МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Практикум

для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)», 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций»

Витебск
2019

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:
А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 9 от 30. 11. 2018.

Математика. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Операционное исчисление : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 101 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по трём разделам курса «Математика» для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-43 01 07 и курса «Высшая математика» для студентов специальности 1-40 05 01-01:дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений и операционное исчисление. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультета информационных технологий и робототехники, а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………………… 4

Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математика» и «Высшая математика» для специальностей 1-40 05 01-01, 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-43 01 07 (первый курс, второй семестр) ……......................…… 5

Практикум по решению задач 8

1 Дифференциальные уравнения первого порядка ....…................... 8
2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 17
3 Дифференциальные уравнения высшего порядка ……..……….......... 26
4 Однородные линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.. 34
5 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.. 38
6 Системы дифференциальных уравнений... 49
7 Преобразование Лапласа 64
8 Свойства преобразования Лапласа 69
9 Решение дифференциальных уравнений методами операционного исчисления... 85
10 Интеграл Дюамеля 93

Литература ………………………………………………………………… 98

Приложение А ……………………………………………………………… 99

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» и «Математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих инженеров механико-информационных специальностей. Среди рассмотренных в практикуме типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов факультета информационных технологий и робототехники. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанным курсам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» и «Математика» для студентов механико-технологических специальностей первого года обучения.

В практикуме рассмотрены три раздела курсов «Высшая математика» и «Математика»: дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений и операционное исчисление. Каждая тема практикума представляет собой методический материал для проведения практического занятия, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия, а также задания для выполнения контролируемой самостоятельной работы. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем практикума, а также их структура построены в соответствии с учебными программами дисциплин «Высшая математика» и «Математика» для студентов механико-технологических специальностей. Данная работа может применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в практикуме теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенная методическая разработка поможет студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена подразумевают электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА» И «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-40 05 01-01 (ПЕРВЫЙ КУРС, ВТОРОЙ СЕМЕСТР)

1. Первообразная функции. Теорема о первообразных.
2. Определение неопределенного интеграла, его геометрический смысл.
3. Таблица неопределённых интегралов основных элементарных функций.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Методы интегрирования неопределенного интеграла.
6. Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Интегрирование рациональных выражений.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Интегрирование тригонометрических выражений.
10. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
11. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функции.
12. Свойства определенного интеграла.
13. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.
14. Связь неопределенного и определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Методы интегрирования определенного интеграла.
16. Несобственные интегралы первого рода.
17. Несобственные интегралы второго рода.
18. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной декартовой системе координат.
19. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.
20. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат и в полярной системе координат.
21. Вычисление длины дуги кривой в полярной системе координат.
22. Вычисление объемов тел по известному поперечному сечению. Объемы тел вращения.
23. Площади поверхности вращения.
24. Приложения определенного интеграла в механике: вычисление пути по заданной скорости, работы переменной силы, силы давления жидкости на пластину.
25. Вычисление массы и центра масс дуги.
26. Вычисление массы и центра масс плоской фигуры.
27. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
28. Частные производные функции нескольких переменных.
29. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных.

30. Необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.

31. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение к приближенным вычислениям.

32. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных. Инвариантность формы полного дифференциала.

33. Дифференцирование функции нескольких переменных, заданных неявно.

34. Касательная плоскость и нормаль к поверхности $z=f(x,y)$.

35. Скалярное поле. Производная функции по направлению скалярного поля. Градиент скалярного поля.

36. Частные производные высшего порядка и полные дифференциалы высшего порядка функции нескольких переменных.

37. Формула Тейлора для функций двух переменных.

38. Локальные экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций нескольких переменных.

39. Локальные экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций двух переменных.

40. Условный экстремум функций нескольких переменных.

41. Условный экстремум функций двух переменных.

42. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функций нескольких переменных в замкнутой области.

43. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Теорема существования задачи Коши.

44. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

45. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

46. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом подстановки Бернулли.

47. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.

48. Решение дифференциальных уравнений первого порядка сводящихся к однородным и линейным уравнениям.

49. Уравнения в полных дифференциалах.

50. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

51. Свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка.

52. Линейная зависимость и линейная независимость системы решений однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка (ОЛДУ). Определитель Вронского. Теорема об общем решении ОЛДУ.

53. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

54. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

55. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольной постоянной.

56. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами с правой специальной частью.

57. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.

58. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключений.

59. Свойства решений однородных линейных систем дифференциальных уравнений.

60. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

61. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

62. Решение неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

63. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа.

64. Оригинал и изображение основных элементарных функций.

65. Таблица оригиналов и изображений.

66. Свойства линейности и однородности преобразования Лапласа.

67. Свойство запаздывания функции-оригинала.

68. Свойство смещения функции-изображения.

69. Свойства дифференцирования оригинала и изображения.

70. Свойства интегрирования оригинала и изображения.

71. Свертка оригиналов. Теорема об изображении свертки.

72. Восстановление оригинала по заданному изображению.

73. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений.

74. Применение преобразования Лапласа к решению систем дифференциальных уравнений.

75. Интеграл Дюамеля. Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Содержание: дифференциальные уравнения (общие понятия), дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия), дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия
1.1.1 Дифференциальные уравнения (общие понятия)

Определение 1.1.1.1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ – общий вид дифференциального уравнения n-го порядка.

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ – нормальный вид дифференциального уравнения n-го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения, а функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ – общим интегралом дифференциального уравнения, где $C_i = Const, i = \overline{1, n}$.

Теорема 1.1.1.1 (Коши). Если функция $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ и её частные производные по аргументам $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.1.1.1)$$

Условия (1.1.1.1) называются начальными условиями, а задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего этим условиям – задачей Коши для дифференциального уравнения.

1.1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $F(x, y, y') = 0$.

Нормальный вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка: $y = \varphi(x, C)$.

Общий интеграл дифференциального уравнения 1-го порядка: $\Phi(x, y, y') = 0$.

Теорема 1.1.2.1 (Коши). Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений первого порядка. Найдём общие решения основных типов этих уравнений.

1.1.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.1.3.1 Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (1.1.3.1)$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ – заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Если функции $N_1(y) \neq 0$ и $M_2(x) \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (1.1.3.1) на произведение $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (1.1.3.2)$$

Проинтегрировав уравнение (1.1.3.2), находим общий интеграл дифференциального уравнения (1.1.3.1):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \qquad (1.1.3.3)$$

Решение уравнений $N_1(y)=0$ и $M_2(x)=0$ являются особыми решениями дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1.1.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1.1.4.1 Функция $f(x,y)$ называется *однородной* функцией измерения α относительно переменных x и y, если справедливо тождество

$$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y), \ \forall t \in R, t \neq 0.$$

Определение 1.1.4.2 Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1.1.4.1)$$

называется *однородным*, если $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Разрешив уравнение (1.1.4.1) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \qquad (1.1.4.2)$$

Поскольку $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения, то функция, стоящая в правой части уравнения (1.1.4.2), является однородной функцией нулевого измерения. Следовательно, $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Таким образом, однородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1.1.4.3)$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $\frac{y}{x} = u$. Тогда $y' = u'x + u$, а уравнение (1.1.4.3) принимает вид $u'x + u = f\left(u\right)$. Общий интеграл уравнения (1.1.4.3): $\int \frac{du}{f(u) - u} - \ln|x| = C$. Выполнив обратную замену, находим общий интеграл первоначального уравнения.

1.1.5 Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, где $\left(\alpha, \beta\right)$ – единственное решение системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то подстановка $a_1 x + b_1 y = z$ позволяет разделить переменные, так как $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти общий интеграл уравнения $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$. Интегрируем: $\int \operatorname{ctg} y\, dy = \int \operatorname{tg} x\, dx$, или $\ln|\sin x| = -\ln|\cos x| + \ln C$. В данном случае постоянную интегрирования удобнее обозначить через $\ln C$. Из последнего равенства находим: $\sin y = C/\cos x$, или $\sin y \cos x = C$ – общий интеграл заданного уравнения.

1.2.2 Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, если $y(1) = \pi/2$.

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением. Сделаем подстановку $y/x = z$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Приходим к уравнению с разделяющимися переменными $xz' = \sin z$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$, откуда $z = 2\operatorname{arctg} Cx$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$.

Подставляем заданные начальные условия: $\pi/2 = 2\operatorname{arctg} C$, откуда $C = 1$. Искомым частным решением будет функция $y = 2x\operatorname{arctg} x$.

1.2.3 Найти общий интеграл уравнения $y' = \frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением, приводящееся к однородному, причём $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Находим решение системы $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$: $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$. Сделаем в исходном уравнении замену переменных, полагая $x = X - 1$, $y = Y + 1$. Уравнение преобразуется к виду $\frac{dY}{dX} = \frac{2X + Y}{X + 2Y}$ или $\frac{dY}{dX} = \frac{2 + Y/X}{1 + 2Y/X}$. В полученном однородном уравнении положив $\frac{Y}{X} = u$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными: $\frac{1 + 2u}{2 - 2u^2} du = \frac{dX}{X}$, общим интегралом является функция $C^4 x^4 (u - 1)^3 (u + 1) = 1$ или $C^4 (Y - X)^3 (Y + X) = 1$. Возвращаясь к переменным x и y, находим общий интеграл исходного уравнения: $C^4 (y - x - 2)^3 (y + x) = 1$.

1.2.4 Тело движется прямолинейно со скоростью v, пропорциональной квадрату времени. Установим зависимость между пройденным путём s и временем t, если известно, что $s(0) = 5$ *м*.

Решение. Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то $s(t)$ и t связаны дифференциальным уравнением $\frac{ds}{dt} = kt^2$ или $ds = kt^2 dt$. Проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение дифференциального уравнения: $s(t) = \frac{1}{3}kt^3 + C$.

Используя начальное условие $s(0) = 5$, получим значение C: $5 = 0 + C$ или $C = 5$.

Следовательно, $s(t)=\frac{1}{3}kt^3+5$ – искомая зависимость.

1.2.5 Найти семейство кривых, для которых треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой в произвольной её точке и радиус-вектором точки касания, является равнобедренным. Основанием треугольника служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy.

Решение. Пусть искомое уравнение кривой будет $y=f(x)$. Проведём касательную MN в произвольной точке кривой $M(x,y)$ до пересечения с осью OY в точке N.

По условию задачи должно быть справедливо равенство $ON=OM$; но $OM=\sqrt{x^2+y^2}$; из уравнения касательной $Y-y=y'\cdot(X-x)$ находим, полагая $X=0$: $Y=ON=y-x\cdot y'$. В результате приходим к однородному уравнению: $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$ или $y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$. Полагаем $\frac{y}{x}=u$. После замены и разделения переменных получаем уравнение $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln C-\ln|x|$, откуда $x\cdot\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=C$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти общий интеграл уравнения $\ln\cos y\,dx+x\operatorname{tg}y\,dy=0$.

1.3.2 Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'+x=1$.

1.3.3 Найти общий интеграл уравнения $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0$.

1.3.4 Найти частный интеграл уравнения $yy'+xe^y=0$, если $y(0)=-1$.

1.3.5 Найти частное решение уравнения $e^{2x+y}\,dx+e^{2y+x}\,dy=0$, если $y(\ln 2)=\ln 3$.

1.3.6 Найти общее решение уравнения $\left(x^2+y^2\right)dx-xy\,dy=0$.

1.3.7 Найти общее решение дифференциального уравнения $y-xy'=y\ln(x/y)$

1.3.8 Решить дифференциальное уравнение $ydy+(x-2y)dx=0$.

1.3.9 Решить дифференциальное уравнение $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$, $y(1)=\pi$.

1.3.10 Решить уравнение $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xy\,dx=0$, при условии $y(1)=-2$.

1.3.11 Решить уравнение $(x-y+4)\,dy+(x+y-2)\,dx=0$.

1.3.12 Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x+y+2}{1-2x-2y}$.

1.3.13 Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $P_0(1,1)$.

1.3.14 Решить уравнение $2(x+y)\,dy+(3x+3y-1)\,dx=0$, при заданном начальном условии $y(0)=2$.

1.3.15 Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключённый между осями координат, делится пополам в точке касания.

1.3.16 Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точек касания.

1.3.17 Материальная точка массой в 1 *г* движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента времени $t=0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t=10\,c$ скорость равнялась 0, 5 *м/с*, а сила – $4\cdot 10^{-3}$ *Н*. Какова будет скорость спустя 30 секунд после начала движения?

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

1.4.1.1 $(xy^2-x)dx+(yx^2-y)dy=0$.

1.4.1.2 $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

1.4.1.3 $(xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$.

1.4.1.4 $(1+x^2)dy=(9+y^2)dx$.

1.4.1.5 $y'=\dfrac{xy^2+y^2}{x^2y-x^2}$.

1.4.1.6 $(x+2)^3dy-(y-3)^2dx=0$.

1.4.1.7 $\sin 3y\cos x dy=\cos 3y\sin x dx$.

1.4.1.8 $(x-5)^4dy-(y+1)^3dx=0$.

1.4.1.9 $\dfrac{dx}{\cos^2 x\cos y}+ctgx\sin y dy=0$.

1.4.1.10 $e^{2x+5y}dy-xdx=0$.

1.4.1.11 $(xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$.

1.4.1.12 $3^{y^2-x^2}=\dfrac{y\cdot y'}{x}$.

1.4.1.13 $y'-\dfrac{\cos(2x+y)}{\cos^3 y}=\dfrac{\cos(2x-y)}{\cos^3 y}$.

1.4.1.14 $(1+e^{3y})xdx=e^{3y}dy$.

1.4.1.15 $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

1.4.1.16 $\sin x\cdot y'=y\cdot\cos x+2\cos x$.

1.4.1.17 $e^x\cdot tgy\,dx=\dfrac{(1-e^x)}{\cos^2 y}dy$.

1.4.1.18 $\dfrac{\cos y}{\sqrt{1+x^2}}dx=2\,dy+\cos y\,dy$.

1.4.1.19 $1+(1+y')\cdot e^y=0$.

1.4.1.20 $e^x\cdot\sin y\,dx+tgy\,dy=0$.

1.4.1.21 $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{9+x^2}dy=0$.

1.4.1.22 $y'\cdot\left(\sqrt{x\cdot y}+\sqrt{x}\right)-y=0$.

1.4.1.23 $\sqrt{9-y^2}\,dx+y\cdot\sqrt{4-x^2}\,dy=0$.

1.4.1.24 $\sec^2 x\cdot tgy+y'\sec^2 y\cdot tgx=0$.

1.4.1.25 $x(y^6+1)\,dx+y^2(x^4+1)\,dy=0$.

1.4.1.26 $y\cdot\ln^3 y+y'\cdot\sqrt{x+1}=0$.

1.4.1.27 $dy+\sin(x+y)dx=\sin(x-y)dx$.

1.4.1.28 $3^{x+2y}+5^{x-2y}\cdot y'=0$.

1.4.1.29 $\dfrac{dy}{dx}+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$.

1.4.1.30 $\ln\left(\cos y\right)dx+x\cdot tgy\,dy=0$.

1.4.2 Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

1.4.2.1 $(x^2-y^2)\,dy=2\cdot x\cdot y\,dx$.

1.4.2.2 $y\cdot(\ln y-\ln x)\,dx-x\,dy=0$.

1.4.2.3 $(x\cdot y'-y)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x$.

1.4.2.4 $\dfrac{x}{y}\,dy=\dfrac{x}{y}\cdot e^{\frac{y}{x}}\,dx+dx$.

1.4.2.5 $\left(y+x\right)dy=(y-x)\,dx$.

1.4.2.6 $x\,dy=y\cdot\left(1-\ln x+\ln y\right)dx$.

1.4.2.7 $x\cdot y'=x\cdot\cos\dfrac{y}{x}+y$.

1.4.2.8 $x\,dy=\left(y+x\cdot\sin\dfrac{y}{x}\right)dx$.

1.4.2.9 $\left(x^2+2\cdot x\cdot y\right)dx+x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.10 $y=x\cdot(y'-\sqrt[x]{e^y})$.

1.4.2.11 $x\cdot y+y^2=(2\cdot x^2+x\cdot y)\cdot y'$.

1.4.2.12 $\left(2\cdot\sqrt{x\cdot y}-y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.13 $x\cdot y'+y\cdot\left(\ln\dfrac{y}{x}-1\right)=0$.

1.4.2.14 $\left(x^2+y^2\right)dx+2\cdot x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.15 $\left(y^2-2\cdot x\cdot y\right)dx-x^2\,dy=0$.

1.4.2.16 $\left(x^2-y^2\right)dx+2\cdot x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.17 $\left(x+2\cdot y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.18 $\left(2\cdot x-y\right)dx+(x+y)\,dy=0$.

1.4.2.19 $2\cdot x^3\cdot y'=y\cdot(2\cdot x^2-y^2)$.

1.4.2.20 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

1.4.2.21 $x\,dy=\sqrt{x^2-y^2}\,dx+y\,dx$.

1.4.2.22 $x\,dy=y\,dx+x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}\,dx$.

1.4.2.23 $x\cdot y'=y+2\cdot\sqrt{y^2+9\cdot x^2}$.

1.4.2.24 $x^2\,dy=x\cdot y\,dx+y^2\cdot e^{-x/y}\,dx$.

1.4.2.25 $\left(1-\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

1.4.2.26 $2\cdot x^2\,dy=(x^2+y^2)\,dx$.

1.4.2.27 $x\,dy-y\,dx=y\,dy$.

1.4.2.28 $\left(2\sqrt{x\cdot y}-y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.29 $\left(y+\sqrt{x\cdot y}\right)dx=x\,dy$.

1.4.2.30 $\sqrt{y^2+x^2}\,dx=y\,dx-x\,dy$.

1.4.3 Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1.4.3.1 $y' = \dfrac{2x-3y+1}{4x+y-5}$.

1.4.3.2 $y' = \dfrac{6x-5y+1}{2x-y-1}$.

1.4.3.3 $y' = \dfrac{4x+3y-7}{2x-5y+3}$.

1.4.3.4 $y' = \dfrac{7x-12y+5}{3x+2y-5}$.

1.4.3.5 $y' = \dfrac{4x-5y+1}{3x+y-4}$.

1.4.3.6 $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x+y-6}$.

1.4.3.7 $y' = \dfrac{4x+2y-6}{3x+y-4}$.

1.4.3.8 $y' = \dfrac{7x-3y-4}{4x-9y+5}$.

1.4.3.9 $y' = \dfrac{3x-3y}{2x+2y-4}$.

1.4.3.10 $y' = \dfrac{x-y}{2x+y-3}$.

1.4.3.11 $y' = \dfrac{6x+y-7}{8x+y-9}$.

1.4.3.12 $y' = \dfrac{4x-y-3}{4x+3y-7}$.

1.4.3.13 $y' = \dfrac{4x-5y+1}{2x+7y-9}$.

1.4.3.14 $y' = \dfrac{x-y}{3x+2y-5}$.

1.4.3.15 $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-y}$.

1.4.3.16 $y' = \dfrac{x-3y+2}{x+y-2}$.

1.4.3.17 $y' = \dfrac{x-5y+4}{9x-4y-5}$.

1.4.3.18 $y' = \dfrac{6x+y-7}{3x+y-4}$.

1.4.3.19 $y' = \dfrac{6x-2y-4}{3x+y-4}$.

1.4.3.20 $y' = \dfrac{3x+3y-6}{4x+5y-9}$.

1.4.3.21 $y' = \dfrac{5x-6y+1}{7x+2y-9}$.

1.4.3.22 $y' = \dfrac{3x-2y+1}{5x+2y-7}$.

1.4.3.23 $y' = \dfrac{x-7y+8}{2x-y-1}$.

1.4.3.24 $y' = \dfrac{x+8y-9}{4x-y-3}$.

1.4.3.25 $y' = \dfrac{2x+y-3}{x+6y-7}$.

1.4.3.26 $y' = \dfrac{6x-5y-1}{2x+5y-7}$.

1.4.3.27 $y' = \dfrac{2x-y-1}{4x-y-3}$.

1.4.3.28 $y' = \dfrac{6x-y-5}{4x-y-3}$.

1.4.3.29 $y' = \dfrac{5x-y-4}{7x+y-8}$.

1.4.3.30 $y' = \dfrac{4x+3y-7}{2x+y-3}$.

2 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 2.1.1.1 Уравнение

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{2.1.1.1}$$

где $P(x),\ Q(x)$ – заданные функции, которые являются линейными относительно неизвестной функции y и её производной, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Существуют различные методы решения линейных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение (2.1.1.1). Записываем соответствующее однородное уравнение $y' + P(x) \cdot y = 0$. Разделяя переменные в однородном уравнении, находим его общее решение $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$, где $C -$ произвольная постоянная.

Общее решение неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения по методу Лагранжа, варьируя произвольную постоянную, то есть, полагая $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x) -$ некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от переменной x. Для нахождения $C(x)$ подставляем функцию y в исходное уравнение (2.1.1.1), что приводит к уравнению $C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$. Откуда $C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$, где $C -$ произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение неоднородного линейного уравнения будет иметь вид

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \tag{2.1.1.2}$$

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать также методом Бернулли. Полагаем $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две неизвестные функции, преобразуем исходное уравнение к виду

$$u' \cdot v + v' \cdot u + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x), \qquad (2.1.1.\ 3)$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + P(x) \cdot v\right) = Q(x). \qquad (2.1.1\ 4)$$

Функцию $v = v(x)$ находим как частное решение уравнения $v' + P(x) \cdot v = 0$. Разделяя переменные в уравнении, находим функцию $v = e^{-\int P(x)dx}$. Учитывая, что выражение в скобках равно нулю, уравнение (2.1.1.4) равносильно уравнению $u' \cdot v = Q(x)$ или $u' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$, из которого находим функцию $u = u(x)$: $u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$. Умножая u на v, находим решение уравнения (2.1.1.1) в виде формулы (2.1.1.2).

