МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальности 1-50 01 01
«Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов»

ВИТЕБСК
2011

УДК 519 П75

Прикладная математика: методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 1-50 01 01, «Технология пряжи, тканей, трикотажа и_нетканых материалов»
Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2011.

Составители: ст. пр. Статковский Н.С.,
ст. пр. Завацкий Ю.А.,
ст. пр. Рубаник О.Е.,
доц. Никонова Т.В.

Методические указания состоят из трех разделов, в каждом из которых дано краткое введение в теорию и приведены основные команды математической среды Maple, необходимые для решения задач, подробно разобраны типовые примеры решения прикладных задач.

Методические указания предназначены для студентов специальности «Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов» художественно-технологического факультета УО «ВГТУ».

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ ”
04.03.2011 г., протокол № 7

Рецензент: канд. ф.-м. н., доцент кафедры
ПМ и М УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
Корчевская Е.А.

Редактор: доцент Денисов В.С.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2011 г., протокол №______

Ответственный за выпуск: Лопатнева Н.Г.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати ___________ Формат ___________ Уч.- изд. лист. ________
Печать ризографическая. Тираж______экз. Заказ №________ Цена ___________

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”. Лицензия № 02330/0494384 от 16.03.2009.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ТЕМА 1. СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

1.1 Структура окна Maple

Maple представляет собой типичное окно Windows, которое состоит из Строки названия, Основного меню, Панели инструментов, Рабочего поля и Строки состояния, а также Линейки и Полос прокрутки.

Важно: к сожалению, в классическом Maple не поддерживается функция автоскроллинга мышки (колесиком). Поэтому для движения по документу надо либо зацепить скроллинг левой кнопкой мыши, либо двигать курсором (вверх–вниз) стрелками на клавиатуре.

Пункты Основного меню:

File (Файл) − содержит стандартный набор команд для работы с файлами, например: сохранить файл, открыть файл, создать новый файл и т.д.

Edit (Правка) − содержит стандартный набор команд для редактирования текста: копирование, удаление выделенного текста в буфер обмена, отмена команды и т. д.

View (Вид) − содержит стандартный набор команд, управляющих структурой окна Maple.

Insert (Вставка) − служит для вставки полей разных типов: математических текстовых строк, графических двух- и трехмерных изображений.

Format (Формат) − содержит команды оформления документа, например: установка типа, размера и стиля шрифта.

Options (Параметры) − служит для установки различных параметров ввода и вывода информации на экран или принтер, например, таких как качество печати.

Windows (Окно) − служит для перехода из одного рабочего листа в другой.

Help (Справка) − содержит подробную справочную информацию о Maple.

Работа в Maple проходит в режиме сессии − пользователь вводит предложения (команды, выражения, процедуры), которые воспринимаются условно и обрабатываются Maple. Рабочее поле разделяется на три части:

1) **область ввода** − состоит из командных строк. Каждая командная строка начинается с символа >;

2) **область вывода** − содержит результаты обработки введенных команд в виде аналитических выражений, графических объектов или сообщений об ошибке;

3) **область текстовых комментариев** − содержит любую текстовую информацию, которая может пояснить выполняемые процедуры. Текстовые строки не воспринимаются Maple и никак не обрабатываются.

Для того, чтобы переключить командную строку в текстовую, следует на **Панели инструментов** нажать мышью на кнопку . Обратное переключение текстовой строки в командную осуществляется нажатием на **Панели инструментов** кнопки .

1.2 Синтаксис команд

В конце каждой команды должен быть знак (;) или (:). Разделитель (;) означает, что в области вывода после выполнения этой команды будет сразу виден результат. Разделитель (:) используется для отмены вывода, то есть когда команда выполняется, но ее результат на экран не выводится.

Символ процента (%) служит для вызова предыдущей команды. Для присвоения переменной заданного значения используется знак присвоить (:=).

