.4 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 1, \\ 2x_1 + 9x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 2, \\ 4x_1 + 14x_2 - 11x_3 - 8x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

15.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

15.4.1 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность. В случае совместности решить её: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса.

15.4.1.1 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.2 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

15.4.1.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

15.4.1.4 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 5x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

15.4.1.5 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

15.4.1.6 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

15.4.1.7 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

15.4.1.8 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

15.4.1.9 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

15.4.1.10 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.11 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.12 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$

15.4.1.13 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.14 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

15.4.1.15 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_2 - 7x_3 = -10, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

15.4.1.16 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

15.4.1.17 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.18 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -11, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

15.4.1.19 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

15.4.1.20 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 16. \end{cases}$

15.4.1.21 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=-2, \\ 4x_1+x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2-4x_3=-3. \end{cases}$ **15.4.1.22** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 5x_1+3x_2-x_3=4, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=2. \end{cases}$

15.4.1.23 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-9x_3=2, \\ x_1+x_2-8x_3=-6. \end{cases}$ **15.4.1.24** $\begin{cases} 3x_1+5x_2-2x_3=-3, \\ x_1+2x_2-7x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

15.4.1.25 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2+x_3=5, \\ 5x_1-3x_2+6x_3=8. \end{cases}$ **15.4.1.26** $\begin{cases} 5x_1+2x_2-2x_3=7, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$

15.4.1.27. $\begin{cases} 7x_1-x_2+3x_3=8, \\ x_1+3x_2+4x_3=-2, \\ 6x_1-4x_2+5x_3=10. \end{cases}$ **15.4.1.28** $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=6, \\ 3x_1+3x_2+x_3=6, \\ x_1-x_2+10x_3=0. \end{cases}$

15.4.1.29 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=9, \\ x_1+x_2+7x_3=-5. \end{cases}$ **15.4.1.30** $\begin{cases} 8x_1-3x_2-x_3=5, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=7, \\ 4x_1-6x_2+5x_3=-2. \end{cases}$

16 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (практическое занятие 17)

Содержание: решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений; однородные системы линейных алгебраических уравнений; фундаментальная система решений и размерность линейного пространства решений однородной системы.

16.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

1. $rangA \neq rang\, A|B$, система несовместна, то есть не имеет решения.

2. $rangA = rang\, A|B = n \leq m$, где n – число неизвестных, а m – число уравнений в системе. Система совместна и имеет единственное решение. Для её решения определяем базисный минор. На основании теоремы о базисном миноре, строки не входящие в базисный минор, можно вычеркнуть. В результате приходим к равносильной системе, которая содержит n неизвестных и n уравнений, причём определитель основной матрицы этой системы отличен от нуля, как базисный минор, а такая система имеет единственное решение. Полученную систему можно решить любым из вышерассмотренных методов.

3. $rangA = rang\, A|B = r < n$, система совместна и имеет бесконечное множество решений. Для решения системы определяем базисный минор. В системе

оставляем только те уравнения, коэффициенты при неизвестных в которых входят в базисный минор. Слагаемые с переменными в полученной системе, коэффициенты при неизвестных, при которых не входят в базисный минор, в каждом из уравнений переносим в правую часть. В результате приходим к системе с определителем основной матрицы, отличным от нуля. Полученную систему можно решить матричным методом, по формулам Крамера или методом Гаусса. Решение системы будет зависеть от переменных, коэффициенты при которых не входили в базисный минор, а они могут принимать произвольные значения. Поэтому система будет иметь бесконечное множество решений.

Рассмотрим решение однородных систем линейных алгебраических уравнений $AX = O$. Однородная система всегда совместна, так как она имеет, по крайней мере, нулевое решение.

Теорема 16.1.1 Если определитель матрицы однородной системы отличен от нуля, то система имеет единственное нулевое решение.

Теорема 16.1.2 Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то ранг матрицы r будет меньше числа неизвестных n. Решение проводим аналогично третьему случаю решения произвольных систем. Переменные, коэффициенты перед которыми входят в базисный минор, называются базисными переменными, а остальные $(n-r)$ переменные называются свободными. Придав свободным переменным $(n-r)$ раз произвольные значения, будем получать различные системы, решения которых линейно независимы. Наиболее часто одной свободной переменной поочерёдно придают значение, равное 1, а все остальные приравнивают к 0. В результате получим $(n-r)$ линейно независимые решения $E_1, E_2, ..., E_{n-r}$.