2.1.2 Уравнение Бернулли

Определение 2.1.2.1 Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha} \quad (\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \qquad (2.1.2.1)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно преобразовать в линейное уравнение, выполнив замену неизвестной функции при помощи замены $z = y^{1-\alpha}$, которая преобразует исходное уравнение в уравнение $\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' + P(x) \cdot z = Q(x)$.

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не обязательно преобразовывать в линейное уравнение, а сразу можно применять либо метод вариации произвольной постоянной, либо метод Бернулли.

2.1.3 Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Определение 2.1.3.1 Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.1.3.1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Теорема 2.1.3.1 Уравнение (2.1.3.1) с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (2.1.3.2)$$

Общий интеграл уравнения (2.1.3.1) находится по одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C \qquad (2.1.3.3)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C, \qquad (2.1.3.4)$$

где точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти общее решение уравнения $y' - y/x = x$.

Решение. Заданное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Интегрируем соответствующее однородное уравнение $\bar{y}' - \dfrac{\bar{y}}{x} = 0$, разделив переменные $\dfrac{d\bar{y}}{\bar{y}} - \dfrac{dx}{x} = 0$, $\ln|\bar{y}| - \ln|x| = \ln C$, $\bar{y} = C \cdot x$. Находим решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = C(x) \cdot x$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Подставляя в исходное уравнение функцию $y = C(x) \cdot x$ и её производную $y' = C'(x)x + C(x)$, приходим к уравнению $C'(x) \cdot x + C(x) - \dfrac{C(x) \cdot x}{x} = x$ или $C'(x) = 1$, откуда $C(x) = x + C$. Таким образом, общим решением исходного уравнения будет функция $y = C(x) \cdot x = (x + C) \cdot x = x^2 + C \cdot x$.

2.2.2 Найти частное решение уравнения $y' - y\,\mathrm{th}\,x = \mathrm{ch}^2 x$, если $y(0) = 1$.

Решение. Заданное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его по методу Бернулли. Положим $y = u \cdot v$. Тогда после подстановки функции и её производной получаем уравнение вида $u' \cdot v + v' \cdot u - u \cdot v \cdot \mathrm{th}\,x = \mathrm{ch}^2 x$ или $u' \cdot v + u \cdot (v' - v \cdot \mathrm{th}\,x) = \mathrm{ch}^2 x$. Полагаем $v' - v\,\mathrm{th}\,x = 0$, откуда $\dfrac{dv}{v} = \mathrm{th}\,x\,dx$; интегрируя, находим: $\ln|v| = \ln|\mathrm{ch}\,x|$ или $v = \mathrm{ch}\,x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как нам достаточно найти функцию $v = v(x)$ как частное решение уравнения).

Для определения функции $u = u(x)$ решим уравнение $u' \cdot v = \mathrm{ch}^2 x$ или $u' \cdot \mathrm{ch}\,x = \mathrm{ch}^2 x$. Откуда находим $u = \int \mathrm{ch}\,x\,dx + C = \mathrm{sh}\,x + C$. Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $y = \mathrm{ch}\,x \cdot (\mathrm{sh}\,x + C)$. По начальному условию $y(0) = 1$ находим произвольную постоянную C: $1 = \mathrm{ch}\,0(\mathrm{sh}\,0 + C)$, откуда $C = 1$. Следовательно, искомое частное решение $y = \mathrm{ch}\,x(\mathrm{sh}\,x + 1)$.

2.2.3 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$$

Решение. Данное уравнение не является линейным относительно функции y, однако оно приводится к линейному уравнению относительно x и x':

$$x' - x\cos y = \sin 2y.$$

Положим $x = u(y) \cdot v(y)$. Тогда после подстановки функции и её производной $x' = u'v + v'u$ получаем уравнение вида $u' \cdot v + v' \cdot u - u \cdot v \cdot \cos y = \sin 2y$ или $u' \cdot v + u \cdot (v' - v \cdot \cos y) = \sin 2y$. Найдём функцию $v = v(y)$ как частное решение уравнения $v' - v\cos y = 0$, откуда $\dfrac{dv}{v} = \cos y\,dy$. Интегрируя уравнение, находим: $\ln|v| = \sin y$ или $v = e^{\sin y}$.

Для определения функции $u = u(y)$ решим уравнение $u' \cdot v = \sin 2y$ или $u' \cdot e^{\sin y} = \sin 2y$. Откуда находим $u = \int \sin 2y \cdot e^{-\sin y}\,dx + C$. При помощи подстановки $\sin y = t$ и применяя метод интегрирования по частям, определяем функцию $u(y) = -2 \cdot (\sin y + 1) \cdot e^{-\sin y} + C$. Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $x(y) = -2\sin y - 2 + C \cdot e^{\sin y}$.

2.2.4 Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{2xy}{1 + x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = u \cdot v$.

Подставляя в исходное уравнение $y = u \cdot v$ и $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = \frac{4\sqrt{uv}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения $v' - \dfrac{2xv}{1+x^2} = 0$. Разделяя в нём переменные, находим: $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$, откуда $\ln|v| = \ln\left(1+x^2\right)$ или $v = 1+x^2$. Для нахождения u имеем уравнение $u'v = \dfrac{4\sqrt{uv}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$, или (поскольку $v = 1+x^2$) $u'v = \dfrac{4\sqrt{u}\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx, \quad \int\frac{du}{2\sqrt{u}} = \int\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx, \quad \sqrt{u} = \mathrm{arctg}^2\,x + C, \quad u = \left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2.$$

Таким образом, $y = \left(1+x^2\right)\left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2$ – общее решение уравнения.

2.2.5 Найти общий интеграл уравнения $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

Решение. В условии задачи: $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, таким образом, условие полного дифференциала выполнено, то есть данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдём общий интеграл по формуле (2.1.3.4), положив в ней $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$$\int_0^x (x + y - 1)dx + \int_0^y e^y dy = C_0, \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right)\Bigg|_0^x + e^y\Big|_0^y = C_0.$$

Подставляя пределы интегрирования, находим общий интеграл уравнения $x^2/2 + xy - x + e^x = C$, где $C = C_0 + 1$.

2.2.6 Сила тока I в цепи с сопротивлением R, индукцией L и электродвижущей силой $E = kt$, которая пропорциональна времени, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = E.$$

Найти зависимость силы тока I от времени t, считая сопротивление R и индукцию величинами постоянными, а сила тока I в начальный момент времени равна нулю.

Решение. Дифференциальное уравнение $L\cdot\frac{dI}{dt}+R\cdot I=k\cdot t$ является линейным, где неизвестной функцией является сила тока $I(t)$. Положим $I=u\cdot v$. Тогда, после подстановки функции I и её производной получаем уравнение вида $L\cdot u'\cdot v+L\cdot v'\cdot u+R\cdot u\cdot v=\mathrm{ch}^2 x$ или $L\cdot u'\cdot v+u\cdot(L\cdot v'+R\cdot v)=k\cdot t$. Полагаем $L\cdot v'+R\cdot v=0$, откуда $\frac{dv}{v}=-\frac{R}{L}dt$; интегрируя, находим: $\ln|v|=-\frac{R}{L}dt$ или $v=e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$. Для определения функции $u=u(t)$ решим уравнение $u'\cdot v=k\cdot t$ или $u'\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=k\cdot t$. Откуда находим $u=\frac{k}{L}\int te^{\frac{R}{L}t}dt+C=\left(\frac{k}{R}t-\frac{kL}{R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}+C$ (при нахождении интеграла использовалась формула интегрирования по частям). Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $I(t)=\frac{k}{R}\cdot t-\frac{kL}{R^2}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$. По начальному условию $I(0)=0$ находим произвольную постоянную C: $0=-\frac{k\cdot L}{R^2}+C$, откуда $C=\frac{k\cdot L}{R^2}$. Следовательно, искомая зависимость между силой тока и временем имеет вид

$$I(t)=\frac{k}{R}\cdot t-\frac{kL}{R^2}+\frac{kL}{R^2}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти общее решение уравнения $xy'-y=x^2\cos x$.

2.3.2 Найти общее решение уравнения $y'\cos^2 x+y=\mathrm{tg}\,x$.

2.3.3 Найти общее решение уравнения $y'\cos x+y=1-\sin x$.

2.3.4 Найти частное решение уравнения $y'-\frac{4y}{x}=\frac{7}{x^4}$, если $y(1)=0$.

2.3.5 Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $y'+2xy=2x^3e^{-x^2}$ найти кривую, проходящую через точку $M_0(0;1)$.

2.3.6 Найти общее решение уравнения $y'=\frac{y}{y^4+2x}$.

2.3.7 Найти общее решение уравнения $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$.

2.3.8 Найти общее решение уравнения $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{arctg}\,x$.

2.3.9 Найти общее решение уравнения $\left(x^2\ln y-x\right)\cdot y'=y$.

2.3.10 Найти частное решение уравнения $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$, если $y(0) = \dfrac{9}{4}$.

2.3.11 Найти частное решение уравнения $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$, если $y(0)=1$.

2.3.12 Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + \sin y)dx + (x\cos y + 1)dy = 0$.

2.3.13 Найти общий интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

2.3.14 Найти частный интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(0) = 2$.

2.3.15 Найти частный интеграл уравнения $(2y-3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(2) = 1$.

2.3.16 Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

2.3.17 Найти ток в катушке в момент времени t, если её сопротивление равно R, индуктивность равна L, начальный ток $I_0 = 0$, электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin\omega t$, а падение напряжения вдоль проводника равно $L\cdot\dfrac{dI}{dt} + R\cdot I$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти частное решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

2.4.1.1 $\begin{cases}(x+1)y' + y = x^2,\\ y(0) = 5.\end{cases}$

2.4.1.2 $\begin{cases}y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x,\\ y(\pi/2) = \pi/2.\end{cases}$

2.4.1.3 $\begin{cases}y'\cos x = y\sin x + \cos^2 x,\\ y(3\pi/2) = -1/4.\end{cases}$

2.4.1.4 $\begin{cases}y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x,\\ y(0) = -1.\end{cases}$

2.4.1.5 $\begin{cases}y' + \dfrac{x\cdot y}{1-x^2} = x + \arcsin x,\\ y(0) = 0.\end{cases}$

2.4.1.6 $\begin{cases}y' + y\cdot\cos x = e^{-\sin x},\\ y(0) = 0.\end{cases}$

2.4.1.7 $\begin{cases}x\cdot y' + y - 3\cdot\sin x = 0,\\ y(\pi/2) = 2/\pi.\end{cases}$

2.4.1.8 $\begin{cases}y' - y\cdot\mathrm{tg}x = 4\cdot x^3\cdot\sec x,\\ y(0) = 0.\end{cases}$

2.4.1.9 $\begin{cases}(1+x^2)y' - 2xy = 3x^2(1+x^2)^2,\\ y(0) = 1.\end{cases}$

2.4.1.10 $\begin{cases}xy' + y - 2x^2 = 0,\\ y(1) = 1.\end{cases}$

2.4.1.11 $\begin{cases}(x+1)\cdot y'+y=x^3+x^2,\\ y(0)=0.\end{cases}$

2.4.1.12 $\begin{cases}x\cdot y'-2\cdot y+x^2=0,\\ y(1)=0.\end{cases}$

2.4.1.13 $\begin{cases}x\cdot y'+y=\sin x,\\ y(\pi/2)=2/\pi.\end{cases}$

2.4.1.14 $\begin{cases}(x^2-1)\cdot y'-x\cdot y=x^3-x,\\ y(\sqrt{2})=1.\end{cases}$

2.4.1.15 $\begin{cases}(1-x^2)\cdot y'+x\cdot y=1,\\ y(0)=1.\end{cases}$

2.4.1.16 $\begin{cases}y'\cdot \mathrm{ctg}x-y=2\cos^2 x\cdot \mathrm{ctg}x,\\ y(0)=0.\end{cases}$

2.4.1.17 $\begin{cases}x^2\cdot y'=2\cdot x\cdot y+3,\\ y(1)=-1.\end{cases}$

2.4.1.18 $\begin{cases}y'-2\cdot x\cdot y=x\cdot e^{-x^2},\\ y(0)=0.\end{cases}$

2.4.1.19 $\begin{cases}y'-3\cdot x^2\cdot y-x^2\cdot e^{x^3}=0,\\ y(0)=0.\end{cases}$

2.4.1.20 $\begin{cases}x\cdot y'+y=\ln x+1,\\ y(1)=0.\end{cases}$

2.4.1.21 $\begin{cases}y'-y\cdot \mathrm{tg}x=\sec x,\\ y(0)=1.\end{cases}$

2.4.1.22 $\begin{cases}y'\cdot\sin x-y\cdot\cos x=-\dfrac{\sin^2 x}{x^2},\\ y(\pi/2)=2/\pi.\end{cases}$

2.4.1.23 $\begin{cases}\sin 2x\,dy=2\cdot(y+\cos x)\,dx,\\ y(\pi/4)=-\sqrt{2}.\end{cases}$

2.4.1.24 $\begin{cases}y'=2\cdot y\cdot\sin^2 x+2\cdot x\cdot e^{x-\frac{1}{2}x^2},\\ y(0)=0.\end{cases}$

2.4.1.25 $\begin{cases}x\cdot(x-1)\cdot y'+y=x^2\cdot(2x-1),\\ y(2)=4.\end{cases}$

2.4.1.26 $\begin{cases}x\cdot y'+y-e^x=0,\\ y(1)=e.\end{cases}$

2.4.1.27 $\begin{cases}y'-2\cdot y\cdot \mathrm{ctg}x=\sin^3 x,\\ y(\pi/2)=0.\end{cases}$

2.4.1.28 $\begin{cases}y'+2\cdot y\cdot \mathrm{tg}x=x\cdot\cos^3 x,\\ y(0)=1.\end{cases}$

2.4.1.29 $\begin{cases}y'-y\cdot\cos x=-\sin 2x,\\ y(0)=3.\end{cases}$

2.4.1.30 $\begin{cases}x\cdot y'-y+\ln x=0x,\\ y(1)=2.\end{cases}$

2.4.2 Решить задачу Коши при заданном начальном условии $y(3)=m$, где число m – номер варианта. При решении задания необходимо указать тип уравнения.

2.4.2.1 $y^2y'+\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{1}{x^2}$.

2.4.2.2 $y'+4x^3y=\dfrac{(x^3+1)e^{-4x}}{y^{-2}}$.

2.4.2.3 $y'+y=x\sqrt{y}$

2.4.2.4 $y'-y=\dfrac{x}{y}e^{2x}$.

2.4.2.5 $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=\sqrt{y}\cdot \mathrm{arctg}x$.

2.4.2.6 $y'+x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{y^2}}$.

2.4.2.7 $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

2.4.2.8 $2x^3yy'+3x^2y^2+1=0$.

2.4.2.9 $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$.

2.4.2.10 $xy' + y = y^2 \ln x$.

2.4.2.11 $x(x-1) \cdot y' + y^3 = x \cdot y$

2.4.2.12 $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = x + \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 - 1}$

2.4.2.13 $y' + y^2 \cos x = y$.

2.4.2.14 $y' + y^2 \cdot \cos x = y \cdot tgx$.

2.4.2.15 $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{2x}{y^2} = 2x^3$.

2.4.2.16 $y' = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{2x}$.

2.4.2.17 $y' - \dfrac{3y}{2x} = -\dfrac{(5x^2+3)y^3}{2x}$.

2.4.2.18 $\dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{2}$.

2.4.2.19 $y' = \dfrac{y^2 \ln x}{3x} - \dfrac{y}{3x}$.

2.4.2.20 $\dfrac{y'}{1-x^3} + \dfrac{4x^3 y}{1-x^3} = 4e^{4x} y^2$.

2.4.2.21 $y' - y = 2y^2 x$.

2.4.2.22 $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2y^2 \ln x}{x}$.

2.4.2.23 $\dfrac{y'}{x-1} + \dfrac{xy}{x-1} = e^x y^2$.

2.4.2.24 $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x} = y^2$.

2.4.2.25 $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

2.4.2.26 $2\left(\dfrac{y'}{x-1} + \dfrac{xy}{x-1}\right) = e^x y^2$.

2.4.2.27 $y' + y = y^2 x$.

2.4.2.28 $y' + \dfrac{y}{3x} = \dfrac{y^2}{3}$.

2.4.2.29 $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$.

2.4.2.30 $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$.

2.4.3 Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

2.4.3.1 $\left(1 + \dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx + \dfrac{y^2 - x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} dy = 0$.

2.4.3.2 $y' = \dfrac{3x^2 - 2x - y}{x - 2y - 3y^2}$.

2.4.3.3 $(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0$.

2.4.3.4 $y' = -\dfrac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2 y + 4y^3}$.

2.4.3.5 $\left(2x - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$.

2.4.3.6 $y' = \dfrac{2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)}{\sqrt{x^2 - y}}$.

2.4.3.7 $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0$.

2.4.3.8 $y' = -\dfrac{3y^2 + 2xy + 2x}{6xy + x^3 + 3}$.

2.4.3.9 $\frac{\sin 2x + xy}{y}dx = -\frac{y^3 - \sin^2 x}{y^2}dy$. **2.4.3.10** $(2x-y)dx+(2y-x)dy=0$.

2.4.3.11 $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$. **2.4.3.12** $y' = \frac{2x\cos^2 y}{x^2 \sin 2y - 2y}$.

2.4.3.13 $e^{y}dx+(\cos y + xe^{y})dy=0$. **2.4.3.14** $y' = \frac{x^2 - 3xy^2}{3x^2 y - 6y^2 - 1}$.

2.4.3.15 $\left(\ln y - 2x\right)dx + \frac{x-2y^2}{y}dy = 0$. **2.4.3.16** $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

2.4.3.17 $3\cdot x^2 \cdot e^y + (x^3 \cdot e^y - 1)\cdot y' = 0$. **2.4.3.18** $(2x^3 - xy^2)dx = -(2y^3 - x^2 y)dy$.

2.4.3.19 $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$. **2.4.3.20** $e^y\, dx + (x\cdot e^y - 2\cdot y)dy = 0$.

2.4.3.21 $\frac{1+xy}{x^2 y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$. **2.4.3.22** $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$.

2.4.3.23 $(3x^2+4y^2)dx = -(8xy + e^y)dy$. **2.4.3.24** $\left(xe^x + \frac{1}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0$.

2.4.3.25 $tgx\, dx + \left(\frac{y - \ln\left(\cos x\right)}{y}\right)dy = 0$. **2.4.3.26** $y' = -\frac{e^x \sin y + x}{e^x \cos y + y}$.

2.4.3.27 $(3x^2y^2+7)dx + 2x^3 y dy = 0$. **2.4.3.28** $\frac{dy}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$.

2.4.3.29 $(xy^2 - x^3)dx + (x^2 y - y)dy = 0$. **2.4.3.30** $xe^{y^2}dx = -\left(x^2 y e^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y\right)dy$.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков значительно сложнее задачи решения дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений этого типа формулируется также, как и для любых уравнений высшего порядка (теорема 1.1.1.1).

1. *Уравнение типа* $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение (n –1)-го порядка: $y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + \bar{C}_1$. Повторяя эту операцию, приходим к уравнению (n –2)-го порядка:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int \left(\varphi_1(x) + C_1\right)dx = \varphi_2(x) + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2.$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $C_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ – произвольные постоянные величины, связанные определённым образом с произвольными постоянными значениями $\bar{C}_i$.

2. *Уравнение типа* $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее явно искомую функцию y и её производные до (k –1)-го порядка включительно $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

Порядок такого дифференциального уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию наименьшую из производных данного уравнения, то есть положив $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$. Таким образом, порядок уравнения понизили на «k» единиц. Если удастся найти общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)$, то приходим к дифференциальному уравнению высшего порядка, допускающего понижение порядка, первого типа: $z = y^{(k)} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)$, решение которого находим k-кратным интегрированием. В частности, если $n = 2,\ k = 1$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3. *Уравнение типа* $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее явно независимую переменную x.

Порядок этого дифференциального уравнения можно понизить, если выполнить замену $y' = p(y)$, где y рассматривается как аргумент функции y'. В этом случае $y'', y''', \ldots$, по правилам дифференцирования сложной функции, выразятся по формулам

$$y'' = p\frac{dp}{dy},\ y''' = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и так далее. В итоге вместо исходного уравнения получаем уравнение вида

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2} ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Если последнее уравнение имеет общее решение $p = \varphi\left(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right)$, где $p = \dfrac{dy}{dx}$, то для нахождения общего интеграла исходного уравнения необходимо разделить переменные и решить полученное уравнение

$$\int \frac{dy}{\varphi\left(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right)} = \int dx \text{ или } \Phi\left(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right) = x + C_n.$$

В частности, если $n = 2$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти частное решение уравнения $y''' = 24x - 16\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$, $y''(0) = 6$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению первого типа. Найдём его решение путём трёхкратного интегрирования.