Функции в Maple. Способы задания функций

Стандартные функции *Maple*		Стандартные функции *Maple*	
Математическая запись	Запись в *Maple*	Математическая запись	Запись в *Maple*
e^x	exp(x)	Sec*x*	sec(x)
ln*x*	Ln(x)	Cosec*x*	csc(x)
lg*x*	log10(x)	Arcsin*x*	arcsin(x)
$\log_a x$	log[a](x)	Arccos*x*	arccos(x)
$\sqrt{a}$	sqrt(x)	Arctg*x*	arctan(x)
$\lvert a\rvert$	abs(a)	Arcctg*x*	arccot(x)
sin*x*	sin(x)	Sh*x*	sinh(x)
cos*x*	cos(x)	Ch*x*	cosh(x)
tg*x*	tan(x)	Th*x*	tanh(x)
ctg*x*	cot(x)	Cth*x*	coth(x)

Практическая работа № 1.1

Задание 1. Вычислить значение выражения $z=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$, где $x=\frac{|2\cdot a+4.3|}{a}$, $y=\frac{a}{|2\cdot a-4.3|}$ при a = 12.5.

Решение. Воспользуемся представлением функции с помощью оператора присваивания (**:=**). В строке ввода наберем выражение для функции и нажмем ввод:

```
> z:=(x^2+y^2)/(x^3+y^3);
```

$$z:=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$$

Если задать конкретное значение переменным *x* и *y*, то получится значение функции z для этих значении. Далее запишем значения *x* и *y*:

```
> x:=abs(2*a+4.3)/a;
```

$$x:=\frac{|2\,a+4.3|}{a}$$

```
> y:=a/abs(2*a-4.3);
```

$$y:=\frac{a}{|2\,a-4.3|}$$

Введем заданное значение a = 12.5.

```
> a:=12.5;
```

$$a := 12.5$$

После выполнения этих команд выражение z примет конкретное значение. Для его просмотра достаточно набрать

```
> z;
```

$$0.1594337550$$

Все вычисления в Maple по умолчанию производятся символьно, то есть результат будет содержать в явном виде иррациональные константы, такие как *e*, π и другие. Чтобы получить приближенное значение в виде числа с плавающей запятой, следует использовать команду evalf(expr,t), где expr − выражение, t − точность, выраженная в числах после запятой. Например, вычислим полученное значение функции при a = π точно и приближенно:

```
> a:=Pi;
```

$$a := \pi$$

```
> z;
```

$$\frac{\dfrac{(2\pi + 4.3)^2}{\pi^2} + \dfrac{\pi^2}{(2\pi - 4.3)^2}}{\dfrac{(2\pi + 4.3)^3}{\pi^3} + \dfrac{\pi^3}{(2\pi - 4.3)^3}}$$

```
> evalf(%,3);
```

$$0.328$$

Здесь использован символ (%) для вызова предыдущей команды.

Задание 2. Найти периметр трапеции, вершины которой находятся в точках A(x1;0), B(x2;0), C(x2;y3), D(x1;y4). Координаты точек задать самостоятельно.

Решение. Введем недостающие координаты:

```
> restart; x1:=2; x2:=7; y3:=8; y4:=12;
```

$$x1 := 2$$

$$x2 := 7$$

$$y3 := 8$$

$$y4 := 12$$

Чтобы определить периметр, вычислим длины всех сторон по формулам $A(a_1;a_2);B(b_1;b_2)\Rightarrow|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ и сложим их:

```
> AB:=sqrt((x2-x1)^2+(0-0)^2);
```

$$AB := 5$$

```
> BC:=sqrt((x2-x2)^2+(y3-0)^2);
```

$$BC := 8$$

```
> CD:=sqrt((x1-x2)^2+(y4-y3)^2);
```

$$CD := \sqrt{41}$$

```
> DA:=sqrt((x1-x1)^2+(0-y4)^2);
```

$$DA := 12$$

```
> P:=AB+BC+CD+DA;
```

$$P := 25 + \sqrt{41}$$

Посчитаем последнее выражение:

```
> evalf(%);
```

$$31.40312424$$

Практическая работа № 1.2

Задание 1. Даны две матрицы A и B. Найти: а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$; в) A^{-1}; г) $A \cdot A^{-1}$; д) $A^{-1} \cdot A$.