Определение 16.1.1 Любая совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений называется фундаментальной системой решений.

Теорема 16.1.3 Общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений, то есть $X_{о.о} = c_1E_1 + c_2E_2 + ... + c_{n-r}E_{n-r}$, где $c_1, ..., c_{n-r} \in R$.

Теорема 16.1.4 Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы: $X_{о.н} = X_{о.о} + X_{ч.н}$.

16.2 Примеры решения типовых задач

16.2.1 Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 + 15x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 15 & 2 \\ 3 & -6 & 12 & -1 \end{array} \right)$. Найдём ранг основной и расширенной матриц системы.

$$M_1^1 = 1 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0,\ M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 3.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 2$. Для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но существует ещё один минор $M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 2 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 0$, следовательно, ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Таким образом, $rangA|B = rangA = 2 < n = 3$, то есть система совместна и имеет бесконечное множество решений. Переменные x_1, x_3 являются базисными переменными, а переменная $x_2 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 + 2c, \\ 4x_1 + 15x_3 = 2 + 8c, \end{cases} \Delta = 3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3+2c & 3 \\ 2+8c & 15 \end{vmatrix} = 39 + 24c,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3+2c \\ 4 & 2+8c \end{vmatrix} = -10,$$

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 13 + 8c,\ x_3 = \Delta_1/\Delta = -10/3,\ \ X_{о.н} = \begin{pmatrix} 13+8c & c & -10/3 \end{pmatrix}^T, \text{ где } c \in \boldsymbol{R}.$$

16.2.2 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -273 \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение.

16.2.3 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 5c, \\ 2x_1 + 9x_3 = -5c, \end{cases} \Delta = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5c & 4 \\ -5c & 9 \end{vmatrix} = 65c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5c \\ 2 & -5c \end{vmatrix} = -15c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 65c,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -15c,\ X_{о.н} = \begin{pmatrix} 65c & -15c & c \end{pmatrix}^T, \text{ где } c \in \boldsymbol{R}.$$

16.3 Задания для решения на практическом занятии

16.3.1 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности найти решение систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -5, \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 8. \end{cases}$

16.3.2 Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

16.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

16.4.1 Исследовать на совместность и найти общее решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

16.4.1.1 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=5. \end{cases}$

16.4.1.2 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+6x_2+5x_3=3, \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2. \end{cases}$

16.4.1.3 $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+10x_3=2, \\ 8x_1+4x_2+22x_3=5. \end{cases}$

16.4.1.4 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=7, \\ 4x_1-6x_2+8x_3=14, \\ 6x_1-9x_2+12x_3=21. \end{cases}$

16.4.1.5 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+5x_2-5x_3=10. \end{cases}$

16.4.1.6 $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=3, \\ 9x_1-3x_2+3x_3=9, \\ 6x_1-2x_2+2x_3=6. \end{cases}$

16.4.1.7 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=5, \\ 2x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 4x_1-4x_2+5x_3=24. \end{cases}$

16.4.1.8 $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=5, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+3x_2-4x_3=9. \end{cases}$

16.4.1.9 $\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1-x_2+6x_3=5, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1. \end{cases}$

16.4.1.10 $\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3=4, \\ x_1-3x_2+x_3=2, \\ 4x_1-12x_2+x_3=4. \end{cases}$

16.4.1.11 $\begin{cases} 5x_1+4x_2-x_3=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-2. \end{cases}$

16.4.1.12 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-5, \\ -2x_1-4x_2-4x_3=10, \\ -x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$

16.4.1.13 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+2x_2-x_3=-1, \\ 6x_1-4x_2+2x_3=2. \end{cases}$

16.4.1.14 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 3x_1+3x_2-3x_3=6, \\ 4x_1+4x_2-4x_3=8. \end{cases}$