Интегрируем уравнение: $y'' = \int (24x - 16\cos 2x)\, dx + C_1 = 12x^2 - 8\sin 2x + C_1$. Используя начальное условие $y''(0) = 6$, получаем, что $C_1 = 6$, а, следовательно, $y'' = 12x^2 - 8\sin 2x + 6$. Интегрируем полученное дифференциальное уравнение: $y' = \int (12x^2 - 8\sin 2x + 6)\, dx = 4x^3 + 4\cos 2x + 6x + C_2$. Используя начальное условие $y'(0) = 8$, получаем, что $C_2 = 4$, а, следовательно, $y' = 4x^3 + 4\cos 2x + 6x + 4$. Интегрируем полученное уравнение: $y = \int (4x^3 + 4\cos 2x + 6x + 4)\, dx + C_3 =$ $y = x^4 + 2\sin 2x + 3x^2 + 4x + C_3$. Используя начальное условие $y(0) = 3$, получаем, что $C_3 = 3$, а, следовательно, $y = x^4 + 2\sin 2x + 3x^2 + 4x + 3$ – частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

3.2.2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = y'/x$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению второго типа. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z' = z/x$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Записав это уравнение в дифференциальной форме и разделив переменные, получаем равносильное уравнение $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1$, $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$, $z = C_1 x$. Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y' = C_1 x$. Из него находим общее решение исходного уравнения: $y = \int C_1 x\, dx = C_1 x^2/2 + C_2$.

3.2.3 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'^2}{y}$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению третьего типа. Выполнив замену $y' = p(y)$, с учётом того, что $y'' = p\frac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $p = 0$ и $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}$. Первое уравнение, после обратной замены, принимает вид $y' = 0$, а его решение $y = C$. Разделив переменные во втором уравнении $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ и интегрируя его, находим решение уравнения: $p = C_1 y$. Учитывая, что $p = y'$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y' = C_1 y$ или $\frac{dy}{y} = C_1\, dx$. Интегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx + \ln C_2$, $\ln|y| = C_1 x + \ln C_2$, $y = C_2 e^{C_1 x}$. Функции $y = C$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$ являются общими решениями исходного уравнения.

3.2.4 Тело массы m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон движения тела.

Решение. По второму закону Ньютона получаем следующее дифференциальное уравнение движения тела: $ma = mg - kv^2$ или $m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$. Выполним замену $\frac{dS}{dt} = v$. В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$. Откуда, полагая $\frac{mg}{k} = b^2$, получим уравнение $\frac{dv}{b^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt$. Интегрируя уравнение, находим общий интеграл ($v < b$):

$$\frac{1}{2b}\ln\frac{b+v}{b-v} = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Учитывая, что $v(0) = 0$, получаем $C_1 = 0$. Таким образом, $\ln\frac{b+v}{b-v} = \frac{2bk}{m}t$ или $v = b\,\mathrm{th}\frac{bk}{m}t$. Заменяя v через $\frac{dS}{dt}$, приходим для определения S к уравнению $\frac{dS}{dt} = b\,\mathrm{th}\frac{bk}{m}t$. Интегрируя уравнение, определяем S:

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\frac{bk}{m}t + C_2 = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_2.$$

Учитывая начальное условие $S(0) = 0$, находим $C_2 = 0$.

Итак, закон падения тела при сопротивлении воздуха, пропорциональным квадрату скорости, описывается формулой

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

3.2.5 Найти линию, у которой радиус кривизны равен кубу нормали. Известно, что линия проходит через точку $M_0(0,1)$ и имеет в этой точке касательную, которая составляет с осью абсцисс угол 135^0.

Решение. Так как радиус кривизны плоской кривой выражается формулой $R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$, а длина нормали $N = y\left(1+y'^2\right)^{3/2}$, то дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''} = y^3\left(1+y'^2\right)^{3/2}.$$

Откуда, сократив на $\left(1+y'^2\right)^{3/2}$, приходим к уравнению $y''y^3 = 1$.

Положив $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, приходим к уравнению $p\dfrac{dp}{dy}y^3 = 1$. Интегрируя его, находим: $p\,dp = \dfrac{dy}{y^3}$ или $\dfrac{1}{2}p^2 = -\dfrac{2}{2y^2} + \dfrac{1}{2}C_1$, то есть $p^2 = C_1 - \dfrac{1}{y^2}$. Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'^2 = C_1 - \dfrac{1}{y^2}$.

Произвольную постоянную C_1 найдём из условия, что касательная в точке $M_0(0,1)$ составляет с осью абсцисс угол 135^0: $y'(0) = \mathrm{tg}135^0 = -1$. Следовательно, $1 = C_1 - 1$ или $C_1 = 2$. Таким образом для определения функции y получено дифференциальное уравнение первого порядка $y'^2 = 2 - \dfrac{1}{y^2}$ или $y' = -\dfrac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$. Разделяем переменные $\dfrac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}} = -dx$ и интегрируем уравнение: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2y^2-1} = -x + C_2$ или $y^2 = 2\left(C_2 - x\right)^2 + \dfrac{1}{2}$ (при условии $C_2 - x \ge 0$). Так как по условию $y(0) = 1 > 0$, то $y = \sqrt{2\left(C_2 - x\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$ и $C_2 \ge 0$.

Произвольную постоянную C_2 определяем из условия прохождения линии через точку $M_0(0,1)$, то есть $1 = \sqrt{2\left(C_2 - 0\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$ или $C_2 = \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, искомая линия определяется уравнением

$$y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти общее решение уравнения $y'''\sin^4 x = \sin 2x$.

3.3.2 Найти частное решение уравнения $y''' = xe^{-x}$ при заданных начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

3.3.3 Найти частное решение уравнения $y^{\mathrm{IV}} = \cos^2 x$ при заданных начальных условиях $y(0) = 1/32$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'''(0) = 0$.

3.3.4 Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)\,y'' - xy' = 2$.

3.3.5 Найти частное решение уравнения $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2$ при заданных начальных условиях $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

3.3.6 Найти общее решение уравнения $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

3.3.7 Найти частное решение уравнения $yy'' - y'^2 = 0$ при заданных начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3.3.8 Найти общее решение уравнения $xy'' = y' \cdot \ln(y' / x)$.

3.3.9 Найти общее решение уравнения $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.

3.3.10 Найти частное решение уравнения $y'' + 2yy'^3 = 0$ при заданных начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

3.3.11 Найти уравнение линии, для которой проекция радиуса кривизны на ось ординат есть величина постоянная.

3.3.12 Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

3.3.13 Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа силы, действующая в направлении движения и зависящая от пути, пропорциональна времени, протекшему с момента начала движения.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

3.4.1.1	$xy'' = y' \ln\left(y'/x\right)$.	**3.4.1.2**	$xy'' + y' = \ln\left(y'/x\right)$.
3.4.1.3	$y'' tgx - y' = 1$.	**3.4.1.4**	$xy'' - y' = x^2 e^x$.
3.4.1.5	$x^2 y'' + xy' = 1$.	**3.4.1.6**	$x^3 y'' + x^2 y' = 1$.
3.4.1.7	$xy''' + y'' = 1/\sqrt{x}$.	**3.4.1.8**	$xy'' + y' = \ln x$.
3.4.1.9	$y'' \ln x - y'/x = 0$.	**3.4.1.10**	$xy''' - 2y'' = -2/x^2$.
3.4.1.11	$(1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x^3$.	**3.4.1.12**	$x^4 y'' + x^3 y' = 4$.
3.4.1.13	$(x+1) y''' + y'' = (x+1)$.	**3.4.1.14**	$xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
3.4.1.15	$y'' - 2y' ctgx = \sin^3 x$.	**3.4.1.16**	$y''' + y''/x = 1/\sqrt{x^5}$.
3.4.1.17	$(x^2 + 1) y'' + 2xy' = x^3$.	**3.4.1.18**	$xy''' - y'' + 1/x = 0$.
3.4.1.19	$y'' - y'/(x-1) = x^2 - x$.	**3.4.1.20**	$2xy'y'' - y'^2 = 1$.
3.4.1.21	$y'' + 2xy'/(x^2 + 1) = 2x$.	**3.4.1.22**	$xy''' - y'' = 0$.
3.4.1.23	$(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$.	**3.4.1.24**	$xy'' - y' = x^2$.
3.4.1.25	$y''(e^x + 1) + y' = 0$.	**3.4.1.26**	$y'' + y' = \sin x$.
3.4.1.27	$xy'' + xy'^2 - y' = 0$.	**3.4.1.28**	$y'' - y'/x = x^2/y'$.
3.4.1.29	$y'' + y' tgx = \sin 2x$.	**3.4.1.30**	$y'' = y' + x$.

3.4.2 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

3.4.2.1 $y''' = y''^2$,
$y''(0) = -1, y'(0) = 0, y(0) = 1.$

3.4.2.2 $2yy'' = y'^2$,
$y(-1) = 4,\ y'(-1) = 1.$

3.4.2.3 $y''^2 = 4(y' - 1)$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

3.4.2.4 $yy'' - y'^2 = y^3$,
$y(0) = -0{,}5, y'(0) = 0.$

3.4.2.5 $y''y^3 = 1$,
$y(0) = 1, y'(0) = 1.$

3.4.2.6 $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$,
$y(0) = y'(0) = 1.$

3.4.2.7 $yy'' - y'^2 = 0$,
$y(0) = 1, y'(0) = 2.$

3.4.2.8 $y'' + yy'^3 = 0$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

3.4.2.9 $2y'^2 = (y - 1)y''$,
$y(0) = y'(0) = 2.$

3.4.2.10 $4y''^2 = y'^2 + 1$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3.4.2.11 $y'' = 1/\sqrt{y}$,
$y(0) = y'(0) = 0.$

3.4.2.12 $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$,
$y(0) = y'(0) = 1.$

3.4.2.13 $y'' = y' / \sqrt{y}$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

3.4.2.14 $y''(1 + y) = y'^2 + y'$,
$y(0) = y'(0) = 2.$

3.4.2.15 $y\left(1 - \ln y\right)y'' + \left(1 + \ln y\right)y'^2 = 0$,
$y(0) = y'(0) = 1.$

3.4.2.16 $(1 - y)y'' = -2y'^2$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

3.4.2.17 $y'' - y'^2 - y' = 0$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

3.4.2.18 $y'' + yy'' - 5y'^2 = 0$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3.4.2.19 $2y'^2 = yy''$,
$y(0) = 1, y'(0) = 2.$

3.4.2.20 $y'' = y^{-3}$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3.4.2.21 $2yy'' - y'^2 + 1 = 0$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

3.4.2.22 $y''^2 - y' = 0$,
$y(0) = 2/3,\ y'(0) = 1.$

3.4.2.23 $y'' + y'^2 - 1 = 0$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3.4.2.24 $2yy'' - y'^2 = 0$,
$y(0) = 1, y'(0) = 1.$

3.4.2.25 $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3.4.2.26 $y'' - 2\sin^3 y \cdot \cos y = 0$,
$y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 1.$

3.4.2.27 $e^{-y} \cdot y'' - y' = 0$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

3.4.2.28 $y \cdot y'' - 2 \cdot y \cdot y' \cdot \ln y = y^2$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

3.4.2.29 $y'' + 50 \cdot \sin y \cdot \cos^3 y = 0$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

3.4.2.30 $y'' = -yy'^3$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

4 ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка и структура их решений, линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 4.1.1 *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (4.1.1)$$

где $a_i, i = \overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$.

Определение 4.1.2 Система функций $y_i(x), i = \overline{1,n}$ называется *линейно зависимой* на интервале I, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, что для всех $x \in I$ линейная комбинация функций равна нулю, то есть выполняется равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах, то система функций называется *линейно независимой*.

Определение 4.1.3 Любая совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 4.1.1 *Общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Таким образом, если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения, то общее решение уравнения (4.1.1) имеет вид

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x), \qquad (4.1.2)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами составляем *характеристическое уравнение*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \qquad (4.1.3)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – корни характеристического уравнения. Тогда

1) каждому действительному однократному корню λ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будет соответствовать функция

$$y = e^{\lambda x};$$

2) каждому действительному корню λ кратности k в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\lambda x},\ \ y_2 = xe^{\lambda x},\ \ ...,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x};$$

3) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

4) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$\begin{gathered} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,. \end{gathered}$$

Приведём схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем характеристическое уравнение (4.1.3).
2. Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
3. В зависимости от характера корней записываем фундаментальную систему решений.
4. Подставляя фундаментальную систему решений в формулу (4.1.2), получаем общее решение уравнения (4.1.1).

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти решение уравнения $y''-5y'+6y=0$, если $y(0)=3$, $y'(0)=8$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2-5\lambda+6=0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda=2$ или $\lambda=3$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{3x}$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

Воспользуемся начальными условиями: $C_1+C_2=3$, $2C_1+3C_2=8$. Откуда $C_1=1$, а $C_2=2$. Следовательно, искомое решение будет $y_{ч.o}=e^{2x}+2e^{3x}$.

4.2.2 Найти общее решение уравнения $y'''-3y''+3y'-1=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2,3}=1$ – корень кратности $k=3$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o}=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$.

4.2.3 Найти общее решение уравнения $y''-6y'+13y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2-6\lambda+13=0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1=e^{3x}\cos 2x$, $y_2=e^{3x}\sin 2x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o}=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$.

4.2.4 Материальная точка массы 2 *г* движется по оси Ox под действием востанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала, с коэффициентом пропорциональности $k_1=58$. Среда, в которой происходит движение, оказывает движению сопративление, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2=8$. Найти закон движения материальной точки.

Решение. Скорость точки x', её ускорение x'', дуйствующие на неё силы: восстанавливащая $F_1=-58x$, сила сопротивления среды $F_2=-8x'$. По второму закону Ньютона находим: $2x''=-8x'-58x$ или $x''+4x'+29x=0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2+4\lambda+29=0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2}=-2\pm 5i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $x_1=e^{-2x}\cos 5x$, $x_2=e^{-2x}\sin 5x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение уравнения $x_{o.o}=C_1e^{-2x}\cos 5x+C_2e^{-2x}\sin 5x$, которое описывает затухающие колебания.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 В задачах 4.3.1.1 – 4.3.1.9 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

4.3.1.1 $y''-6y'+8y=0$. **4.3.1.2** $y''+y'-2y=0$. **4.3.1.3** $y''-4y'=0$.

4.3.1.4 $y''+4y'+4y=0$. **4.3.1.5** $y''+6y'+9y=0$. **4.3.1.6** $y''-2y'+y=0$.

4.3.1.7 $y''+6y'+25y=0$. **4.3.1.8** $y''-4y'+5y=0$. **4.3.1.9** $y''+4y=0$.

4.3.2 В задачах 4.3.2.1 – 4.3.2.4 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

4.3.2.1 $y'''+6y''+12y'+8=0$. **4.3.2.2** $y'''-9y''+26y'-24y=0$.

4.3.2.3 $y'''-y''-5y'-3y=0$. **4.3.2.4** $y^{\mathrm{V}}+5y'''+4y=0$.

4.3.3 Найти решение уравнения $y''-5y'+4y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

4.3.4 Решить задачу Коши: $y'''-2y''=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=7$, $y''(0)=8$.

4.3.5 Найти интегральную кривую уравнения $y''+9y=0$, проходящую через точку $M_0(\pi,-1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y+1=x-\pi$.

4.3.6 Решить задачу № 4.2.4, если сила сопротивления среды равна нулю.

4.3.7 Решить задачу № 4.2.4, если $k_1=16$, а $k_2=12$.

4.3.8 Решить задачу № 4.2.4, если $k_1=50$, а $k_2=20$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти общее решение дифференциальных уравнений.

4.4.1.1	а) $y''+3y'-18y=0$;	б) $y''+4y'+4y=0$;	в) $y''+4y'+5y=0$.
4.4.1.2	а) $y''-11y'+18y=0$;	б) $y''-28y'+196y=0$;	в) $y''+25y=0$.
4.4.1.3	а) $y''+y'-20y=0$;	б) $y''+8y'+16y=0$;	в) $2y''+2y'+y=0$.
4.4.1.4	а) $y''-6y'+8y=0$;	б) $y''+22y'+121y=0$;	в) $y''+y=0$.
4.4.1.5	а) $y''+11y'+28y=0$;	б) $y''+16y'+64y=0$;	в) $16y''+y=0$.
4.4.1.6	а) $y''-7y'+12y=0$;	б) $y''-14y'+49y=0$;	в) $y''-2y'+2y=0$.
4.4.1.7	а) $y''+4y'-32y=0$;	б) $y''+6y'+9y=0$;	в) $36y''+25y=0$.
4.4.1.8	а) $y''-7y'+10y=0$;	б) $y''-26y'+169y=0$;	в) $5y''-2y'+y=0$.
4.4.1.9	а) $y''+12y'+32y=0$;	б) $y''+20y'+100y=0$;	в) $25y''+y=0$.
4.4.1.10	а) $y''-8y'+15y=0$;	б) $y''-18y'+81y=0$;	в) $y''+4y=0$.
4.4.1.11	а) $y''+4y'-21y=0$;	б) $y''+12y'+36y=0$;	в) $y''+2y'+5y=0$.
4.4.1.12	а) $y''-9y'+20y=0$;	б) $y''-8y'+64y=0$;	в) $9y''+25y=0$.

4.4.1.13	а)	$y''-4y'-21y=0$;	б)	$y''+18y'+81y=0$;	в)	$5y''+4y'+y=0$.
4.4.1.14	а)	$y''-8y'+12y=0$;	б)	$y''-4y'+4y=0$;	в)	$4y''+25y=0$.
4.4.1.15	а)	$y''-5y'-24y=0$;	б)	$y''+26y'+169=0$;	в)	$81y''+y=0$.
4.4.1.16	а)	$y''-9y'+18y=0$;	б)	$y''-10y'+25y=0$;	в)	$y''-4y'+5y=0$.
4.4.1.17	а)	$y''-7y'-18y=0$;	б)	$y''+28y'+196=0$;	в)	$4y''+9y=0$.
4.4.1.18	а)	$y''-10y'+24y=0$;	б)	$y''-24y'+144y=0$;	в)	$9y''+y=0$.
4.4.1.19	а)	$y''-3y'-10y=0$;	б)	$y''+14y'+49y=0$;	в)	$y''-2y'+5y=0$.
4.4.1.20	а)	$y''-9y'+14y=0$;	б)	$y''-16y'+64y=0$;	в)	$y''+81y=0$.
4.4.1.21	а)	$y''+3y'-18y=0$;	б)	$y''+30y'+225y=0$;	в)	$25y''+36y=0$.
4.4.1.22	а)	$y''-10y'+21y=0$;	б)	$y''-6y'+9y=0$;	в)	$5y''-4y'+y=0$.
4.4.1.23	а)	$y''+7y'-18y=0$;	б)	$y''+22y'+121y=0$;	в)	$49y''+4y=0$.
4.4.1.24	а)	$y''-11y'+28y=0$;	б)	$y''-2y'+y=0$;	в)	$2y''-2y'+y=0$.
4.4.1.25	а)	$y''+2y'-15y=0$;	б)	$y''+10y'+25y=0$;	в)	$y''+9y=0$.
4.4.1.26	а)	$y''-10y'+16y=0$;	б)	$y''-20y'+100y=0$;	в)	$16y''+49y=0$.
4.4.1.27	а)	$y''-3y'-28y=0$;	б)	$y''+24y'+576y=0$;	в)	$5y''+2y'+y=0$.
4.4.1.28	а)	$y''-11y'+24y=0$;	б)	$y''-12y'+36y=0$;	в)	$4y''+y=0$.
4.4.1.29	а)	$y''-12y'+32y=0$;	б)	$y''+2y'+y=0$;	в)	$y''+16y=0$.
4.4.1.30	а)	$y''+11y'+30y=0$;	б)	$y''-30y'+225y=0$;	в)	$y''+2y'+2y=0$.

5 НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка, решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка методом вариации произвольной постоянной, решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка со специальной правой частью.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 5.1.1 *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (5.1.1)$$

где $a_i, i=\overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$ и $f(x) \neq 0$.

Предположим, что известно общее решение (4.1.2) соответствующего однородного уравнения (4.1.1).

Теорема 5.1.1 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка (5.1.1) равно сумме соответствующего однородного уравнения (4.1.1) и произвольного частного решения неоднородного дифференциального уравнения, то есть

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}. \tag{5.1.2}$$

Существует несколько методов определения частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Предположим, что известно общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{о.о} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$. Согласно методу Лагранжа, частное решение всегда представимо в виде

$$y_{ч.н} = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + ... + C_n(x) \cdot y_n(x), \tag{5.1.3}$$

где функции $y_i(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1.1), а неизвестные функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) \quad + C_2'(x) \cdot y_2(x) \quad + ... + C_n'(x) \cdot y_n(x) \quad = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) \quad + C_2'(x) \cdot y_2'(x) \quad + ... + C_n'(x) \cdot y_n'(x) \quad = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \tag{5.1.4}$$

которая является линейной системой алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$. Так как функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми, то определитель основной матрицы данной системы отличен от нуля, а, следовательно, система имеет единственное решение $C_i'(x) = g_i(x)$. Интегрируя последние равенства, которые являются дифференциальными уравнениями первого порядка, находим $C_i(x) = \int g_i(x)dx$, для всех $i = \overline{1,n}$.

Следовательно, частное решение $y_{ч.н}$ уравнения (5.1.1) имеет вид

$$y_{ч.н} = y_1(x) \cdot \int g_1(x)dx + y_2(x) \cdot \int g_2(x)dx + ... + y_n(x) \cdot \int g_n(x)dx\,. \quad (5.1.5)$$

Замечание 1. При нахождении интегралов в формуле (5.1.5) появляются n произвольных постоянных. В общем случае их можно принять равными нулю.