Решение. Основная часть команд для решения задач линейной алгебры содержится в библиотеке linalg. Поэтому перед решением задач с матрицами и векторами следует загрузить эту библиотеку командой *with(linalg)*.

```
> with(linalg):
```

Для определения матрицы в Maple можно использовать команду **matrix(n, m, [[a11,a12,..a1n], [a21,a22,..a2m],., [an1,an2,...,anm]])**, где n – число строк, m – число столбцов в матрице. Эти числа задавать необязательно, а достаточно перечислить элементы матрицы построчно в квадратных скобках через запятую. Например:

```
> A:=matrix([[1,0,3],[3,1,7],[3,5,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[3,5,4],[-3,0,1],[5,6,-4]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Произведение двух матриц может быть найдено с помощью команды: multiply(A,B).

а. Вычислим $A \cdot B$:

```
> AB:=multiply(A,B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 18 & 23 & -8 \\ 41 & 57 & -15 \\ 14 & 39 & 1 \end{bmatrix}$$

б. Вычислим $B \cdot A$:

```
> BA:=multiply(B,A);
```

$$BA := \begin{bmatrix} 30 & 25 & 60 \\ 0 & 5 & -5 \\ 11 & -14 & 41 \end{bmatrix}$$

в. Обратную матрицу A^{-1} можно вычислить с помощью команды inverse(A).

```
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{-31}{5} & 3 & \frac{-3}{5} \\ \frac{9}{5} & -1 & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

г. Вычислим $A \cdot A^{-1}$:

```
> AA1:=multiply(A,A1);
```

$$AA1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

д. Вычислим $A^{-1} \cdot A$:

```
> A1A:=multiply(A1,A);
```

$$A1A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В пунктах г) и д) получились единичные матрицы, значит, вычисления произведены правильно.

Задание 2. Для заданных в задании 1 матриц A и B найти $A^2 + 3 \cdot A \cdot B - 2.5 \cdot B$.

Решение. Для выполнения одновременных вычислений воспользуемся командой evalm (обратите внимание, что при умножении матриц после первой матрицы ставится знак &):

```
> evalm(A&*A+3*A&*B-2.5*B);
```

$$\begin{bmatrix} 56.5 & 71.5 & -19.0 \\ 157.5 & 207. & -3.5 \\ 59.5 & 127.0 & 73.0 \end{bmatrix}$$

Задание 3. Для заданных в задании 1 матриц A и B проверить равенство $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, если $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Зададим матрицу C.

```
> C:=matrix([[2,3],[-1,0],[5,4]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Найдем *(A·B)·C:*

```
> evalm((A&*B)&*C);
```

$$\begin{bmatrix} -27 & 22 \\ -50 & 63 \\ -6 & 46 \end{bmatrix}$$

Найдем *(A·B)·C:*

```
> evalm(A&*(B&*C));
```

$$\begin{bmatrix} -27 & 22 \\ -50 & 63 \\ -6 & 46 \end{bmatrix}$$

Задание 4. Решить систему уравнений $A \cdot X = d$, где матрица A задана ранее, а $d = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$: а) по формулам Крамера, б) с помощью обратной матрицы.

Решение. Зададим вектор свободных членов:

```
> d:=Matrix([[5],[11],[14]]);
```

$$d := \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix}$$

а. Формулы Крамера имеют вид: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель основной матрицы, а Δ_i – определитель, у которого i-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Вычислим определитель основной матрицы:

```
> Delta(A):=det(A);
```

$$\Delta(A) := 4$$

Скопируем матрицу A в новую матрицу и подставим в первый столбец матрицу d:

```
> M1:=copy(A):copyinto(d,M1,1,1);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 11 & 1 & 7 \\ 14 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Найдем определитель полученной матрицы:

```
> Delta1:=det(M1);
```

$$\Delta 1 := -4$$

Аналогично проделаем для двух оставшихся столбцов:

```
> M2:=copy(A):copyinto(d,M2,1,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 11 & 7 \\ 2 & 14 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> Delta2:=det(M2);
```

$$\Delta 2 := 0$$