16.4.1.15 $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=2, \\ 2x_1 \qquad -4x_3=0. \end{cases}$

16.4.1.16 $\begin{cases} 4x_1+6x_2+2x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ x_1-4x_2+15x_3=4. \end{cases}$

16.4.1.17 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 4x_1+6x_2-10x_3=0, \\ 4x_1+6x_2-9x_3=1. \end{cases}$

16.4.1.18 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_1-x_2-x_3=-6, \\ \qquad x_2+x_3=12. \end{cases}$

16.4.1.19 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=9, \\ x_1-12x_2+13x_3=14, \\ 4x_1-14x_2+18x_3=23. \end{cases}$

16.4.1.20 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=4, \\ 6x_1+3x_2-3x_3=12, \\ 4x_1+2x_2-2x_3=8. \end{cases}$

16.4.1.21 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 12. \end{cases}$

16.4.1.22 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12, \\ 10x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

16.4.1.23 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$

16.4.1.24 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

16.4.1.25 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$

16.4.1.26 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 10. \end{cases}$

16.4.1.27 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 14, \\ 16x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 28. \end{cases}$

16.4.1.28 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 \quad = 0. \end{cases}$

16.4.1.29 $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 12x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 23x_3 = -7. \end{cases}$

16.4.1.30 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 \quad = -8. \end{cases}$

16.4.2 Записать однородную систему линейных алгебраических уравнений $AX = 0$, для которой задана матрица A. Найти фундаментальную систему решений полученной однородной системы линейных уравнений и определить размерность линейного пространства решений данной системы. Определить общее решение заданной однородной системы линейных уравнений.

16.4.2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

16.4.2.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

16.4.2.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

16.4.2.4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$

16.4.2.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 12 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

16.4.2.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 16 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$

16.4.2.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

16.4.2.8 $A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

16.4.2.9 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & -3 & 1\\ 4 & 6 & 5 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

16.4.2.10 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix}.$

16.4.2.11 $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 11 & 6 & 11\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

16.4.2.12 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 3\\ 3 & -6 & 1 & 2 & -1\\ 5 & -10 & 7 & 0 & 5\end{pmatrix}.$

16.4.2.13 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 7 & 5\\ 6 & 4 & 3 & -1 & 1\\ 9 & 6 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.14 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & -3 & 1\\ 7 & 7 & 1 & 2 & -1\\ 9 & 9 & 9 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

16.4.2.15 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & -1\\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1\\ 7 & 7 & 9 & -4 & 5\end{pmatrix}.$

16.4.2.16 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 0 & 5\\ 6 & 9 & -1 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.17 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -4 & 2\\ 3 & 6 & -4 & 5 & -1\\ 4 & 8 & -2 & -3 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.18 $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -5 & 1 & 3\\ 8 & 6 & 1 & -3 & 5\\ 4 & 3 & -2 & -4 & 8\end{pmatrix}.$

16.4.2.19 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 8 & 4 & -3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -6 & -10 & 5\end{pmatrix}.$

16.4.2.20 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1 & 1 & 7\\ 7 & -7 & 4 & -4 & 8\end{pmatrix}.$

16.4.2.21 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 4 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.22 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 3 & 1 & 3\\ 6 & 9 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}.$

16.4.2.23 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.24 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.25 $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 3 & 1\\ 6 & 8 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

16.4.2.26 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 9 & 3 & 6 & 9 & 12\\ 15 & 5 & 10 & 15 & 30\end{pmatrix}.$

16.4.2.27 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 12 & 6 & 5\end{pmatrix}.$

16.4.2.28 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 12 & 4 & 4\end{pmatrix}.$

16.4.2.29 $A=\begin{pmatrix}5 & 5 & 1 & 5 & 2\\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

16.4.2.30 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 6 & 3 & 9\\ 4 & 8 & 8 & 4 & 12\end{pmatrix}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 254 с.

2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.

3. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск. : Новое знание, 2008. – 263 с.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.

5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.

6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.

8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.

9. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

10. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1 – 2.

11. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.

12. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.

13. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. Ч. 1 / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2003. – 65 с.

14. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

15. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980. – 300 с.

16. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Выш. школа, 1978. – 256 с.