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение, правая часть которого имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x \right), \quad (5.1.6)$$

где $P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлены степени n и m, соответственно.

Если число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (4.1.3) для однородного линейного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н} = e^{\alpha x} \cdot \left(p_k(x) \cdot \cos \beta x + q_k(x) \cdot \sin \beta x \right), \quad (5.1.7)$$

где $p_k(x),\ q_k(x)$ – многочлены степени $k = \max\{n, m\}$.

Если число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения (4.1.3) кратности r для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(p_k(x) \cdot \cos \beta x + q_k(x) \cdot \sin \beta x \right), \quad (5.1.8)$$

где $p_k(x),\ q_k(x)$ – многочлены степени $k = \max\{n, m\}$.

Приведём виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных уравнений.

№	Правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Частное решение $y_{ч.н}$ дифференциального уравнения
1	2	3	4
1	$P_n(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x)$
		Число 0 является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot p_n(x)$
2	$A \cdot e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$a \cdot e^{\alpha x}$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$a \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}$
3	$e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
4	$P_n(x) \cdot \sin \beta x$ $(Q_n(x) \cdot \cos \beta x)$	Число $\pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x$
		Число $\pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot (p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x)$
5	$e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \cdot \sin \beta x$ $(e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot \cos \beta x)$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x)$
		Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x)$

1	2	3	4
6	$e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+Q_m(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\cdot(p_k(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_k(x)\cdot\cos\beta x)$ $k=\max\{n,m\}$
		Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(p_k(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_k(x)\cdot\cos\beta x)$ $k=\max\{n,m\}$

Для определения параметров многочленов применяется *метод неопределённых коэффициентов*. Подставляем частное решение $y_{ч.н}$ и его производные в исходное уравнение. Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях многочлена в левой и правой части полученного равенства или при соответствующих тригонометрических функциях, находим соответствующие параметры многочленов $p_k(x)$ и $q_k(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме различных функций, каждая из которых имеет специальный вид, то для нахождения частного решения такого уравнения необходимо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и будет являться частным решением исходного уравнения.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти общее решение уравнения $y''-y'=e^{2x}\sin e^x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-y'=0$. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2-\lambda=0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda=0$ или $\lambda=1$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1=e^{0\cdot x}=1$, $y_2=e^x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{о.о}=C_1+C_2e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н}=C_1(x)+C_2(x)e^x$.

Для определения произвольных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (5.1.4):

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)e^x=0, \\ \qquad\qquad C_2'(x)e^x=e^{2x}\sin e^x. \end{cases}$$

Решая систему, имеем $C_2(x) = -\cos e^x$, $C_1(x) = e^x \cos e^x - \sin e^x$. Следовательно, частное решение заданного неоднородного уравнения может быть записано в виде $y_{ч.н} = -\sin e^x$.

Согласно формуле (5.1.2), получаем общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$.

5.2.2 Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 130 \cdot \sin 3x$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $y_{о.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $130 \cdot \sin 3x = e^{0x}(0 \cdot \cos 3x + 130 \cdot \sin 3x)$, причём $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i = \pm 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = A\cos 3x + B\sin 3x$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$(-7A - 9B)\cos 3x + (9A - 7B)\sin 3x = 130 \cdot \sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получаем $A = 9$, $B = -7$. Тогда $y_{ч.н.} = 9\cos 3x - 7\sin 3x$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 9\cos 3x - 7\sin 3x$.

5.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 8y' + 20y = 10e^{5x}$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 8y' + 20y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$. Следовательно, $y_{о.о.} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $10e^{5x} = e^{5x}(10 \cdot \cos(0 \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(0 \cdot x))$, причём $\alpha \pm \beta i = 5 \pm 0i = 5$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = Ae^{5x}$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем $5Ae^{5x} = 10 \cdot e^{5x}$. Откуда получаем $A = 2$. Тогда $y_{ч.н.} = 2e^{5x}$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x + 2e^{5x}$.

5.2.4 Найти общее решение уравнения $y''' - 4y'' = 48x^2 - 48x - 10$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y''' - 4y'' = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4$. Следовательно, $y_{о.о.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $48x^2 - 48x - 10 = e^{0x}((48x^2 - 48x - 10) \cdot \cos(0 \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(0 \cdot x))$, причём $\alpha \pm \beta i = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Тогда частное решение можно записать в виде

$y_{ч.н.} = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение имеем

$$-48Ax^2 + (24A - 24B)x + 6B - 8C = 48x^2 - 48x - 10.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем $A = -1,\ B = 1,\ C = 2$. Тогда $y_{ч.н.} = -x^4 + x^3 + 2x^2$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} - x^4 + x^3 + 2x^2$.

5.2.5 Свободно висящая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственнно веса (трением пренебрегаем). Определить, за какое время (в секундах) соскользнёт с крюка вся цепь, если в начальный момент с одной стороны крюка висело 20 м, а с другой стороны $-$ 12 м цепи, и скорость цепи равна нулю.

Решение. Предположим, что вес одного погонного метра цепи равен P. Обозначим через x длину большей части цепи, свешивающейся с крюка через время t после начала движения. К центру тяжести цепи приложена сила $F = (x - (32 - x)) \cdot P = P \cdot (2x - 32)$, масса цепи равна $\dfrac{32}{g}P$, а ускорение равно $x''(t)$. Используя второй закон Ньютона, приходим к уравнению движения центра тяжести цепи: $\dfrac{32}{g} \cdot P \cdot x'' = (2x - 32) \cdot P$ или $x'' - \dfrac{g}{16}x = -g$. Данное уравнение необходимо решить при начальных условиях $x(0) = 20$, $x'(0) = 0$.

Записываем соответствующее однородное уравнение $x'' - \dfrac{g}{16}x = 0$ и его характеристическое уравнение $\lambda^2 - \dfrac{g}{16} = 0$, корнями которого являются числа $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{g}}{4}$. Частное решение дифференциального уравнения находим в виде $x^* = A$. После подстановки в уравнение $x'' - \dfrac{g}{16}x = -g$ находим $A = 16$ или $x^* = 16$.

Таким образом, общим решением дифференциального уравнения, согласно формуле (5.1.2), является функция $x(t) = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{4}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 16$.

Использование начальных условий даёт два уравнения: $C_1 + C_2 + 16 = 20$, $\dfrac{\sqrt{g}}{4}C_1 - \dfrac{\sqrt{g}}{4}C_2 = 0$. Решая полученную систему, находим $C_1 = C_2 = 2$. Тогда частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x(t) = 2 \cdot e^{\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 16 = 4\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{4}t + 16.$$

Время, за которое соскользнёт вся цепь, определяется из условия: $x(T)=32$. Решая уравнение $4\operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{4}T+16=32$, находим время $T\approx 2{,}64$ *с*.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти общее решение уравнения $y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{2x}}$.

5.3.2 Найти общее решение уравнения $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

5.3.3 Найти общее решение уравнения $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$.

5.3.4 Решить задачу Коши: $y''+4y=\operatorname{ctg}2x$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.3.5 Найти общее решение уравнения $y''+5y'+6y=3x+2$.

5.3.6 Найти общее решение уравнения $y''+8y'=60x^2-32x^3+18x$.

5.3.7 Найти общее решение уравнения $y''+9y=36e^{3x}$.

5.3.8 Найти общее решение уравнения $y'''+2y''+y'=-2e^{-2x}$.

5.3.9 Найти общее решение уравнения $y''+9y=e^{x}\cos 3x$.

5.3.10 Найти общее решение уравнения $y''-5y'-6y=19\cdot\sin x+3\cos x$.

5.3.11 Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=\sin 2x$.

5.3.12 Решить задачу Коши: $y''-4y'+3y=e^{5x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=9$.

5.3.13 Найти частное решение уравнения $y''+3y'=(40x+58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

5.3.14 Решить задачу Коши: $y''+y=\cos 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

5.3.15 Найти общее решение уравнения $y''+y=xe^{x}+2e^{-x}$.

5.3.16 Найти общее решение уравнения $y'''+y''-2y'=x-e^{x}$.

5.3.17 Определить закон движения материальной точки массой m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчёта пермещений и прямопропорциональной расстоянию точки от начала отсчёта, если сопротивление среды отсутствует, но на точку действует внешняя сила $F_1=A\cos\omega t$.

5.3.18 Решить задачу № 5.2.5 с учётом трения цепи о крюк, если сила трения равна весу одного метра цепи.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найдите общее решение дифференциального уравнения.

5.4.1.1 $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}.$

5.4.1.2 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x.$

5.4.1.3 $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

5.4.1.4 $y'' - y = -4\cos x + 2\sin x.$

5.4.1.5 $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x.$

5.4.1.6 $y'' - y' + y = -13\sin 2x.$

5.4.1.7 $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}.$

5.4.1.8 $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x.$

5.4.1.9 $6y'' - y' - y = 3e^{2x}.$

5.4.1.10 $y'' + y = 4xe^{x}.$

5.4.1.11 $y'' + 2y' + 37y = 2x + 5.$

5.4.1.12 $y'' - 4y' + 5y = 3\sin x + \cos x.$

5.4.1.13 $y'' + 6y' + 5y = 25x^{2} - 2.$

5.4.1.14 $y'' + y' + y = 6e^{-x}.$

5.4.1.15 $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x.$

5.4.1.16 $y'' + 16y = 8\cos 4x.$

5.4.1.17 $y'' - 5y' + 4y = 4x^{2}e^{2x}.$

5.4.1.18 $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}.$

5.4.1.19 $y'' + 9y = 9x^{4} + 12x^{2} - 27.$

5.4.1.20 $y'' + 4y' = e^{x}(12\cos 2x + \sin 2x).$

5.4.1.21 $y'' - 6y' + 13y = -3\cos 2x.$

5.4.1.22 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x.$

5.4.1.23 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

5.4.1.24 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x.$

5.4.1.25 $y''' - y'' = 12x^{2} + 6x.$

5.4.1.26 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

5.4.1.27 $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

5.4.1.28 $y'' - 8y' = 16 + 48x^{2} - 128x^{3}.$

5.4.1.29 $y'' + 2y' - 3y = x^{2}e^{x}.$

5.4.1.30 $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x.$

5.4.2 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

5.4.2.1 $y'' + y' = 2x\cos x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.2 $y'' - y' = 2(1 - x),$
$y(0) = y'(0) = 1.$

5.4.2.3 $y''' - y' = 6 - 3x^{2},$
$y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

5.4.2.4 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x},$
$y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.5 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x},$
$y(0) = 0, y'(0) = 4.$

5.4.2.6 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 8.$

5.4.2.7 $y'' - 6y' + 9y = 9x^{2} - 12x + 2,$
$y(0) = 1, y'(0) = 3.$

5.4.2.8 $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x},$
$y(0) = 1, y'(0) = 6.$

5.4.2.9 $y'' + 4y' + 5y = 5x^{2} - 32x + 5,$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.10 $y'' + 9y = 15\sin 2x,$
$y(0) = -7,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.11 $y'' + y' = 2x^{2}e^{x},$
$y(0) = 5,\ y'(0) = 0{,}5.$

5.4.2.12 $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^{2},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5.4.2.13 $y'' + 9y = \cos 3x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.14 $y'' + 2y' + y = \cos x,$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.15 $y'' + y' = 2x + x^2,$
$y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$

5.4.2.16 $y'' - 9y = e^{-2x},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.17 $y''' + y'' = \sin x,$
$y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0.$

5.4.2.18 $y''' - 2y'' + y' = 4,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2, y''(0) = -2.$

5.4.2.19 $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

5.4.2.20 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2},$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.21 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),$
$y(0) = 2, y'(0) = 2.$

5.4.2.22 $y'' - 8y' + 16y = \left(2x - 3\right)e^{4x},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.23 $y'' - 10y' + 25y = \left(x^2 + 8x\right)e^{5x},$
$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

5.4.2.24 $y'' + 4y = 4e^{7x},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.25 $y'' + 9y = 36e^{3x},$
$y(0) = 2, y'(0) = 6.$

5.4.2.26 $y'' - 8y' + 16y = \left(x + 6\right)e^{4x},$
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

5.4.2.27 $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.28 $y'' - 2y' + y = 16e^x,$
$y(0) = 1, y'(0) = 2.$

5.4.2.29 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x,$
$y(0) = 3/4, y'(0) = -1/2.$

5.4.2.30 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1,$
$y(0) = 2, y'(0) = 3.$

5.4.3 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

5.4.3.1 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.2 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{(1 + e^{-x})},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.3 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},$
$y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2.$

5.4.3.4 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(1 + e^{-x})},$
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2.$

5.4.3.5 $y'' + y = 2\mathrm{ctg}x,$
$y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 2.$

5.4.3.6 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x},$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.7 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{(2 + e^x)},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.8 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.9 $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.10 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x},$
$y(\pi/8) = 3,\ y'(\pi/8) = 2\pi.$

5.4.3.11 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$,
$y(\pi/4) = 2,\ y'(\pi/4) = \pi.$

5.4.3.12 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(2 + e^{-x})}$,
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3.$

5.4.3.13 $y'' + 0,25 \cdot y = 0,25 \cdot \mathrm{ctg}(0,5 \cdot x)$,
$y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 0,5.$

5.4.3.14 $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$,
$y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$

5.4.3.15 $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

5.4.3.16 $y'' + y = 4\mathrm{ctg}x$,
$y(\pi/2) = 4,\ y'(\pi/2) = 4.$

5.4.3.17 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$,
$y(\pi/6) = 4, y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

5.4.3.18 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.19 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$,
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3.$

5.4.3.20 $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.21 $y'' + 4y = 8\mathrm{ctg}2x$,
$y(\pi/4) = 5,\ y'(\pi/4) = 4.$

5.4.3.22 $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$,
$y(0) = \ln 4, y'(0) = 3 - \ln 8.$

5.4.3.23 $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$,
$y(1/2) = 1, y'(1/2) = \pi^2/2.$

5.4.3.24 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$,
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2.$

5.4.3.25 $y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos \dfrac{x}{\pi}}$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.26 $y'' + 4y = 4\mathrm{ctg}2x$,
$y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$

5.4.3.27 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{2 + e^{-2x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.28 $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$,
$y(\pi/2) = 2,\ y'(\pi/2) = 0.$

5.4.3.29 $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.30 $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$,
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

6 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Содержание: нормальные системы дифференциальных уравнений, решение систем дифференциальных уравнений методом исключений, линейные системы дифференциальных уравнений, линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 6.1.1 *Нормальной системой дифференциальных уравнений* n-го порядка называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Введем векторные обозначения для нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\vec{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T; \ \frac{d\,\vec{y}}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} & \dots & \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}^T; \ f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix}^T.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (6.1.1) можно записать в векторной форме

$$\frac{d\,\vec{y}}{dx} = \vec{f}\,(x, \vec{y}). \tag{6.1.2}$$

Определение 6.1.2 Вектор – функция $\vec{y}_0(x) == \begin{bmatrix} y_1^0 & y_2^0 & \dots & y_n^0 \end{bmatrix}^T$, определенная на интервале $\left(a; b\right)$, называется *решением* системы (6.1.1) или (6.1.2), если она непрерывна и дифференцируема на заданном интервале и подстановке её в систему дифференциальных уравнений, все её уравнения обращаются в тождество.

Задача отыскания решения системы (6.1.1) или (6.1.2), которое удовлетворяет начальным условиям $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, записанным в векторной форме, или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_1^0; \\ y_2(x_0)=y_2^0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0)=y_n^0, \end{cases} \tag{6.1.3}$$

называется *задачей Коши*, а условия (6.1.3) – условиями задачи Коши.

Теорема 6.1.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в окрестности точки $M_0(x_0;y_1^0;y_2^0;...;y_n^0)$, $(n+1)$ – мерного пространства функции f_i непрерывны и имеют ограниченные частные производные, то в δ-окрестности точки x_0 существует и притом единственное решение $y_1=y_1(x);\, y_2=y_2(x);\dots;y_n=y_n(x)$ системы (6.1.1), удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0)=y_1^0;\, y_2(x_0)=y_2^0;\dots;y_n(x_0)=y_n^0$.

Определение 6.1.3 *Общим решением* системы дифференциальных уравнений называется система функций $y_i=y_i(x,C_1,C_2,...,C_n)$, где $i=\overline{1,...,n}$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых допустимых константах $C_1,C_2,...,C_n$ эта система функций удовлетворяет всем уравнениям системы дифференциальных уравнений;

2) при любых начальных условиях $y_i(x_0)=y_i^0$, $i=\overline{1,...,n}$ можно подобрать такие значения постоянных $C_1^0,C_2^0,...,C_n^0$, так чтобы система функций $y_i=y_i\left(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)$ являлась решением системы.

Решение системы дифференциальных уравнений при определенных значениях постоянных называется *частным решением* системы.

Между нормальной системой ДУ-*n* и дифференциальным уравнением *n*-го порядка существует тесная связь. В частности любое дифференциальное уравнение n-го порядка вида $y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ можно свести к нормальной системе n-го порядка.

Пусть $y=y_1$, тогда $y_1'=y'=y_2$,

$$y''=y_2'=y_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}=y_{n-1}'=y_n,$$
$$y_n'=y_{n+1}.$$

Тогда приходим к нормальной системе *n* дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (6.1.4)$$

При определенных условиях решение нормальной системы дифференциальных уравнений можно свести к решению дифференциального уравнения того же порядка.

Рассмотрим ***алгоритм решения поставленной задачи*****.**

Продифференцируем первое уравнение системы (6.1.1) по переменной x: $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. В данном уравнении вместо y_k' подставляем их значения из системы (6.1.1). Полученное равенство снова продифференцируем по переменной x: $\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_3(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ и так далее. $\frac{d^n y_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. В результате исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = \varphi_2(x, y_1, y_2, ...y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, ...y_n). \end{cases} \qquad (6.1.5)$$

Если можно из $(n-1)$ первых уравнений полученной системы выразить функции $y_2, y_3, ..., y_n$ и подставить их в последнее уравнение, то получаем дифференциальное уравнение *n*-го порядка: $\frac{d^n y_1}{dx^n} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)$. В общем случае порядок ДУ может получиться меньше n. Данный метод решения нормальной системы ДУ называется ***методом исключения***.

Определение 6.1.4 *Нормальной линейной* системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x). \end{cases} \tag{6.1.6}$$

В векторной форме систему можно записать в виде $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\varphi}(x)$. Если $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$, то линейная система называется однородной, и в векторной форме однородная система имеет вид: $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$. Если $\vec{\varphi}(x)$ тождественно не равно нулю, то система называется неоднородной. Применяя метод исключения к нормальной линейной системе, её решение сведется к решению линейного дифференциального уравнения n-ого порядка или меньше.

Если $\vec{y}_{о.о.}(x)$ – решение однородной системы $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$, а $\vec{y}_{ч.н.}(x)$ - частное решение неоднородной системы $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\varphi}(x)$, то $\vec{y}_{о.о.}(x) + \vec{y}_{ч.н.}(x)$ - решение неоднородной системы.

Определение 6.1.5 Система функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, такие, что линейная комбинация векторов равна нулю, то есть выполняется равенство

$$\alpha_1\vec{y}_1(x) + \alpha_2\vec{y}_2(x) + \ldots + \alpha_n\vec{y}_n(x) = 0. \tag{6.1.7}$$

Если из равенства (6.1.7) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то система функций называется *линейно независимой*.

Выпишем координаты вектор-функции.

$$\begin{gathered} \vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \end{bmatrix}^T \\ \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} y_{12}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{n2}(x) \end{bmatrix}^T \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{y}_n(x) = \begin{bmatrix} y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}^T \end{gathered}$$

Теорема 6.1.2 Если система линейно зависима, то определитель Вронского (или вронскиан) равен нулю:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & .... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & .... & y_{2n}(x) \\ .... & .... & .... & .... \\ y_{n1}(x) & y_{n1}(x) & .... & y_{nn}(x) \end{vmatrix}=0. \qquad (6.1.8)$$

Теорема 6.1.3 Для того чтобы система решений $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),...,\vec{y}_n(x)$ однородной нормальной линейной системы была линейно независимой на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы её вронскиан был отличен от нуля в каждой точке данного интервала $\left(W(x)\neq 0\right)$.

Определение 6.1.6 Любая совокупность n линейно независимых решений однородной линейной системы n-ого порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 6.1.4 (об общем решении однородной системы). Линейная комбинация любой фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами является общим решением однородной системы линейных уравнений.

$$\vec{y}_{o.o.}=\sum_{i=1}^{n}C_i\vec{y}_i(x)=C_1\vec{y}_1(x)+C_2\vec{y}_2(x)+...+C_n\vec{y}_n(x). \qquad (6.1.9)$$

Теорема 6.1.5 (об общем решении неоднородной системы). Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и некоторого частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\vec{y}_{о.н.}(x)=\vec{y}_{о.о.}(x)+\vec{y}_{ч.н.}(x).$$

Теорема 6.1.6 Если комплексно-значимая функция $\vec{y}(x)=\vec{u}(x)+i\cdot\vec{v}(x)$ является решением однородной системы дифференциальных уравнений, то решением этой системы будут действительные вектор-функции $\vec{u}=\vec{u}(x)$ и $\vec{v}=\vec{v}(x)$.