```
> M3:=copy(A):copyinto(d,M3,1,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

```
> Delta3:=det(M3);
```

$$\Delta 3 := 8$$

Применим формулы Крамера:

```
> x1:=Delta1/Delta(A);x2:=Delta2/Delta(A);x3:=Delta3/Delta(A);
```

$$x1 := -1$$

$$x2 := 0$$

$$x3 := 2$$

б. Решим с помощью обратной матрицы по формуле $X = A^{-1} \cdot d$:

```
> X:=evalm(A1&*d);
```

$$X := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Практическая работа № 1.3

В Maple для некоторых математических операций существует по две команды: одна прямого, а другая – отложенного исполнения. Имена команд состоят из одинаковых букв за исключением первой: <u>команды прямого исполнения начинаются со строчной буквы</u>, а <u>команды отложенного исполнения – с заглавной</u>. После обращения к команде отложенного действия математические операции выводятся на экран в виде стандартной аналитической записи этой операции. Вычисление в этом случае сразу не производится. Команда прямого исполнения выдает результат сразу.

Для вычисления пределов имеются две команды: **прямого исполнения** – limit(функция, x = a, par), где a – значение точки, для которой вычисляется предел, par – необязательный параметр для поиска односторонних пределов (left – слева, right – справа); **отложенного исполнения** – Limit(expr, x = a, par), где параметры команды такие же, как и в предыдущем случае.

Задание 1. Найти указанные пределы.

Решение. Запишем команды отложенного и прямого исполнения:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$.

```
> Limit((5*x^4+4*x-1)/(3*x^2+x-2),x=-1)=limit((5*x^4+4*x-
1)/(3*x^2+x-2),x=-1);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{5\,x^4 + 4\,x - 1}{3\,x^2 + x - 2} = \frac{16}{5}$$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$.

```
> Limit((3*x^4+x^2-6)/(2*x^2+3*x+1),x=infinity)=limit((3*x^4+x^2-
6)/(2*x^2+ 3*x+1),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3\,x^4 + x^2 - 6}{2\,x^2 + 3\,x + 1} = \infty$$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$.

```
> Limit(3*x/(sqrt(x+1)-sqrt(1-x)),x=0)=limit(3*x/(sqrt(x+1)-sqrt(1-x)),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\,x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} = 3$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$.

```
> Limit(((2-3*x)/(5-3*x))^x,x=infinity)=limit(((2-3*x)/(5-3*x))^x,x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2-3\,x}{5-3\,x}\right)^{x} = \mathbf{e}$$

Преобразуем конечный результат:

```
> evalf(%);
```

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2-3\,x}{5-3\,x}\right)^{x} = 2.718281828$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x}$.

```
> Limit((sin(7*x)+sin(3*x))/x,x=0)=limit((sin(7*x)+sin(3*x))/x,x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7\,x) + \sin(3\,x)}{x} = 10$$

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

```
> Limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1)=limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1);
```

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)} = \mathit{undefined}$$

Предел не определен. Можно найти левосторонний или правосторонний пределы:

```
> Limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1,left)=limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1,left);
```

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)} = \infty$$

Практическая работа № 1.4

Задание 1. Задать функцию $y(x)=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$. Найти значение функции y(1.25).

Задание 2. Найти первую производную функции $y'(x)$.

Задание 3. Вычислить производную $y''(x)$ функции $y(x)=\cos^5(3x)\cdot tg(4x+1)^3$ при $x_0=2.3$.

Задание 4. Найти первую производную $y'(x)$ функции $y(x)=(\cos(x+2))^{\ln x}$.

Задание 5. Найти первую производную $y'(x)$ функции $x\cdot y(x)-y^3(x)=4x-5$.

Задание 6. Найти вторую производную $y''(x)$ функции $\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

Задание 7. Задать функцию $f(x;y;z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Найти значение функции *f*(1; 2; 2).

Задание 8. Для заданной функции (п. 7) вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ в точке $M_0(0;-1;1)$.

Решение. **1**. Зададим функцию:

```
> restart;
> y := x -> 3/(x+4)^2-(4+3*x-x^4)^(1/3);
```

$$y := x \to \frac{3}{(x+4)^2}-(4+3\,x-x^4)^{(1/3)}$$

Далее вычислим ее значение в заданной точке:

```
> y(1.25);
```

$$-1.635611702$$

2. Найдем производную, используя команду прямого исполнения diff(f,x), где f - функция, x - имя переменной, по которой производится дифференцирование.

```
> y1:=diff(y(x),x);
```

$$y1 := -\frac{6}{(x+4)^3}-\frac{3-4\,x^3}{3\,(4+3\,x-x^4)^{(2/3)}}$$

После выполнения дифференцирования полученное выражение желательно упростить. Для этого следует использовать команды simplify factor или expand.

3. Зададим новую функцию:

```
> y := x -> (cos(3*x))^5*tan((4*x+1)^3);
```

$$y := x \to \cos(3\,x)^5\,\tan((4\,x+1)^3)$$

Найдем ее вторую производную:

```
> y2:=diff(y(x),x$2);
```

$$y2 := 180\cos(3x)^3\tan((4x+1)^3)\sin(3x)^2$$
$$-360\cos(3x)^4\left(1+\tan((4x+1)^3)^2\right)(4x+1)^2\sin(3x)$$
$$-45\cos(3x)^5\tan((4x+1)^3)$$
$$+288\cos(3x)^5\tan((4x+1)^3)\left(1+\tan((4x+1)^3)^2\right)(4x+1)^4$$
$$+96\cos(3x)^5\left(1+\tan((4x+1)^3)^2\right)(4x+1)$$

Вычислим ее значение, придав сначала значение аргумента:

```
> x:=2;
```

$$x := 2$$

```
> y2;
```

$$180\cos(6)^3\tan(729)\sin(6)^2-29160\cos(6)^4\left(1+\tan(729)^2\right)\sin(6)$$
$$-45\cos(6)^5\tan(729)+1889568\cos(6)^5\tan(729)\left(1+\tan(729)^2\right)$$
$$+864\cos(6)^5\left(1+\tan(729)^2\right)$$

Просчитаем полученное выражение:

```
> evalf(%);
```

$$247036.8813$$

4. Воспользуемся непосредственной командой дифференцирования:

```
> diff((cos(x+2))^ln(x),x);
```

$$\cos(x+2)^{\ln(x)}\left(\frac{\ln(\cos(x+2))}{x}-\frac{\ln(x)\sin(x+2)}{\cos(x+2)}\right)$$

5. Чтобы продифференцировать неявную функцию, зададим уравнение:

```
> f := x*y^2-y^3=4*x-5;
```

$$f := x\,y^2-y^3=4\,x-5$$

Далее воспользуемся оператором неявного дифференцирования:

```
> implicitdiff(f,y,x);
```

$$\frac{y^2-4}{y\,(3\,y-2\,x)}$$

6. Зададим функцию параметрически:

```
> x:=t -> 6*(cos(t))^3;
```

$$x := t \to 6\cos(t)^3$$

```
> y:=t -> 2*(sin(t))^3;
```

$$y := t \to 2\sin(t)^3$$

Вычислим вторую производную по формуле: $y''(x)=\dfrac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'(t)}$, где $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$:

```
> y1x:=diff(y(t),t)/diff(x(t),t);
```

$$y1x := -\frac{1}{3}\,\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

```
> y2x:=diff(y1x,t)/diff(x(t),t);
```

$$y2x := -\frac{1}{18}\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}}{\cos(t)^2\sin(t)}$$

7. Зададим функцию трех переменных:

```
> f:=(x,y,z) -> z/sqrt(x^2+y^2);
```

$$f := (x, y, z) \to \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Найдем значение в заданной точке:

```
> f(1,1,2);
```

$$\sqrt{2}$$

Частные производные зададим оператором:

```
> f1x:=D[1](f);f1y:=D[2](f);f1z:=D[3](f);
```

$$f1x := (x, y, z) \to -\frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

$$f1y := (x, y, z) \to -\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

$$f1z := (x, y, z) \to \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Вычислим значения полученных производных в заданной точке:

```
> f1x(0,-1,1);
```

$$0$$

```
> f1y(0,-1,1);
```

$$1$$

```
> f1z(0,-1,1);
```

$$1$$

Практическая работа № 1.5

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ вычисляется с помощью 2-х команд: **прямого исполнения** – int(f, x), где f - подынтегральная функция, x – переменная; **отложенного исполнения** – Int(f, x) (параметры команды такие же). Команда Int выдает на экран интеграл в аналитическом виде математической формулы.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в командах int и Int добавляются пределы интегрирования int(f, x = a..b).

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

Решение. Запишем команду отложенного и прямого исполнения:

а) $\int \ln(\cos x)\cdot\sin x dx$, (задание б) выполняется аналогично).