Рассмотрим линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение 6.1.7 *Однородной линейной системой дифференциальных уравнений* с постоянными коэффициентами называется система вида

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\
\dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n.
\end{cases}
\tag{6.1.10}
$$

Решение системы (6.1.10) находят в виде

$$
y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \ldots\ldots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}. \tag{6.1.11}
$$

В результате подстановки функций и её производных в систему (6.1.10) приходим к однородной системе линейных алгбраических уравнений

$$
\begin{cases}
(a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\
a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0.
\end{cases}
\tag{6.1.12}
$$

Полученная система будет иметь не нулевое решение, в том и только в том случае, если определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{6.1.13}
$$

Записанное уравнение относительно параметра λ называется характеристическим уравнением однородной линейной системы дифференциальных уравнений.

1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Подставляя найденные собственные значения в систему (6.1.12) и решая её, находим n линейно независимых собственных векторов основной матрицы системы:

$$\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{\gamma}^n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1.14)$$

Этим собственным векторам будет соответствовать n векторов, которые являются решениями системы (6.1.10):

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} e^{\lambda_2 x} \\ \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \quad \dots, \vec{y}_n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \qquad (6.1.15)$$

Общее решение системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами для случая действительных различных корней характеристического уравнения имеет вид: $\vec{y} = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) + \ldots + C_n \vec{y}_n(x)$, или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 \gamma_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1 \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases} \qquad (6.1.16)$$

2. Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексный корень. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексный корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты в характеристическом уравнении действительные, то сопряженное число $\alpha - \beta i$ также является корнем уравнения. Полученным комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы коэффициентов будут соответствовать собственные векторы с комплексно-сопряженными координатами:

$$\vec{\gamma} = \vec{p} + i\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 + iq_1 \\ p_2 + iq_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_n + iq_n \end{pmatrix}. \qquad (6.1.17)$$

Тогда решение системы в векторной форме может быть записано в виде:

$$\vec{y} = \vec{\gamma} \cdot e^{(\alpha+\beta i)x} = \begin{pmatrix} (p_1 + iq_1)e^{(\alpha+\beta i)x} \\ (p_2 + iq_2)e^{(\alpha+\beta i)x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p_n + iq_n)e^{(\alpha+\beta i)x} \end{pmatrix} = \vec{u}(x) + i\,\vec{v}(x), \qquad (6.1.18)$$

где

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1 \cos\beta x - q_1 \sin\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2 \cos\beta x - q_2 \sin\beta x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\alpha x}(p_n \cos\beta x - q_n \sin\beta x) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1 \sin\beta x + q_1 \cos\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2 \sin\beta x + q_2 \cos\beta x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\alpha x}(p_n \sin\beta x + q_n \cos\beta x) \end{pmatrix}. \quad (6.1.19)$$

Рассмотрим решение линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \varphi_2(x). \end{cases} \qquad (6.1.20)$$

Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Предположим, что известно общее решение однородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12}, \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}. \end{cases} \qquad (6.1.21)$$

Частное решение неоднородной системы можно найти методом вариации произвольных постоянных, которое состоит в том, что частное решение неоднородной системы имеет точно такой же вид, как и общее решение однородной системы, только считаем, что произвольные постоянные зависят от переменной x:

$$\begin{cases} y_1^* = C_1(x) y_{11} + C_2(x) y_{12}, \\ y_2^* = C_1(x) y_{21} + C_2(x) y_{22}. \end{cases} \qquad (6.1.22)$$

Произвольные постоянные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} = \varphi_1(x), \\ C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} = \varphi_2(x). \end{cases} \qquad (6.1.23)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Методом исключения найти частное решение системы

$$\begin{cases} 5\dot{y} - 2\dot{x} + 4y - x = e^{-t}, \\ \dot{y} + 8y - 3x = 5e^{-t}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ x(0)=2$.

Решение. Исключаем x из уравнений системы. Из второго уравнения выражаем функцию $x=\frac{1}{3}\left(y'+8y-5e^{-t}\right)$. Подставив x в первое уравнение, после упрощения, приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $y(t)$: $y''+y'-2y=-4e^{-t}$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2+\lambda-2=0$ для соответствующего однородного дифференциального уравнения являются числа $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-2$. Тогда общее решение однородного уравнения записываем в виде $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$.

Частное решение неоднородного уравнения записываем в виде $y^*=Ae^{-x}$. Находя первую и вторую производные, подставляем их и функцию в исходное уравнение, находим значение $A=2$. На основании формулы (5.1.2) получаем общее решение дифференциального уравнения: $y=C_1e^{t}+C_2e^{-2t}+2e^{-t}$.

После подстановки y и $y'=C_1e^{t}-2C_2e^{-2t}-2e^{-t}$ в выражение $x=\frac{1}{3}\left(y'+8y-5e^{-t}\right)$ находим функцию $x=3C_1e^{t}+2C_2e^{-2t}+3e^{-t}$. Тогда общим решением заданной системы будут функции

$$\begin{cases} x=3C_1e^{t}+2C_2e^{-2t}+3e^{-t}, \\ y=C_1e^{t}+C_2e^{-2t}+2e^{-t}. \end{cases}$$

Найдём частное решение системы, подставив $y(0)=1$ и $x(0)=2$ в систему:

$$\begin{cases} C_1+C_2+2=1, \\ 3C_1+2C_2+3=2. \end{cases}$$

Решив систему относительно C_1 и C_2, получим $C_1 = 1,\ C_2 = -2$. Следовательно, частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = 3e^t - 4e^{-2t} + 3e^{-t}, \\ y = e^t - 2e^{-2t} + 2e^{-t}. \end{cases}$$

6.2.2 Методом исключения решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 - y_3. \end{cases}$$

Решение. Исключим y_1 и y_2 из этих уравнений, для этого из третьего уравнения находим $y_1 = y_3' + y_3$. Продифференцируем полученное равенство по переменной x: $y_1' = y_3'' + y_3'$, подставив значения y_1 и y_1' в первое уравнение, найдём из него $y_2 = -\frac{1}{2}y_3''$, а,следовательно, $y_2' = -\frac{1}{2}y_3'''$.

Подставив y_2, y_2' и y_1 во второе уравнение, получим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y_3''' - y_3'' - 2y_3' = 0$. Составляя характеристическое уравнение и находя его корни, записываем решение дифференциального уравнения: $y_3 = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.

Чтобы определить неизвестные функции, находим y_3' и y_3'' из последнего равенства. Подставляя производные функции $y_3(x)$ в формулы $y_1 = y_3' + y_3$ и $y_2 = -\frac{1}{2}y_3''$, получаем общее решение системы.

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 + 3C_2e^{2x}, \\ y_2(x) = -2C_2e^{2x} - \frac{1}{2}C_3e^{-x}, \\ y_3(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}. \end{cases}$$

6.2.3 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, используя характеристическое уравнение системы.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,$$

Находим собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям из системы.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma; \quad \gamma_1 = 0$$

Тогда $\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $\gamma = 1$, то $\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{cases} -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma = 1, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -2\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma = 1; \quad \gamma_2 = 0,\ \vec{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение в векторной форме $\vec{y} = C_1\vec{\gamma}^1 e^x + C_1\vec{\gamma}^2 e^{2x} + C_1\vec{\gamma}^3 e^{3x}$ или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = \qquad\quad C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \end{cases}$$

6.2.4 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, используя характеристическое уравнение системы.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Найдем собственные векторы, которые соответствуют полученным собственным значениям.

$$\begin{cases} -3i\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - 3i\gamma_2 = 0. \end{cases} \quad \gamma_1 = i, \ \gamma_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений: $\begin{cases} y_1 = ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-\sin 3x + i\cos 3x) \\ y_2 = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x) \end{cases}$.

Тогда

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x}\sin 3x \\ e^{2x}\cos 3x \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos 3x \\ e^{2x}\sin 3x \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $\begin{cases} y_1 = -C_1e^{2x}\sin 3x + C_2e^{2x}\cos 3x, \\ y_2 = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x. \end{cases}$

6.2.5 Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x. \end{cases}$$

Применим методом исключения

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x. \end{cases}$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$. Корни уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Фундаментальная система решений: $x_1 = \cos t,\ x = \sin t$. Общее решение уравнения $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. По условию $y = \dfrac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Тогда общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы находим в виде:

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Произвольные постоянные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определим из системы:

$$\left.\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}\right| \begin{matrix} \times \sin t \\ + \\ \times \cos t \end{matrix}$$

$$C_2'(t) = 1; \quad C_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_2(t) = t; \quad C_1(t) = \ln|\cos t|$$

Частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x = \ln|\cos t| \cdot \cos t + t \cdot \sin t, \\ y = -\ln|\cos t| \cdot \sin t + t \cdot \cos t. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \ln\left|\cos t\right|\cdot\cos t + t\cdot\sin t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t - \ln\left|\cos t\right|\cdot\sin t + t\cdot\cos t. \end{cases}$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Решить систему дифференциальных уравнений методом исключений:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} - 5x + 3y = 2e^{3t}, \\ \dot{y} - x - y = 5e^{-t}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 3y_1 - y_2, \end{cases}$ $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -1;$

г) $\begin{cases} \dot{x} - 2x + y = 0, \\ \dot{y} + x - 2y = 5e^t\sin t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0;$

д) $\begin{cases} x' - z - y = 0, \\ y' - z - x = 0, \\ z' - x - y = 0, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

6.3.2 Решить систему дифференциальных уравнений с использованием характеристического уравнения системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -5y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_1 - 7y_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 6y_2, \end{cases}$ $y_1(0) = 5,\ y_2(0) = -29$;

г) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3$.

д) $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 3z, \\ y' = 4x + 5y - 4z, \\ z' = 6x + 4y - 4z, \end{cases}$ $x(0) = 6,\ y(0) = 7,\ z(0) = 10$.

6.3.3 Найти пару линий, обладающих следующими свойствами: а) касательные, проведённые в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси ординат; б) нормали, проведённые в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс.

6.3.4 Два цилиндра, основания которых лежат в одной плоскости, соединённые внизу капиллярной трубкой, наполнены жидкостью до разной высоты. Через трубку в единицу времени протекает объём жидкости, пропорциональный разности высот. Найти закон изменения высоты жидкости в сосудах над капиллярной трубкой, если известны поперечные сечения сосудов.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами двумя способами: а) методом исключения; б) используя характеристическое уравнение матрицы указанной системы.

6.4.1.1 $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.2 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 12y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.3 $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.4 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 12y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.5 $\begin{cases} \dot{x} = 14x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 12y. \end{cases}$

6.4.1.6 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.7 $\begin{cases} \dot{x} = 12x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 10y. \end{cases}$

6.4.1.8 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.9 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 8y. \end{cases}$

6.4.1.10 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.11 $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.12 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.13 $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

6.4.1.14 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y, \\ \dot{y} = -2x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.15 $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.16 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.17 $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$

6.4.1.18 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

6.4.1.19 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

6.4.1.20 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y, \\ \dot{y} = -3x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.21 $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.22 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.23 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.24 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.25 $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 8y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.26 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 11y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.27 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.28 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 5y. \end{cases}$

6.4.1.29 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

6.4.1.30 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Содержание: преобразование Лапласа, функция-оригинал и функция-изображение, таблица оригиналов и изображений.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим функцию $f(t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;

2) на интервале $(0;+\infty)$ функция $f(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода;

3) при значении $t \to +\infty$ абсолютная величина функции возрастает не быстрее некоторой экспоненты, то есть $\left| f(t) \right| \le M \cdot e^{\sigma t}$.

Функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, называется *функцией-оригиналом* по Лапласу.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то чисел σ существует бесконечно много, при этом нижняя грань всех чисел σ называется показателем роста функции.

$$\sigma_0 = \inf \{\sigma\} \text{ – показатель роста.}$$

Определение 7.1.1 (преобразования Лапласа). Соответствие, по которому каждой функции-оригиналу $f(t)$ сопоставляется функция $F(p)$, где $p = s + i\omega$ –комплексная переменная, определяемая по формуле

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt, \tag{7.1.1}$$

называется *преобразованием Лапласа*. Функция $F(p)$ называется *функцией-изображением* функции-оригинала $f(t)$ по Лапласу.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ интеграл (7.1.1) является сходящимся, так как этот интеграл по абсолютной величине ограничен:

$$\left| F(p) \right| \le \frac{M}{s - \sigma_0}. \tag{7.1.2}$$

Следовательно, по свойствам несобственных интегралов, интеграл (7.1.1) является сходящимся, если $\operatorname{Re} p = s > \sigma_0$, то есть действительная часть больше показателя роста. Это условие является необходимым условием того, чтобы функция комплексного переменного $p = s + i\omega$ являлась изображением. Кроме этого, при значении $p \to \infty$, изображение $F(p) \to 0$.

Обозначения:

$f(t) \risingdotseq F(p)$ (функция-оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$),

$F(p) \fallingdotseq f(t)$ (функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$).

Несобственный интеграл, определяющий преобразование Лапласа, обладает и тем свойством, что в области действительной части $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ его можно дифференцировать по переменной p. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда

$$F'_p(p) = \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^\infty \left(f(t) e^{-pt} \right)' dt = \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-pt} dt \fallingdotseq -t\, f(t)$$

В дальнейшем, говоря о функции $f(t)$, мы всегда будем подразумевать, что при значении $t<0$ значение оригинала $f(t)=0$.

Рассмотрим функцию $1(t)=\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$ которая называется единичной функцией или функцией Хэвисайда. В операционном исчислении подразумевается, что функции умножены на функцию Хэвисайда. Например, пишем $f(t)=t^n$, но подразумеваем $f(t)=\begin{cases}t^n, & t\geq 0\\ 0, & t<0.\end{cases}$

Таблица основных оригиналов и изображений

Функция-оригинал	Функция-изображение
1	2
$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$(t-a)^n$	$\dfrac{n!\cdot e^{-a\,p}}{p^{n+1}}$
$t^n\cdot e^{\lambda\cdot t}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$

1	2
$e^{\lambda \cdot t} \cdot \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda \cdot t} \cdot \cos \omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda \cdot t} \cdot \operatorname{sh} \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$e^{\lambda \cdot t} \cdot \operatorname{ch} \omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$\dfrac{1-e^{-t}}{t}$	$\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Показать, что функция $f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t$ является функцией-оригиналом.

Решение. В операционном исчислении рассматриваются функции, умноженные на единичную функцию. Поэтому заданная функция имеет вид

$$f(t)=\begin{cases} e^{\alpha t}\cos\omega t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Первое условие выполнено в силу задания функции. Функции $e^{\alpha t}$ и $\cos\omega t$ являются непрерывными функциями при $t\ge 0$, а, следовательно, на этом промежутке будет непрерывна функция $f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t$, как произведение непрерывных функций. Заданная функция не имеет точек разрыва, то есть выполняется второе условие определения функции-оригинала.

Проверим выполнение третьего условия.

$$|f(t)|=\left|e^{\alpha t}\cdot\cos\omega t\right|=\left|e^{\alpha t}\right|\cdot\left|\cos\omega t\right|\le e^{\alpha t}\cdot 1=1\cdot e^{\alpha t}.$$

Третье условие функции-оригинала выполняется: $M=1$, а показатель роста σ_0 равен α. Таким образом, заданая функция является функцией-оригиналом.

7.2.2 Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)=e^{\lambda t}$.

Решение. По определению $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t}dt=$

$=-\dfrac{1}{p-\lambda}\cdot e^{-(p-\lambda)t}\Big|_0^{+\infty}=0+\dfrac{1}{p-\lambda}=\dfrac{1}{p-\lambda}$. Таким образом, $e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda}$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Проверить по определению оригинала, какие из функций $f(t)$ являются функциями-оригиналами.

7.3.1.1 $f(t)=1(t)$.	**7.3.1.2** $f(t)=t^2$.	**7.3.1.3** $f(t)=\dfrac{1}{t-1}$.
7.3.1.4 $f(t)=\sin 3t$.	**7.3.1.5** $f(t)=\cos 4t$.	**7.3.1.6** $f(t)=\mathrm{tg}\, t$.
7.3.1.7 $f(t)=\mathrm{ch}\, 2t$.	**7.3.1.8** $f(t)=\mathrm{sh}\, 4t$	**7.3.1.9** $f(t)=\dfrac{4}{t^2-4}$

7.3.2 Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$.

7.3.2.1 $f(t)=1(t)$.	**7.3.2.2** $f(t)=t$.	**7.3.2.3** $f(t)=\sin t$.
7.3.2.4 $f(t)=\cos 2t$.	**7.3.2.5** $f(t)=\mathrm{sh}\, 3t$.	**7.3.2.6** $f(t)=\mathrm{ch}\, 4t$.
7.3.2.7 $f(t)=e^{2t}$.	**7.3.2.8** $f(t)=2+4t$.	**7.3.2.9** $f(t)=\cos^2\dfrac{t}{2}$.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Проверить по определению оригинала, какие из функций $f(t)$ являются функциями-оригиналами. Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$.

7.4.1.1 $f(t)=2t+1$.	**7.4.1.2** $f(t)=e^{3t}$.	**7.4.1.3** $f(t)=\sin 2t$.
7.4.1.4 $f(t)=\cos t$.	**7.4.1.5** $f(t)=\mathrm{sh}\, t$.	**7.4.1.6** $f(t)=\mathrm{ch}\, 2t$.
7.4.1.7 $f(t)=\sin^2 t$.	**7.4.1.8** $f(t)=\cos^2 t$.	**7.4.1.9** $f(t)=5t-2$.
7.4.1.10 $f(t)=3t+5$.	**7.4.1.11** $f(t)=e^{4t}$.	**7.4.1.12** $f(t)=\sin 4t$.
7.4.1.13 $f(t)=\cos 3t$.	**7.4.1.14** $f(t)=\mathrm{sh}\, 2t$.	**7.4.1.15** $f(t)=\mathrm{ch}\, 3t$.
7.4.1.16 $f(t)=\sin^2 2t$.	**7.4.1.17** $f(t)=\cos^2 2t$.	**7.4.1.18** $f(t)=7t-5$.
7.4.1.19 $f(t)=6t+3$.	**7.4.1.20** $f(t)=e^{7t}$.	**7.4.1.21** $f(t)=\sin 5t$.
7.4.1.22 $f(t)=\cos 4t$.	**7.4.1.23** $f(t)=\mathrm{sh}\, 4t$.	**7.4.1.24** $f(t)=\mathrm{ch}\, 4t$.

7.4.1.25 $f(t)=\sin^2 3t$. **7.4.1.26** $f(t)=\cos^2 3t$. **7.4.1.27** $f(t)=6t-3$.
7.4.1.28 $f(t)=t^2$ **7.4.1.29** $f(t)=9t-10$ **7.4.1.30** $f(t)=e^{10t-9}$

8 СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Содержание: линейность, подобие, дифференцирование оригинала и изображения, интегрирование оригинала и изображения, запаздывание оригинала, смещение изображения, свёртка оригиналов, нахождение изображения по заданному оригиналу, определение оригинала по известному изображению.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим основные свойства оригиналов и изображений.

1. Свойство **линейности**.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо утверждение:

$$\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta\Phi(t). \qquad (8.1.1)$$

2. Свойство **подобия**.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\forall \alpha > 0$ справедливо утверждение:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \qquad (8.1.2)$$

3. Свойство **дифференцирования оригинала**.

Если функция $f(t)$ и её производные до n-го порядка включительно являются оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \qquad (8.1.3)$$

Если $f(t)$ и $f'(t)$ – функции-оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то изображение первой производной функции $f(t)$ определяется по формуле

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Если $f(t)$, $f'(t)$ $f''(t)$ – функции-оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то изображение второй производной оригинала $f(t)$ определяется по формуле

$$f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Замечание. В частном случае, если $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \cdot F(p)$. Таким образом, дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на p.

4. Свойство **дифференцирования изображения**.

Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-t)^n \cdot f(t). \tag{8.1.4}$$

Таким образом, дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$.

5. Свойство **интегрирования оригинала**.

Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{8.1.5}$$

Таким образом, интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p.

6. Свойство **интегрирования изображения**.

Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(z)\, dz. \tag{8.1.6}$$

Таким образом, деление на t оригинала сводится к интегрированию изображения.

7. Свойство **запаздывания оригинала**.

Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p). \tag{8.1.7}$$

Если $f(t)$ принимать за некоторый сигнал, который включается в момент времени $t=0$, то $f(t-\tau)$ – есть сигнал, который включится в момент времени $t=\tau$.

Таким образом, запаздывание оригинала на величину τ означает умножение изображения оригинала на $e^{-p\tau}$.

8. Свойство **смещения изображения**.

Если $f(t)$ – функция-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0). \qquad (8.1.8)$$

Таким образом, умножение оригинала на $e^{p_0 t}$ осуществляет смещение изображения на величину p_0.

9. Свойство **свёртки оригиналов**.

Сверткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется функция $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)d\tau$, которая обозначается $f(t)*\varphi(t)$ или $(f*\varphi)(t)$.

Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами, то сверткой оригиналов называется определенный интеграл $(f*\varphi)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)d\tau$.

Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то свертка функций имеет изображение

$$(f*\varphi)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)\Phi(p). \qquad (8.1.9)$$

Рассмотрим методы нахождения функции-оригинала по зададанному изображению.

1. Если изображение представляет дробно-рациональное выражение, то раскладывают дробь на простейшие дроби, а затем, применяя метод неопределенных коэффициентов, находят неизвестные коэффициенты в разложении. После этого используем свойства и таблицу оригиналов и изображений.