```
> Int(ln(cos(x))*sin(x), x)=int(ln(cos(x))*sin(x), x);
```

$$\int \ln(\cos(x))\sin(x)\,dx = -\ln(\cos(x))\cos(x)+\cos(x)$$

в) $\int \frac{3x^2+20x+9}{\left(x^2+4x+3\right)\left(x+5\right)}dx$.

```
> Int((3*x^2+20*x+9)/((x^2+4*x+3)*(x+5)),x)=int((3*x^2+20*x+9)/
((x^2+4*x+ 3)*(x+5)),x);
```

$$\int \frac{3\,x^2+20\,x+9}{(x^2+4\,x+3)\,(x+5)}\,dx = -2\,\ln(x+5)+6\,\ln(x+3)-\ln(x+1)$$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. а) $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

```
> Int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1), x=0..1)=int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1),
x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{3\,x^4+3\,x^2+1}{x^2+1}\,dx = 1+\frac{\pi}{4}$$

Для точности укажем округление:

```
> Int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1),x=0..1)=
evalf(int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1), x=0..1),3);
```

$$\int_0^1 \frac{3\,x^4+3\,x^2+1}{x^2+1}\,dx = 1.78$$

б) $\int_0^5 \frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}dx$. Для точности сразу укажем округление:

```
> Int(1/(2*x+sqrt(3*x+1)), x=0..5)=evalf(int(1/(2*x+sqrt(3*x+1)),
x=0..5),2);
```

$$\int_0^5 \frac{1}{2\,x+\sqrt{3\,x+1}}\,dx = 0.93$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{x}{16x^4+1}dx$.

Решение.

```
> Int(x/(16*x^4+1), x=0..infinity)=int(x/(16*x^4+1),
x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \frac{x}{16\,x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{16}$$

```
> evalf(%,2);
```

$$0.20 = 0.20$$

Задание 4. Вычислить двойной интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^3}^{3x} \left(y^2 + x\right) dy$.

Решение. `> int(y^2+x, [y = x^3..3*x,x = 0..sqrt(3)]);`

$$\frac{243}{20} + \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

```
> evalf(%,4);
```

$$14.23$$

Практическая работа № 1.6

В задании 1) для построения графиков функций используйте линии разных цветов, толщины и стилей. В заданиях 2), 3) у построенных графиков измените цвет и толщину линий, свойства просмотра и способы отображения функций, добавьте заголовки, отформатируйте оси.

Задание 1. Построить в одной системе координат графики функций:

а) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$; в) $y = (x-1)\cdot e^{4x+2}$.

Задание 2. Построить кривую, заданную неявно $y = e^y + 4x$.

Задание 3. Построить кривую, заданную в полярной системе координат $\rho = 2\sin 4\varphi$.

Задание 4. Построить кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Для построения графиков f(x) используется команда plot(f(x), x=a..b, y=c..d, parameters), где parameters – параметры управления изображением. Настройка изображения также может осуществляться с панели инструментов.

Основные параметры команды plot: **title**="text", где text – заголовок рисунка; **coords**=polar - в полярных координатах; **axes** – установка типа осей: axes=NORMAL; axes=BOXED; axes=FRAME; axes=NONE; **scaling** –- установка масштаба рисунка: scaling=CONSTRAINED – одинаковый масштаб; scaling=UNCONSTRAINED – график масштабируется; **style**=LINE(POINT); **numpoints** = n – число точек графика.

1. Зададим функцию а)

```
> f1:=x-ln(1+x^2);
```

$$f1 := x - \ln(x^2 + 1)$$

Зададим функцию б)