2. Метод использования свойства свёртки функции-оригинала: $F(p)\Phi(p) \fallingdotseq (f*\varphi)(t)$.

3. Метод использования свойств дифференцирования и интегрирования.

4. Метод использования свойств смещения изображения и запаздывания оригинала.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 По заданной функции-оригиналу $f(t)=(2t^2+5)\sin 12t$ найти изображение $F(p)$.

Решение. Преобразуем заданную функцию-оригинал $f(t)=(2t^2+5)\times$ $\times\sin 12t=2t^2\sin 12t+5\sin 12t$. По таблице оригиналов и изображений находим изображение функции синуса: $5\sin 12t \risingdotseq 5\cdot\dfrac{12}{p^2+12^2}=\dfrac{60}{p^2+144}$.

По свойству дифференцирования изображения умножение на t^2 функции-оригинала сводится к двукратному дифференцированию изображения.

$$t^2\sin 12t \risingdotseq \left(\frac{12}{p^2+144}\right)''=\left(-\frac{24p}{(p^2+144)^2}\right)'=\frac{72p^2-3456}{(p^2+144)^3}.$$

Следовательно, исходная функция-оригинал имеет изображение

$$(2t^2+5)\sin 12t \risingdotseq \frac{144p^2-6912}{(p^2+144)^3}+\frac{60}{p^2+144};$$

8.2.2 По заданной функции-оригиналу $f(t)=\int\limits_0^t\dfrac{\sin\tau+\sin 2\tau}{\tau}d\tau$ найти изображение $F(p)$.

Решение. Для нахождения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала. Находим изображение числителя дроби.

$$\sin t+\sin 2t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}+\frac{2}{p^2+4}.$$

Тогда изображение подынтегральной функции имеет вид:

$$\frac{\sin t+\sin 2t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty\left(\frac{1}{z^2+1}+\frac{2}{z^2+4}\right)dz=\lim_{b\to\infty}\int\limits_p^b\left(\frac{1}{z^2+1}+\frac{2}{z^2+4}\right)dz=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}z+\operatorname{arctg}\frac{z}{2}\right)\Bigg|_p^b=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b+\operatorname{arctg}\frac{b}{2}-\operatorname{arctg}p-\operatorname{arctg}\frac{p}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p-\operatorname{arctg}\frac{p}{2}=\operatorname{arcctg} p+\operatorname{arcctg}\frac{p}{2}.$$

Находим изображение исходной функции

$$\int_0^t \frac{\sin\tau+\sin 2\tau}{\tau}d\tau \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p+\operatorname{arcctg}\frac{p}{2}}{p}.$$

8.2.3 По заданной функции-оригиналу $f(t)=e^{6t}(t^2+3\cos t)$ найти изображение $F(p)$.

Решение. Для определения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством смещения изображения. По таблице оригиналов и изображений: $t^2+3\cos t \risingdotseq \frac{2}{p^3}+\frac{3p}{p^2+1}$. Тогда исходная функция-оригинал имеет изображение $e^{6t}(t^2+3\cos t) \risingdotseq \frac{2}{(p-6)^3}+\frac{3(p-6)}{(p-6)^2+1}$.

8.2.4 По заданному графику функции-оригинала $f(t)$ найти функцию-изображение $F(p)$.

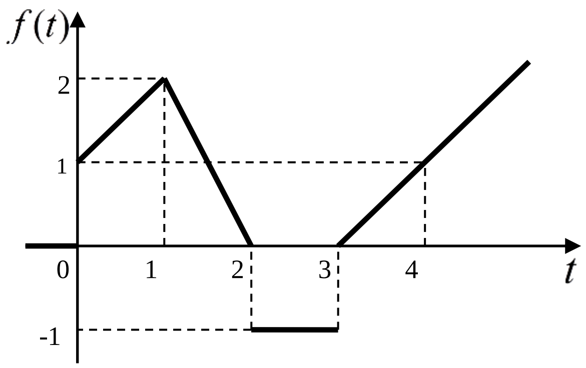


Рисунок 8.2.4 – График оригинала

Решение. Запишем функцию, заданную графическим образом, в аналитическом виде. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(t_1; f(t_1))$ и $M_2(t_2; f(t_2))$: $\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}$.

Если $t<0$, то $f(t)=0$. Если $0\le t<1$, то $\dfrac{t-0}{1-0}=\dfrac{f(t)-1}{2-1}$ или $f(t)=t+1$. Если $1\le t<2$, то $\dfrac{t-1}{2-1}=\dfrac{f(t)-2}{0-2}$ или $f(t)=-2t+4$. Если $2\le t<3$, то очевидно, что $f(t)=-1$. Если $t\ge 3$, то $\dfrac{t-3}{4-3}=\dfrac{f(t)-0}{1-0}$ или $f(t)=t-3$.

Таким образом, исходная функция может быть записана в виде системы

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<0; \\ t+1, \text{ при } 0\le t<1; \\ 4-2t, \text{ при } 1\le t<2; \\ -1, \text{ при } 2\le t<3; \\ t-3, \text{ при } t\ge 3. \end{cases}$$

С помощью единичной функции $1(t)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<0; \\ 1, \text{ при } t\ge 0, \end{cases}$ запишем исходную функцию $f(t)$ одним аналитическим выражением, то есть представим ее в виде функции-оригинала. При этом будем учитывать, что единичная функция, запаздывающая на время τ, имеет вид:

$$1(t-\tau)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<\tau; \\ 1, \text{ при } t\ge\tau. \end{cases}$$

Функция $f(t)=0$, при значении времени $t<0$. В момент времени $t=0$ она «выключается» и «включается» функция $f(t)=t+1$. Далее в момент времени $t=1$ функция $f(t)=t+1$ «выключается» и «включается» функция $f(t)=4-2t$, которая в свою очередь «выключается» в момент времени $t=2$. В этот же момент включается функция $f(t)=-1$, которая «выключается» при $t=3$. И, наконец, в момент времени $t=3$ «включается» функция $f(t)=t-3$, которая и действует в дальнейшем. Поэтому функция-оригинал может быть записана в виде

$$f(t)=(t+1)1(t)-(t+1)1(t-1)+(4-2t)1(t-1)-(4-2t)1(t-2)-1(t-2)+1(t-3)+$$
$$+(t-3)1(t-3)=(t+1)1(t)-3(t-1)1(t-1)+(2t-5)1(t-2)+(t-2)1(t-3).$$

Для того чтобы найти изображение полученной функции, необходимо представить ее в виде

$$f(t)=f_1(t)1(t)+f_2(t-1)1(t-1)+f_3(t-2)1(t-2)+f_4(t-3)1(t-3).$$

Следовательно, исходную функцию-оригинал запишем в виде

$$f(t)=(t+1)1(t)-3(t-1)1(t-1)+(2(t-2)-1)1(t-2)+((t-3)+1)1(t-3).$$

По свойствам преобразования Лапласа и таблице оригиналов и их изображений находим изображения полученных оригиналов:

$$f_1(t)=t+1 \risingdotseq \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}, \qquad f_2(t)=-3t \risingdotseq -\frac{3}{p^2},$$

$$f_3(t)=2t-1 \risingdotseq \frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}, \qquad f_4(t)=t+1 \risingdotseq \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

По свойству запаздывания оригинала включение оригинала с запаздыванием на величину τ соответствует умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$. Следовательно, исходная функция-оригинал будет иметь изображение

$$f(t) \risingdotseq F(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{3}{p^2}\cdot e^{-p}+\left(\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-2p}+\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-3p}.$$

8.2.5 По заданному изображению $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+16)}$ найти функцию-оригинал $f(t)$.

Решение. Для восстановления оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала. По таблице оригиналов и изображений определяем оригинал для изображения $\dfrac{1}{p^2+16} \fallingdotseq \dfrac{1}{4}\sin 4t$. Восстанавливаем оригинал для исходного изображения.

$$\frac{1}{p(p^2+16)} \fallingdotseq \frac{1}{4}\int_0^t \sin 4\tau\, d\tau=-\frac{1}{16}\cos 4\tau\Big|_0^t=-\frac{1}{16}\cos 4t+\frac{1}{16}\cos 0=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos 4t.$$

8.2.6 По заданному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+9p+5}{p^3+p^2-2}$ найти функцию-оригинал $f(t)$.

Решение. Дробь является правильной. Разложим ее на простейшие дроби, для чего необходимо разложить знаменатель на простейшие множители. Подбором находим один из корней многочлена $P_3(p)=p^3+p^2-2$. Корнем этого многочлена является число $p=1$, так как $P_3(1)=0$. Разделим многочлен на $p-1$.

$$\begin{array}{r|l} -\, p^3+p^2+0\cdot p-2 & p-1 \\ \underline{p^3-p^2\qquad\qquad} & \overline{p^2+2p+2} \\ -\,2p^2+0\cdot p\quad & \\ \underline{2p^2-2\cdot p\quad} & \\ -\,2\cdot p-2 & \\ \underline{2\cdot p-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Квадратный трехчлен p^2+2p+2 не раскладывается на множители, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицателен.

Следовательно, $p^3+p^2-2=(p-1)\cdot(p^2+2p+2)$. Раскладываем исходную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{p^2+9p+5}{p^3+p^2-2}=\frac{p^2+9p+5}{(p-1)\cdot(p^2+2p+2)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+2}=$$

$$=\frac{A\cdot(p^2+2p+2)+(Bp+C)\cdot(p-1)}{(p-1)\cdot(p^2+2p+2)}=\frac{(A+B)p^2+(2A-B+C)p+2A-C}{(p-1)\cdot(p^2+2p+2)}.$$

Дроби равны, знаменатели равны, следовательно, равны и числители.

$$(A+B)p^2+(2A-B+C)p+2A-C=p^2+9p+5$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, находим коэффициенты A, B и C.

$$\begin{cases} A+B=1; \\ 2A-B+C=9; \\ 2A-C=5; \end{cases} \qquad \begin{cases} B=1-A; \\ 2A-1+A+2A-5=9; \\ C=2A-5; \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-2; \\ A=3; \\ C=1. \end{cases}$$

Таким образом, исходная дробь представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{p^2+9p+5}{p^3+p^2-2}=\frac{3}{p-1}+\frac{-2p+1}{p^2+2p+2}.$$

Найдем изображения для каждой функции-оригинала в полученном разложении. По таблице оригиналов и изображений: $\frac{3}{p-1} \risingdotseq 3\cdot e^t$.

Определим изображение второго слагаемого, для чего в знаменателе выделим полный квадрат, а в числителе выражение, возводимое в квадрат в знаменателе. Затем представим дробь в виде суммы двух дробей.

$$\frac{-2p+1}{p^2+2p+2}=\frac{-2(p+1)+3}{(p+1)^2+1}=-2\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+3\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Для определения функции-оригинала для заданного изображения воспользуемся свойством смещения изображения. По таблице оригиналов и изображений: $\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t$, $\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t$.

Следовательно, по свойству смещения изображения имеем

$$\frac{-2p+1}{p^2+2p+2}=-2\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+3\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1} \risingdotseq -2\cdot e^{-t}\cos\ t+3\cdot e^{-t}\sin\ t.$$

Таким образом, функция-оригинал для заданного изображения имеет вид

$$\frac{p^2+9p+5}{p^3+p^2-2} \risingdotseq 3\cdot e^t-2\cdot e^{-t}\cos t+3\cdot e^{-t}\sin t.$$

8.2.7 По заданному изображению $F(p)=\frac{pe^{-25p}}{p^2+25}$ найти функцию-оригинал $f(t)$.

Решение. Для определения функции-оригинала заданного изображения воспользуемся свойством запаздывания оригинала.

Так как $\frac{p}{p^2+25} \risingdotseq \cos 5t$, то

$$\frac{pe^{-25p}}{p^2+25} \risingdotseq \cos 5(t-25)\cdot 1(t-25).$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 По заданной функции-оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

8.3.1.1 $f(t)=(3t-4)\cos 2t$.

8.3.1.2 $f(t)=(2t^2+5)\sin 3t$.

8.3.1.3 $f(t)=(5t+3)\,\mathrm{sh}\,4t$.

8.3.1.4 $f(t)=(t^2-1)\,\mathrm{ch}\,2t$.

8.3.1.5 $f(t)=(3t+2)e^{6t}$.

8.3.1.6 $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin 2\tau-\sin 4\tau}{\tau}d\tau$.

8.3.1.7 $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\cos 5\tau+\cos\tau}{\tau}d\tau$.

8.3.1.8 $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 4\tau\, d\tau$.

8.3.1.9 $f(t)=e^{2t}\cos 3t$.

8.3.1.10 $f(t)=e^{-4t}\sin 5t$.

8.3.1.11 $f(t)=e^{-4t}\,\mathrm{ch}\,5t$.

8.3.1.12 $f(t)=e^{-7t}\,\mathrm{sh}\,3t$.

8.3.1.13 $f(t)=(t-3)^5 1(t-3)$.

8.3.1.14 $f(t)=\mathrm{sh}(2t-4)1(t-2)$.

8.3.1.15 $f(t)=e^{4t-8}1(t-2)$.

8.3.1.16 $f(t)=2\sin(3t+9)1(t+3)$.

8.3.1.17 $f(t)=5\cos(4t+8)1(t+2)$.

8.3.1.18 $f(t)=1+\sin(5t+10)1(t+2)$.

8.3.1.19 $f(t)=\mathrm{ch}\,3t+t\,\mathrm{sh}\,3t+2$.

8.3.1.20 $f(t)=\sin 5t-t\cos 5t-5$.

8.3.2 По заданному графику функции-оригинала $f(t)$ найти функцию-изображение $F(p)$.

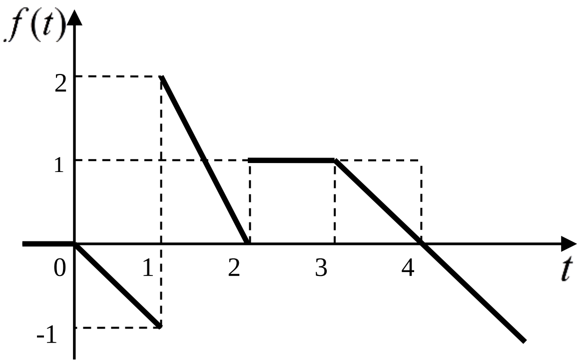


Рисунок 8.3.2 – График оригинала 2

8.3.3 По заданному графику функции-оригинала $f(t)$ найти функцию-изображение $F(p)$.

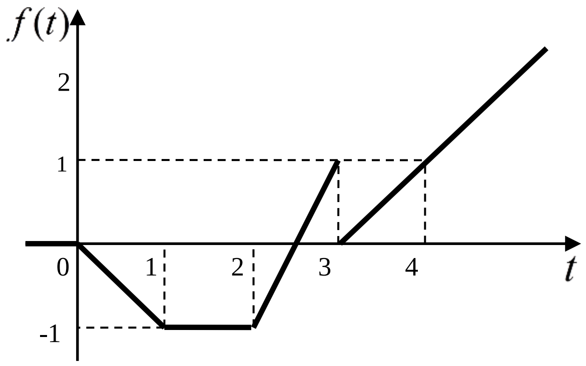


Рисунок 8.3.3 – График оригинала 3

8.3.4 По заданной функции-изображению $F(p)$ востановить функцию-оригинал $f(t)$

8.3.1.1 $F(p)=\dfrac{p}{p^2-9p+20}$.

8.3.1.2 $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+6p-7}$.

8.3.1.3 $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-2p+5}$.

8.3.1.4 $F(p)=\dfrac{p-3}{p(p^2+16)}$.

8.3.1.5 $F(p)=\dfrac{2}{p^3-p^2}$.

8.3.1.6 $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

8.3.1.7 $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2-25)(p^2-36)}$.

8.3.1.8 $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+4)^2}$.

8.3.1.9 $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)^2}$.

8.3.1.10 $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)^2}$.

8.3.1.11 $F(p)=\dfrac{4}{p^2(p^2+16)}$.

8.3.1.12 $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2-9)}$.

8.3.1.13 $F(p)=\dfrac{p+7}{p(p^2-9)}$.

8.3.1.14 $F(p)=\dfrac{p-32}{p^2+6p+25}$.

8.3.1.15 $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-6p+8}$.

8.3.1.16 $F(p)=\dfrac{p-4}{p^2+8p+16}$.

8.3.1.17 $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+25)(p^2+36)}$.

8.3.1.18 $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

8.3.1.19 $F(p)=\dfrac{p}{(p+2)(p+6)^2}$.

8.3.1.20 $F(p)=\dfrac{p-1}{(p-2)^2(p+3)}$.

8.3.1.21 $F(p)=\dfrac{e^{2p}}{p(p^2+1)}$.

8.3.1.22 $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+4)}$.

8.3.1.23 $F(p)=\dfrac{e^{4p}}{p(p^2-9)}$.

8.3.1.24 $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2-25)}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Найти функцию-оригинал по заданному изображению

8.4.1.1 а) $\dfrac{1}{(p^2-1)^2}$; б) $\dfrac{p-1}{p^2(p^2+1)}$; в) $\dfrac{e^{-p}}{(p-1)\cdot(p^2+2p+2)}$.

8.4.1.2 а) $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; б) $\dfrac{p+2}{p^2(p^2-1)}$; в) $\dfrac{e^{2p}}{(p+2)\cdot(p^2-2p+2)}$.

8.4.1.3 а) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$; б) $\dfrac{p-3}{p^2(p^2+4)}$; в) $\dfrac{e^{-3p}}{(p-3)\cdot(p^2+4p+5)}$.

8.4.1.4 а) $\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$; б) $\dfrac{p+4}{p^2(p^2-4)}$; в) $\dfrac{e^{4p}}{(p+4)\cdot(p^2-4p+5)}$.

8.4.1.5 а) $\dfrac{1}{(p^2-9)^2}$; б) $\dfrac{p-5}{p^2(p^2+9)}$; в) $\dfrac{e^{-5p}}{(p-5)\cdot(p^2+2p+10)}$.

8.4.1.6 а) $\dfrac{p}{(p^2+9)^2}$; б) $\dfrac{p+6}{p^2(p^2-9)}$; в) $\dfrac{e^{6p}}{(p+6)\cdot(p^2-2p+10)}$.

8.4.1.7 а) $\dfrac{9}{(p^2-25)^2}$; б) $\dfrac{p-7}{p^2(p^2+25)}$; в) $\dfrac{e^{-7p}}{(p-7)\cdot(p^2+4p+13)}$.

8.4.1.8 а) $\dfrac{9p}{(p^2+25)^2}$; б) $\dfrac{p+8}{p^2(p^2-25)}$; в) $\dfrac{e^{8p}}{(p+8)\cdot(p^2-4p+13)}$.

8.4.1.9 а) $\dfrac{16}{(p^2-36)^2}$; б) $\dfrac{p-9}{p^2(p^2+36)}$; в) $\dfrac{e^{-9p}}{(p-9)\cdot(p^2+6p+13)}$.

8.4.1.10 а) $\dfrac{10p}{(p^2+36)^2}$; б) $\dfrac{p+10}{p^2(p^2-36)}$; в) $\dfrac{e^{10p}}{(p+10)\cdot(p^2-6p+13)}$.

8.4.1.11 а) $\dfrac{4}{(p^2-49)^2}$; б) $\dfrac{p-11}{p^2(p^2+49)}$; в) $\dfrac{e^{-11p}}{(p-11)\cdot(p^2+8p+25)}$.

8.4.1.12 а) $\dfrac{12p}{(p^2+49)^2}$; б) $\dfrac{p+12}{p^2(p^2-49)}$; в) $\dfrac{e^{12p}}{(p+12)\cdot(p^2-8p+25)}$.

8.4.1.13 а) $\dfrac{13}{(p^2-64)^2}$; б) $\dfrac{p-13}{p^2(p^2+64)}$; в) $\dfrac{e^{-13p}}{(p-13)\cdot(p^2+8p+20)}$.

8.4.1.14 а) $\dfrac{p}{(p^2+64)^2}$; б) $\dfrac{p+14}{p^2(p^2-64)}$; в) $\dfrac{e^{14p}}{(p+14)\cdot(p^2-8p+20)}$.

8.4.1.15 а) $\dfrac{15}{(p^2-100)^2}$; б) $\dfrac{p-15}{p^2(p^2+100)}$; в) $\dfrac{e^{-15p}}{(p-15)\cdot(p^2+10p+74)}$.

8.4.1.16 а) $\dfrac{16p}{(p^2+100)^2}$; б) $\dfrac{p+16}{p^2(p^2-100)}$; в) $\dfrac{e^{16p}}{(p+16)\cdot(p^2-10p+74)}$.

8.4.1.17 а) $\dfrac{17}{(p^2-121)^2}$; б) $\dfrac{p-17}{p^2(p^2+121)}$; в) $\dfrac{e^{-19p}}{(p-10)\cdot(p^2+12p+40)}$.

8.4.1.18 а) $\dfrac{18p}{(p^2+121)^2}$; б) $\dfrac{p+18}{p^2(p^2-121)}$; в) $\dfrac{e^{18p}}{(p+18)\cdot(p^2-12p+40)}$.

8.4.1.19 а) $\dfrac{19}{(p^2-144)^2}$; б) $\dfrac{p-19}{p^2(p^2+144)}$; в) $\dfrac{e^{-19p}}{(p-19)\cdot(p^2+4p+29)}$.

8.4.1.20 а) $\dfrac{20p}{(p^2+144)^2}$; б) $\dfrac{p+20}{p^2(p^2-144)}$; в) $\dfrac{e^{20p}}{(p+20)\cdot(p^2-4p+29)}$.

8.4.1.21 а) $\dfrac{21}{(p^2-169)^2}$; б) $\dfrac{p-21}{p^2(p^2+169)}$; в) $\dfrac{e^{-21p}}{(p-21)\cdot(p^2+12p+40)}$.

8.4.1.22 а) $\dfrac{22p}{(p^2+169)^2}$; б) $\dfrac{p+22}{p^2(p^2-169)}$; в) $\dfrac{e^{22p}}{(p+22)\cdot(p^2-12p+40)}$.

8.4.1.23 а) $\dfrac{23}{(p^2-196)^2}$; б) $\dfrac{p-23}{p^2(p^2+196)}$; в) $\dfrac{e^{-23p}}{(p-23)\cdot(p^2+14p+53)}$.

8.4.1.24 а) $\dfrac{24p}{(p^2+196)^2}$; б) $\dfrac{p+24}{p^2(p^2-196)}$; в) $\dfrac{e^{24p}}{(p+24)\cdot(p^2-14p+53)}$.

8.4.1.25 а) $\dfrac{25}{(p^2-225)^2}$; б) $\dfrac{p-25}{p^2(p^2+225)}$; в) $\dfrac{e^{-25p}}{(p-25)\cdot(p^2+2p+65)}$.

8.4.1.26 а) $\dfrac{26p}{(p^2+225)^2}$; б) $\dfrac{p+26}{p^2(p^2-225)}$; в) $\dfrac{e^{26p}}{(p+26)\cdot(p^2-2p+65)}$.

8.4.1.27 а) $\dfrac{27}{(p^2-256)^2}$; б) $\dfrac{p-27}{p^2(p^2+256)}$; в) $\dfrac{e^{-27p}}{(p-27)\cdot(p^2+4p+85)}$.

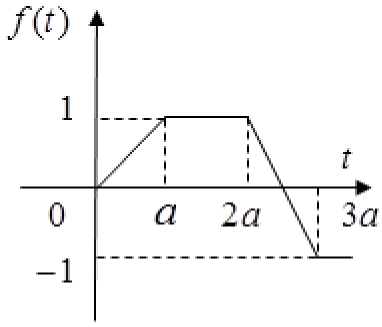
8.4.1.28 а) $\dfrac{28p}{(p^2+256)^2}$; б) $\dfrac{p+28}{p^2(p^2-256)}$; в) $\dfrac{e^{28p}}{(p+28)\cdot(p^2-4p+85)}$.

8.4.1.29 а) $\dfrac{29}{(p^2-289)^2}$; б) $\dfrac{p-29}{p^2(p^2+289)}$; в) $\dfrac{e^{-29p}}{(p-29)\cdot(p^2+2p+229)}$.

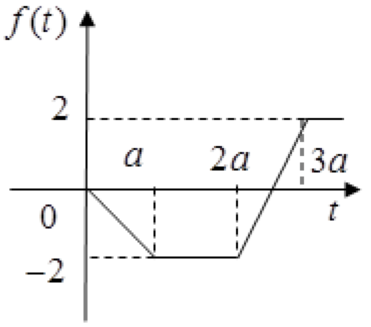
8.4.1.30 а) $\dfrac{30p}{(p^2+289)^2}$; б) $\dfrac{p+30}{p^2(p^2-289)}$; в) $\dfrac{e^{30p}}{(p+30)\cdot(p^2-2p+229)}$.

8.4.2 По заданному графику функции-оригинала найти изображение функции.

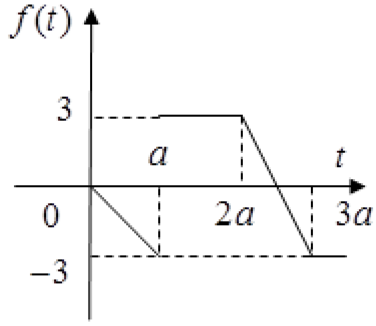
8.4.2.1



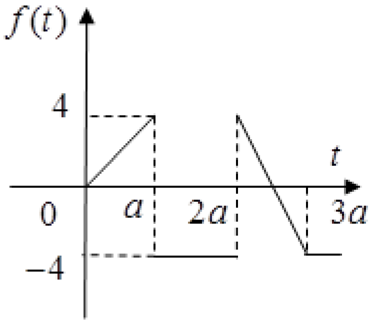
8.4.2.2



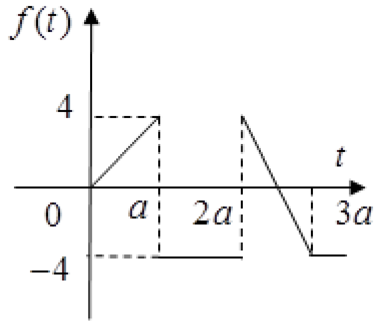
8.4.2.3



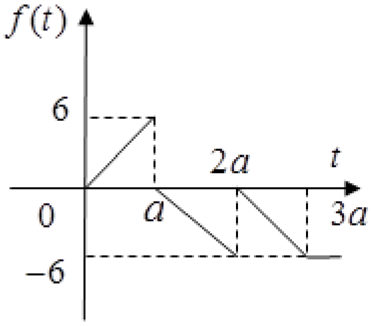
8.4.2.4



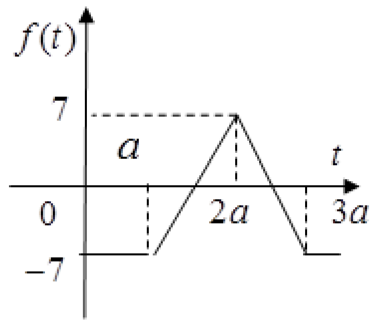
8.4.2.5



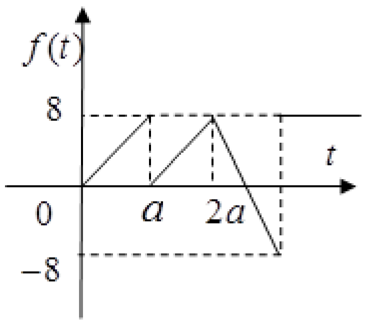
8.4.2.6



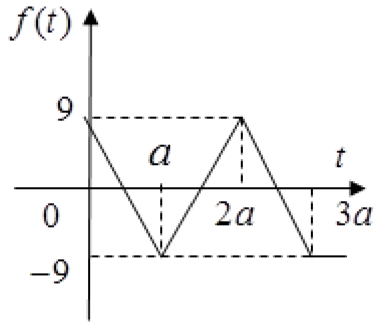
8.4.2.7



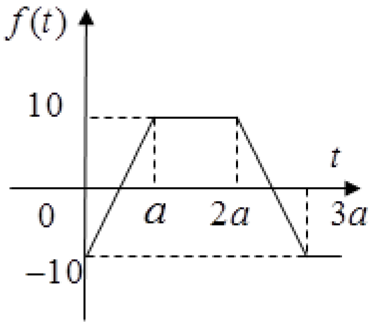
8.4.2.8



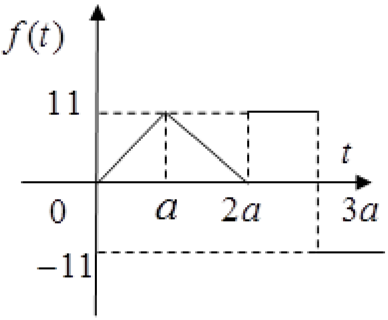
8.4.2.9



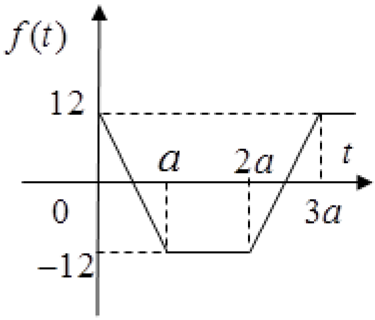
8.4.2.10



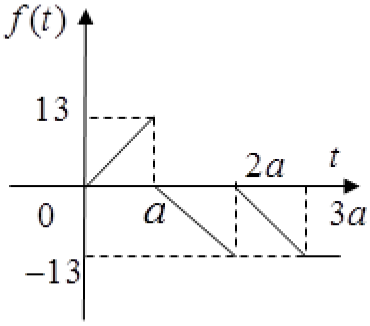
8.4.2.11



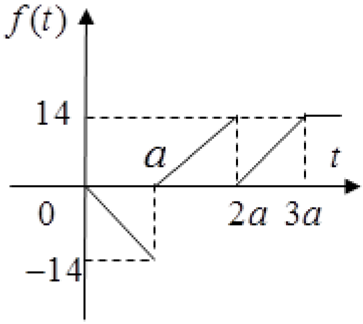
8.4.2.12



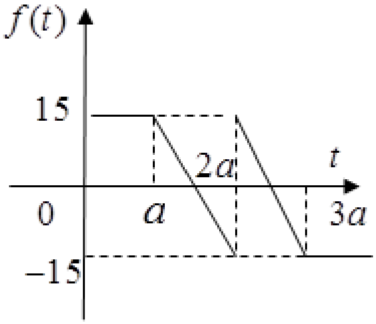
8.4.2.13



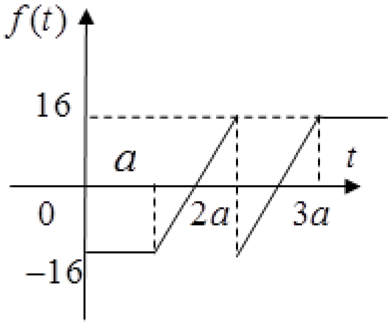
8.4.2.14



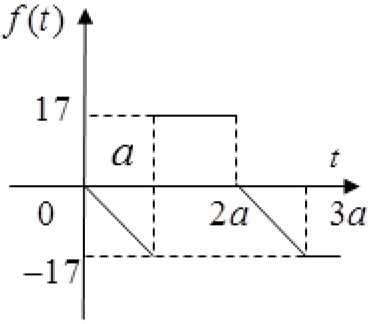
8.4.2.15



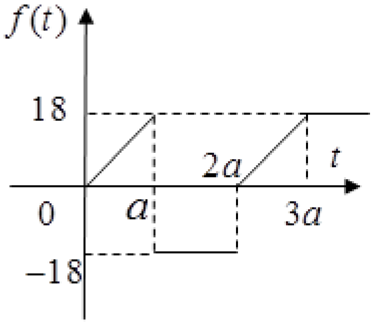
8.4.2.16



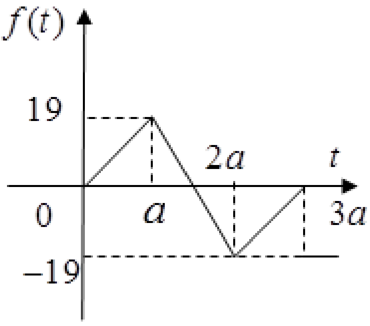
8.4.2.17



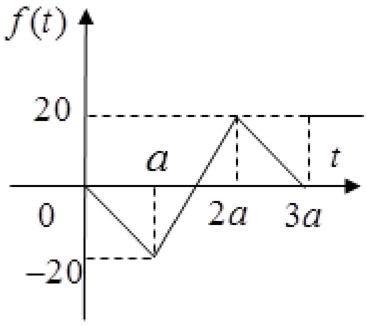
8.4.2.18



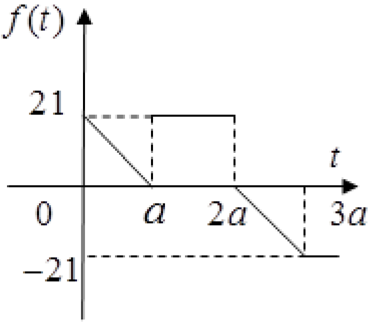
8.4.2.19



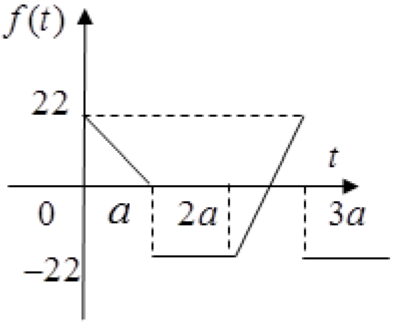
8.4.2.20



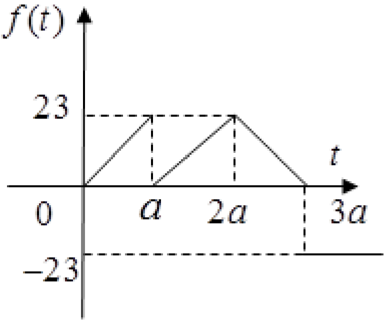
8.4.2.21



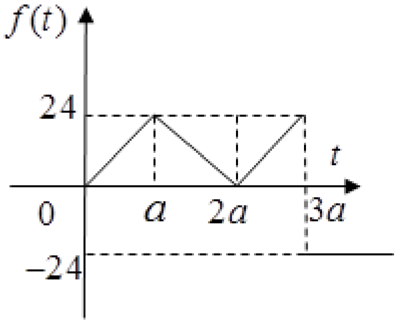
8.4.2.22



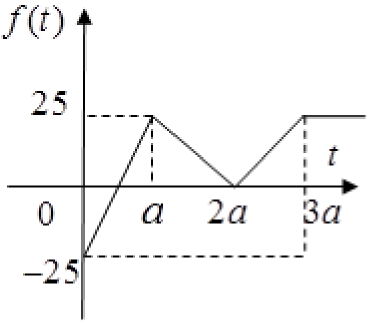
8.4.2.23



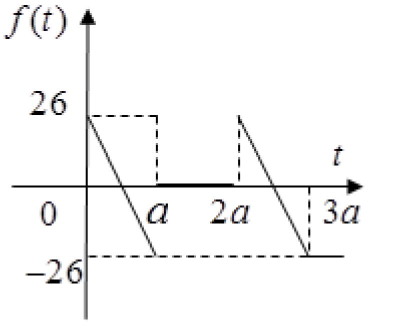
8.4.2.24



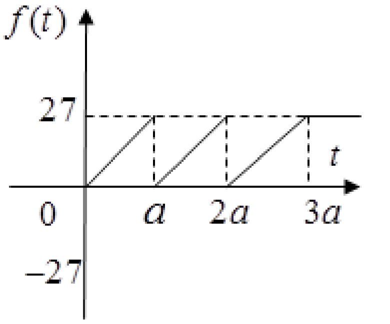
8.4.2.25



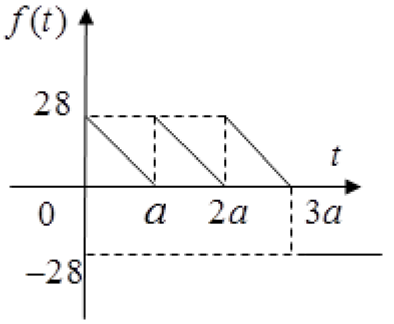
8.4.2.26



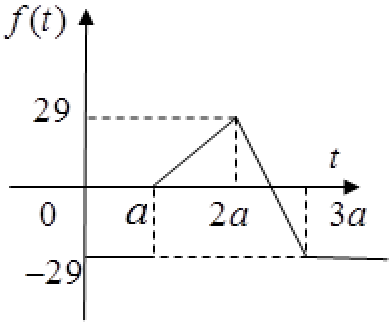
8.4.2.27



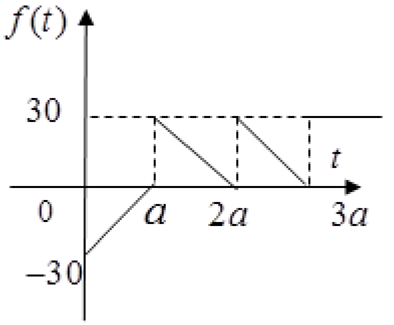
8.4.2.28



8.4.2.29



8.4.2.30



9 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Содержание: решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционными методами.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: $a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t)$. Требуется найти решение заданного уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ y''(0) = y_0'', \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – некоторые заданные числа.

Рассмотрим **алгоритм решения дифференциального уравнения с помощью преобразования Лапласа.**

1. Переходим от данного уравнения с помощью теоремы о дифференцировании оригинала $y(t)$, используя начальные условия, к операторному уравнению. То есть к уравнению относительно изображения $Y(p)$заданного оригинала, учитывая, что $f(t)$ имеет изображение $F(p)$. Получаем уравнение вида

$$Q_n(p)Y(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots a_n$ – характеристический многочлен, $P_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $(n-1)$.

2. Находим изображение оригинала

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

3. С помощью таблицы оригиналов и изображений, а также применяя свойства преобразования Лапласа, по заданному изображению находим оригинал, который будет представлять частное решение заданного дифференциального уравнения.

4. Схема решения системы дифференциальных уравнений аналогична указанной выше схеме решения дифференциального уравнения.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Методом операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения $x''+16x=4\sin 4t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.

Решение. Перейдем от дифференциального уравнения второго порядка к операторному уравнению. Пусть $x(t) \; _{\bullet}\!\!=^{\bullet} X(p)$. По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$x''(t) \; _{\bullet}\!\!=^{\bullet} p^2\cdot X(p) - p\cdot x(0) - x'(0) = p^2\cdot X(p) + p.$$

Кроме этого, по таблице оригиналов и изображений правая часть дифференциального уравнения имеет изображение

$$4\sin 4t \; _{\bullet}\!\!=^{\bullet} \frac{16}{p^2+16}.$$

Переходим от исходного дифференциального уравнения к уравнению в изображениях $p^2\cdot X(p) + p + 16\cdot X(p) = \dfrac{16}{p^2+16}$.

Тогда получаем операторное уравнение $(p^2+16)\cdot X(p) = \dfrac{16}{p^2+16} - p$ или $X(p) = \dfrac{16}{(p^2+16)^2} - \dfrac{p}{p^2+16}$.

Правую часть последнего равенства приводить к общему знаменателю не имеет смысла, так как оригинал для второго слагаемого известен $\left(\dfrac{p}{p^2+16} \; ^{\bullet}\!\!=_{\bullet} \cos 4t\right)$, а оригинал для выражения $\dfrac{16}{(p^2+16)^2}$ удобнее найти по свойству изображения свертки оригиналов.

Известно, что $\dfrac{4}{p^2+16} \; ^{\bullet}\!\!=_{\bullet} \sin 4t$, поэтому

$$\frac{16}{(p^2+16)^2} = \frac{4}{p^2+16}\cdot\frac{4}{p^2+16} \; ^{\bullet}\!\!=_{\bullet} \int_0^t \sin 4\tau\cdot\sin 4(t-\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \big(\cos(8\tau-4t) - \cos 4t\big)d\tau = \left[\frac{1}{16}\sin(8\tau-4t) - \frac{1}{2}\tau\cdot\cos 4t\right]\Bigg|_0^t =$$

$$=\frac{1}{16}\sin 4t - \frac{1}{2}t\cdot\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 4t = \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{2}t\cdot\cos 4t.$$

Таким образом,

$$X(p) \risingdotseq x(t)=\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{1}{2}t\cdot\cos 4t-\cos 4t=\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{t+2}{2}\cos 4t .$$

Решением заданного дифференциального уравнения является функция $x(t)=\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{t+2}{2}\cos 4t$.

9.2.2 Методами операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$$\begin{cases}\dot{x}+3x-4y=9e^{2t};\\ \dot{y}+2x-3y=3e^{2t},\end{cases}\quad x(0)=2,\; y(0)=0 .$$

Решение. Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. В силу начальных условий и свойств дифференцирования оригинала $\dot{y}(t) \fallingdotseq pY(p)$, $\dot{x}(t) \fallingdotseq pX(p)-2$. По таблице оригиналов и изображений $e^{2t} \fallingdotseq \frac{1}{p-2}$. Система дифференциальных уравнений в операторной форме имеет вид:

$$\begin{cases}pX(p)-2+3X(p)-4Y(p)=\dfrac{9}{p-2};\\ pY(p)+2X(p)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2},\end{cases}\text{или}\begin{cases}(p+3)X(p)-4Y(p)=\dfrac{2p+5}{p-2};\\ 2X(p)+(p-3)Y(p)=\dfrac{3}{p-2}.\end{cases}$$

Для нахождения изображений $X(p)$ и $Y(p)$ воспользуемся формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}p+3 & -4\\ 2 & p-3\end{vmatrix}=p^2-1,\quad \Delta_X=\begin{vmatrix}\dfrac{2p+5}{p-2} & -4\\ \dfrac{3}{p-2} & p-3\end{vmatrix}=\frac{2p^2-p-3}{p-2},$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix}p+3 & \dfrac{2p+5}{p-2}\\ 2 & \dfrac{3}{p-2}\end{vmatrix}=-\frac{p+1}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{2p^2-p-3}{(p-2)\,(p^2-1)}=\frac{(2p-3)\,(p+1)}{(p-2)\,(p-1)\,(p+1)}=\frac{2p-3}{(p-2)\,(p-1)},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=-\frac{p+1}{(p-2)\,(p^2-1)}=-\frac{p+1}{(p-2)\,(p-1)\,(p+1)}=-\frac{1}{(p-2)\,(p-1)}.$$

Восстановим оригиналы по заданным изображениям, используя таблицу оригиналов и изображений.

$$X(p)=\frac{2p-3}{(p-2)\,(p-1)}=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-2}\risingdotseq x(t)=e^t+e^{2t},$$

$$Y(p)=-\frac{1}{(p-2)\,(p-1)}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-2}\risingdotseq y(t)=e^t-e^{2t}.$$

Таким образом, решением заданной системы дифференциальных уравнений являются функции $x(t)=e^t+e^{2t}$ и $y(t)=e^t-e^{2t}$.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''+4y'=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

9.3.2 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=te^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

9.3.3 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+2y'+2y=2+2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

9.3.4 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+y'=t^2+2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-2$, $y'(0)=1$.

9.3.5 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-7y'+6y=\sin t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

9.3.6 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=\cos t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

9.3.7 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''+2y''+y'=-2e^{-2t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$.

9.3.8 Операторными методами найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' - y = 0, \\ y' - x = t \end{cases}$ при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

9.3.9 Операторными методами найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y \end{cases}$ при заданных начальных условиях $x(0) = -1$, $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$.

9.3.10 Операторными методами найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases}$ при заданных начальных условиях $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

9.3.11 Операторными методами найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}$ при заданных начальных условиях 0 $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

9.3.12 Операторными методами найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'' - 3x - 4y = -3, \\ y'' + x + y = -5 \end{cases}$ при заданных начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

9.3.13 Ветвь, имеющая сопротивление R_3 (рисунок 9.3.13), подключена к электрической цепи. Используя правила Киргофа, составить систему дифференциальных уравнений и найти операторным методом силы переходных токов i_1, i_2 и i_3, если известно, что $U = 30$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $L = 2$ Гн.

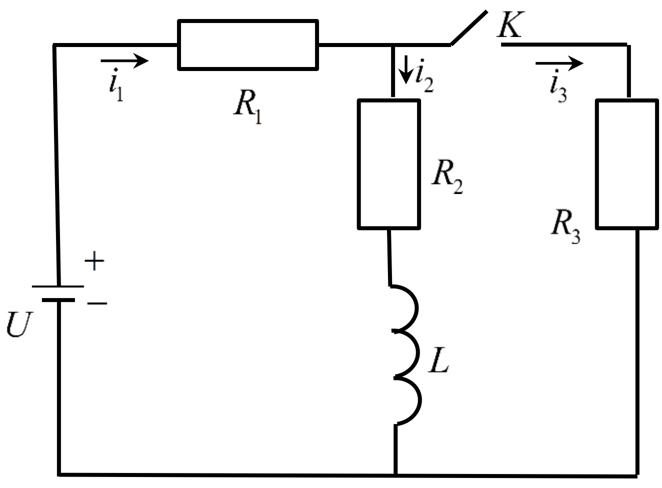


Рисунок 9.3.13 – Электрическая цепь

Замечание. При решении задачи необходимо использовать правила Киргофа. **Первое правило Киргофа**: алгебраическая сумма токов, сходящихся в точке, равна нулю. **Второе правило Киргофа**: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвлённой цепи проводников, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом же контуре.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Методами операционного исчисления решить задачу Коши для заданного дифференциального уравнения.

9.4.1.1 $x'' + x' - 2x = 2\sin t - 3\cos t,$
$x(0) = 2,\ x'(0) = 1.$

9.4.1.2 $x'' + x = \mathrm{sh}2t,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

9.4.1.3 $x'' + 4x' + 5x = \mathrm{ch}2t,$
$x(0) = 2,\ x'(0) = 3.$

9.4.1.4 $x'' - x' - 2x = 3\sin 2t - 2\cos 2t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 2.$

9.4.1.5 $x'' - 5x' + 6x = 2\sin 3t + \cos 3t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 4.$

9.4.1.6 $x'' + 4x = \mathrm{ch}2t,$
$x(0) = 4,\ x'(0) = 3.$

9.4.1.7 $x'' - 4x' + 5x = \mathrm{ch}3t,$
$x(0) = 4,\ x'(0) = 5.$

9.4.1.8 $x'' + 5x' + 6x = \sin 4t - \cos 4t,$
$x(0) = 5,\ x'(0) = 4.$

9.4.1.9 $x'' + 4x' - 5x = 2\sin 5t - \cos 5t,$
$x(0) = 5,\ x'(0) = 6.$

9.4.1.10 $x'' + 9x = \mathrm{sh}4t,$
$x(0) = 6,\ x'(0) = 5.$

9.4.1.11 $x'' + 2x' + 2x = \mathrm{ch}4t,$
$x(0) = 6,\ x'(0) = 7.$

9.4.1.12 $x'' - 6x' + 8x = 6\sin 6t - 6\cos 6t,$
$x(0) = 7,\ x'(0) = 6.$

9.4.1.13 $x'' + 6x' + 8x = \sin 7t + 7\cos 7t,$
$x(0) = 7,\ x'(0) = 8.$

9.4.1.14 $x'' + 16x = \mathrm{ch}5t,$
$x(0) = 8,\ x'(0) = 7.$

9.4.1.15 $x'' - 2x' + 2x = \mathrm{ch}5t,$
$x(0) = 8,\ x'(0) = 9.$

9.4.1.16 $x'' + 7x' - 8x = 2\sin 8t - \cos 8t,$
$x(0) = 9,\ x'(0) = 8.$

9.4.1.17 $x'' - 6x' + 5x = \sin 9t + 4\cos 9t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 1.$

9.4.1.18 $x'' + 25x = \mathrm{sh}6t,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 3.$

9.4.1.19 $x'' + 6x' + 13x = \mathrm{ch}6t,$
$x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$

9.4.1.20 $x'' + 6x' + 5x = -5\sin 2t + 3\cos 2t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 4.$

9.4.1.21 $x'' - 8x' + 7x = \sin 5t + 3\cos 5t,$
$x(0) = 4,\ x'(0) = 5.$

9.4.1.22 $x'' + 36x = 3\mathrm{ch}7t,$
$x(0) = 2,\ x'(0) = 7.$

9.4.1.23 $x'' - 6x' + 13x = \mathrm{ch}7t,$
$x(0) = 2,\ x'(0) = 4.$

9.4.1.24 $x'' + 8x' + 7x = 6\sin 5t - 6\cos 5t,$
$x(0) = 5,\ x'(0) = 5.$

9.4.1.25 $x'' - 8x' + 15x = 2\sin t - 3\cos t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 5.$

9.4.1.26 $x'' + 49x = \operatorname{sh} 8t,$
$x(0) = 7,\ x'(0) = -7.$

9.4.1.27 $x'' + 2x' + 17x = \operatorname{ch} 8t,$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

9.4.1.28 $x'' + 8x' + 15x = \sin t - \cos t,$
$x(0) = -3,\ x'(0) = -5.$

9.4.1.29 $x'' + 6x' + 9x = 3\sin 3t + 3\cos 3t,$
$x(0) = 3,\ x'(0) = 3.$

9.4.1.30 $x'' + 64x = \operatorname{ch} 9t,$
$x(0) = -8,\ x'(0) = 8.$

9.4.2 Методами операционного исчисления решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

9.4.2.1 $\begin{cases} x' = 2x + y + e^{t}, \\ y' = 5x - 2y + 2e^{t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -4.$

9.4.2.2 $\begin{cases} x' = 3x + 7y + e^{2t}, \\ y' = x - 3y + 2e^{2t}; \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = 3.$

9.4.2.3 $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = -x + 2y - 5e^{3t}; \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = 5.$

9.4.2.4 $\begin{cases} x' = x - y + 8e^{4t}, \\ y' = x + 3y - e^{4t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

9.4.2.5 $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 8e^{6t}, \\ y' = 3x + 4y + 2e^{6t}; \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = -1.$

9.4.2.6 $\begin{cases} x' = x + 4y - 6e^{5t}, \\ y' = 2x - y + 4e^{5t}; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = -2.$

9.4.2.7 $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 2e^{7t}, \\ y' = -x + 5y - 5e^{7t}; \end{cases}$
$x(0) = 4,\ y(0) = -1.$

9.4.2.8 $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 8e^{8t}, \\ y' = x + 2y - e^{8t}; \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = 8.$

9.4.2.9 $\begin{cases} x' = -5x - 3y + e^{9t}, \\ y' = 3x + 5y + 2e^{9t}; \end{cases}$
$x(0) = 4,\ y(0) = -2.$

9.4.2.10 $\begin{cases} x' = 6x - 11y + e^{10t}, \\ y' = x - 6y + 2e^{10t}; \end{cases}$
$x(0) = -4,\ y(0) = -5.$

9.4.2.11 $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3e^{-t}, \\ y' = x + 4e^{-t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -9.$

9.4.2.12 $\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-2t}, \\ y' = x + 3y - e^{-2t}; \end{cases}$
$x(0) = 6,\ y(0) = -1.$

9.4.2.13 $\begin{cases} x' = -7x + 4y + 8e^{-3t}, \\ y' = 8x + 7y + 2e^{-3t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -5.$

9.4.2.14 $\begin{cases} x' = 8x + 5y - 6e^{-4t}, \\ y' = -3x - 8y + 4e^{-4t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -4.$

9.4.2.15 $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^{-5t}, \\ y' = -2x + 6y - 2e^{-5t}; \end{cases}$
$x(0) = 6,\ y(0) = -3.$

9.4.2.16 $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 6e^{-6t}, \\ y' = 2x + 7y - 3e^{-6t}; \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = -3.$

9.4.2.17 $\begin{cases} x' = -9x + 19y + 2e^{-7t}, \\ y' = x + 9y + e^{-7t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -3.$

9.4.2.18 $\begin{cases} x' = 10x - 16y + e^{-8t}, \\ y' = 4x - 10y + 2e^{-8t}; \end{cases}$
$x(0) = -5,\ y(0) = 5.$

9.4.2.19 $\begin{cases} x' = 3x - 5y + 7e^{-9t}, \\ y' = -x + 7y - e^{-9t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -5.$

9.4.2.20 $\begin{cases} x' = 4x - 2y + 8e^{-10t}, \\ y' = -6x + 5y - 3e^{-10t}; \end{cases}$
$x(0) = 5,\ y(0) = 10.$

9.4.2.21 $\begin{cases} x' = -11x + 7y + 8e^{12t}, \\ y' = 3x + 11y + 2e^{12t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -1.$

9.4.2.22 $\begin{cases} x' = 12x + 4y - 6e^{11t}, \\ y' = 11x - 12y + 4e^{11t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

9.4.2.23 $\begin{cases} x' = 6x - 3y + 2e^{-11t}, \\ y' = -x + 4y - 5e^{-11t}; \end{cases}$
$x(0) = 8,\ y(0) = -5.$

9.4.2.24 $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 6e^{-12t}, \\ y' = -5x + 7y - e^{-12t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -7.$

9.4.2.25 $\begin{cases} x' = -13x - 3y + e^{13t}, \\ y' = 23x + 13y + 2e^{13t}; \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = -2.$

9.4.2.26 $\begin{cases} x' = 14x + 29y + e^{14t}, \\ y' = x - 14y + 2e^{14t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -4.$

9.4.2.27 $\begin{cases} x' = 7x - 3y + 2e^{-13t}, \\ y' = 4x + 3e^{-13t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -5.$

9.4.2.28 $\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-14t}, \\ y' = -3x + 5y - e^{-14t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -2.$

9.4.2.29 $\begin{cases} x' = -16x - 12y + e^{-15t}, \\ y' = -12x + 16y + e^{-15t}; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

9.4.2.30 $\begin{cases} x' = 17x - 11y + e^{15t}, \\ y' = 3x - 17y + e^{15t}; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = -2.$

10 ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Содержание: формула и интеграл Дюамеля, применение интеграла к решению дифференциальных уравнений.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на интервале $[0;+\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на этом интервале. Предположим, что данные функции являются оригиналами и имеют соответственно изображения: $f(t) \risingdotseq F(p),\ \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. Тогда по теореме изображения свертки $F(p)\cdot\Phi(p) \fallingdotseq \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$. По теореме дифференцирования оригинала, получаем справедливость формулы:

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p) \fallingdotseq f(t)\cdot\varphi(0) + \int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau, \qquad (10.1.1)$$

которая называется формулой Дюамеля.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(x) = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t). \qquad (10.1.2)$$

Требуется найти решение заданного уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям: $x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$.

Предположим, что известно решение уравнения

$$L(x) = 1. \qquad (10.1.3)$$

Перейдем в дифференциальных уравнениях (10.1.2) и (10.1.3) к операторным уравнениям.

Для уравнения (10.1.2) получаем операторное уравнение

$$A(p)\cdot X(p)=F(p), \tag{10.1.4}$$

а для уравнения (10.1.3) операторное уравнение имеет вид

$$A(p)\cdot X_1(p)=\frac{1}{p}. \tag{10.1.5}$$

Из уравнения (10.1.4) находим изображение $X(p)=\dfrac{F(p)}{A(p)}$, а из формулы (10.1.5) находим изображение $A(p)=\dfrac{1}{pX_1(p)}$. Подставляя изображение $A(p)$ в первое равенство, получаем выражение для функции-изображения решения исходного уравнения: $X(p)=p\cdot X_1(p)\cdot F(p)$. Применяем к последнему равенству формулу Дюамеля (10.1.1).

$$X(p)=p\cdot X_1(p)\cdot F(p) \risingdotseq f(t)\cdot x_1(0)+\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau. \tag{10.1.6}$$

Так как $x_1(0)=x(0)=0$, то решение исходного уравнения имеет вид

$$X(p)\risingdotseq x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau. \tag{10.1.7}$$

Замечание. Требование начальных условий быть нулевыми несущественно, так как с помощью замены искомой функции можно ненулевые условия свести к нулевым условиям.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=\operatorname{sh}t$ при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

Решение. Для нахождения решения дифференциального уравнения с нулевыми начальными условиями будем использовать формулы Дюамеля. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y_1''-2y_1'+y=1$, причем $y_1(0)=0$,

$y_1'(0)=0$. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, а $y_1(t) \risingdotseq Y_1(p)$, причем $f(t)=\mathrm{sh}\,t$. Тогда, на основании свойства дифференцирования оригинала получаем изображения производных функций: $y_1'(t) \risingdotseq pY_1(p)$, $\quad y_1''(t) \risingdotseq p^2Y_1(p)$. По таблице оригиналов и изображений $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, переходим от дифференциального уравнения к операторному уравнению

$$p^2Y_1(p)-2pY_1(p)+Y_1(p)=\frac{1}{p};$$

$$(p^2-2p+1)Y_1(p)=\frac{1}{p} \text{ или } (p-1)^2\cdot Y_1(p)=\frac{1}{p}.$$

Из последнего уравнения выражаем $Y_1(p)=\dfrac{1}{p\cdot(p-1)^2}$. Для определения оригинала будем использовать свойство интегрирования оригинала: интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p. В начале определим оригинал изображения $\dfrac{1}{(p-1)^2}$, используя свойство дифференцирования изображения: $\dfrac{1}{(p-1)^2}=\left(-\dfrac{1}{p-1}\right)' \risingdotseq t\cdot e^t$.

Тогда $Y_1(p) \risingdotseq y_1(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^\tau\,d\tau$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int\limits_a^b u\,dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du$.

$$y_1(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^\tau\,d\tau=\begin{bmatrix} u=\tau & du=d\tau \\ dv=e^\tau d\tau & v=e^\tau \end{bmatrix}=\tau\cdot e^\tau\Big|_0^t-\int\limits_0^t e^\tau\,d\tau=t\cdot e^t-e^\tau\Big|_0^t=t\cdot e^t-e^t+1.$$

Определим оригинал $y(t)$ по формуле $y(t)=\int\limits_0^t y_1'(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau$. Найдем производную $y_1'(t)=\left(t\cdot e^t-e^t+1\right)'=e^t+t\cdot e^t-e^t=t\cdot e^t$.

Таким образом,

$$y(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^\tau\cdot sh(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t \tau\cdot e^\tau\cdot\frac{e^{t-\tau}-e^{\tau-t}}{2}\,d\tau=\frac{e^t}{2}\int\limits_0^t \tau\,d\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t \tau\cdot e^{2\tau}\,d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\tau & du=d\tau \\ dv=e^{2\tau}d\tau & v=\frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix}=\frac{e^t}{4}\cdot\tau^2\Big|_0^t-\frac{e^{-t}}{4}\cdot\tau\cdot e^{2\tau}\Big|_0^t+\frac{e^{-t}}{4}\int_0^t e^{2\tau}\ d\tau=\frac{e^t}{4}\cdot t^2-\frac{e^t}{4}\cdot t+$$

$$+\frac{e^{-t}}{8}e^{2\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{4}\ t^2\ e^t-\frac{1}{4}\ t\ e^t+\frac{1}{8}\ e^t-\frac{1}{8}\ e^{-t}=\frac{1}{4}\ t^2\ e^t-\frac{1}{4}\ t\ e^t+\frac{1}{4}\ \text{sh}\ t\,.$$

Решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y(t)=\frac{1}{4}t^2\ e^t\ -\frac{1}{4}t\ e^t\ +\frac{1}{4}\text{sh}\,t\,.$$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=e^{2t}$ при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.3.2 Найти частное решение дифференциального уравнения $x'+2x=\sin 3t$ при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.3.3 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-y'=\frac{1}{\left(1+e^{-t}\right)^2}$. при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.3.4 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-36y=\frac{1}{\text{ch}^2 6t}$. при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.3.5 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-2y'=\frac{5}{1+e^{-2t}}$. при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.3.6 Найти частное решение дифференциального уравнения $x''-4x'+4x=\text{ch}\,2t$ при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Методами операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

10.4.1.1 $x''-x=\dfrac{4}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$.

10.4.1.2 $x''+2x'+x=\dfrac{t}{te^{t}+e^{t}}$.

10.4.1.3 $x''-x'=\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$.

10.4.1.4 $x''-x'=\dfrac{1}{e^{-t}+1}$.

10.4.1.5 $x''+4x'+4x=\dfrac{1}{\left(e^{t}+2te^{t}\right)^{2}}$.

10.4.1.6 $x''+2x'=\dfrac{4}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$.

10.4.1.7 $x''-x=\dfrac{2e^{t}}{1+e^{2t}}$.

10.4.1.8 $x''+2x'+x=\dfrac{1}{e^{t}+t^{2}e^{t}}$.

10.4.1.9 $x''-2x'+x=\dfrac{4e^{t}}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$.

10.4.1.10 $x''+x'=\dfrac{e^{-t}}{e^{-t}+1}$.

10.4.1.11 $x''+x'=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}\operatorname{ch}t}$.

10.4.1.12 $x''-2x'+x=\dfrac{1}{e^{-t}(1+t)}$.

10.4.1.13 $x''-4x'+4x=\dfrac{8e^{2t}}{e^{4t}+e^{-4t}+2}$.

10.4.1.14 $x''-4x=\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}2t}$.

10.4.1.15 $x''-9x=\dfrac{\operatorname{sh}3t}{\operatorname{ch}^{2}3t}$.

10.4.1.16 $x''+6x'+9x=\dfrac{e^{-3t}}{(t+3)^{2}}$.

10.4.1.17 $x''-4x=\dfrac{1}{ch^{3}2t}$.

10.4.1.18 $x''-9x=\operatorname{th}3t$.

10.4.1.19 $x''-10x'+25x=e^{5t}\big/\left(1+t^{2}\right)$.

10.4.1.20 $x''-4x=2e^{2t}\big/\left(e^{4t}+1\right)$.

10.4.1.21 $x''-9x=\operatorname{th}^{2}3t$.

10.4.1.22 $x''-x'=\dfrac{e^{t}}{2e^{-t}+1}$.

10.4.1.23 $x''+x'=\dfrac{e^{-2t}}{(1+e^{-t})^{2}}$.

10.4.1.24 $x''+4x'+4x=\dfrac{e^{-2t}}{\operatorname{ch}^{2}2t}$.

10.4.1.25 $x''-16x=\operatorname{th}^{2}4t$.

10.4.1.26 $x''+x'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^{t}}$.

10.4.1.27 $x''-x'=\dfrac{1}{\left(1+e^{-t}\right)^{2}}$.

10.4.1.28 $x''+x'=\dfrac{1}{1+e^{-t}}$.

10.4.1.29 $x''-25x=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^{2}5t}$.

10.4.1.30 $x''-2x'=\dfrac{2}{1+e^{-2t}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 254 с.

2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др.]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.

4. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.

5. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

6. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.

8. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

9. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1 – 2.

10. Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Практикум для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 120 с.

11. Математика. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра: методические указания по к практическим занятиям для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 103 с.

12. Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 98 с.

13. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0,\ a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$;	10)	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;
13)	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;	16)	$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;
17)	$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;	18)	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица А.2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;	2)	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;
3)	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
7)	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;	8)	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$;
9)	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \right\rvert + C$;	10)	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$;
11)	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C\ a \neq 0$;	12)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ \lvert x \rvert < \lvert a \rvert$;
13)	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert \dfrac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$;	14)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
16)	$\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C$;	17)	$\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C$;
18)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$;	19)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$, где $x \neq 0$.

Таблица А.3 – Таблица основных оригиналов и изображений

Функция-оригинал	Функция-изображение
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$(t-a)^n$	$\frac{n!\cdot e^{-a\,p}}{p^{n+1}}$
$t^n\cdot e^{\lambda\cdot t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda\cdot t}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda\cdot t}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda\cdot t}\cdot\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$e^{\lambda\cdot t}\cdot\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$\frac{1-e^{-t}}{t}$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Практикум

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Джежора Александр Александрович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович

Редактор *Т. А. Осипова*
Корректор *Т. А. Осипова*
Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати ________________. Формат________________. Усл. печ. листов______.
Уч.-изд. листов_____. Тираж_____экз. Заказ № _______.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.