```
> f2:=x^3/(x^2+x+1);
```

$$f2 := \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$$

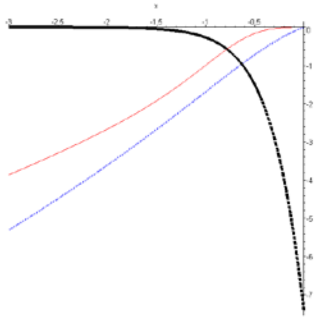
Зададим функцию в)

```
> f3:=(x-1)*exp(4*x+2);
```

$$f3 := (x-1)\,\mathbf{e}^{(4\,x+2)}$$

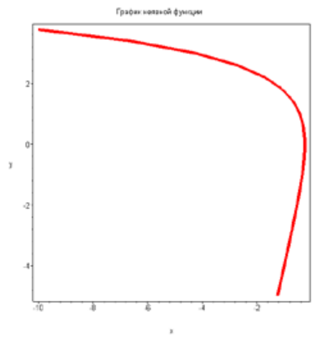
Построим графики:

```
> plot({f1,f2,f3},x=-3..0,color=[red,black,blue],linestyle=
[0,3,10],thickness=[1,5,3]);
```



2. Построим неявную кривую с помощью оператора implicitplot:

```
> with(plots,implicitplot);
> implicitplot(y=exp(y)+4*x,x=-10..10,y=-5..5, color=red,
axes=box,thickness=5,caption="График неявной функции");
```



3. 4. Аналогично, строим графики в полярной системе и параметрической функции (приведем только команды):

```
> plot(2*sin(4*phi), coords=polar, color=blue,
axes=frame,thickness=3,caption="График в полярной системе");
> plot([4*(cos(t))^3,4*(sin(t))^3,t=0..2*Pi], color=blue,
axes=normal,thickness=3,caption="График параметрической функции");
```

Практическая работа № 1.7

График функции $z = f(x,\ y)$ можно нарисовать, используя команду **plot3d(f(x,y), x = x1..x2, y = y1..y2, options).** Параметры этой команды частично совпадают с параметрами команды plot. Параметр **style=opt** задает стиль: **POINT** – точки, **LINE** – линии, **HIDDEN** – сетка с удалением невидимых линий, **PATCH** – заполнитель (установлен по умолчанию), **WIREFRAME** – сетка с выводом невидимых линий, **CONTOUR** – линии уровня, **PATCHCONTOUR** – заполнитель и линии уровня.

График поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z)$=C, строится с помощью команды пакета plot: implicitplot3d(F(x,y,z) = c, x = x1..x2, y = y1..y2, z=z1..z2), где указывается уравнение поверхности и размеры рисунка по координатным осям.

В заданиях 1−3 для построенных поверхностей измените угол просмотра, вид поверхности и цвет, добавьте заголовок и сетку координат.

Задание 1. Построить в одной системе координат:

а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.

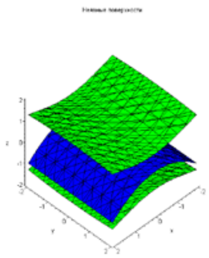
Задание 2. Построить в одной системе координат:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 32$; б) $y^2 = x^2 + z^2$.

Задание 3. Построить поверхность $f(x;y) = \sin\left(x^2 + (y-1)^2\right)$ при $x \in [-2;2]$ и $y \in [-1;3]$.

Решение. 1. Построим неявную поверхность с указанием цветов, осей и названия:

```
> implicitplot3d([4*x^2-y^2-16*z^2+16=0,x^2+4*z=0],x=-2..2,y=-2..2,
z=-2..2, color=[green,blue], axes=frame,caption="Неявные
поверхности");
```



2), 3) Аналогично строим остальные поверхности (приведем только команды):

```
> implicitplot3d([x^2+y^2+z^2=32,y^2=x^2+z^2],x=-10..10,y=-10..10,
z=-10..10, color=[red,magenta], axes=frame,caption="Неявные
поверхности");
> plot3d(sin(x^2+(y-1)^2),x=-2..2,y=-1..3, color=yellow,
axes=frame,caption="Явные поверхности");
```

Практическая работа № 1.8

Для нахождения решений д.у. в Maple применяется команда dsolve(eq,var,options), где eq – диф. уравнение, var − неизвестные функции, options − параметры. Параметры могут указывать метод решения, например, по умолчанию ищется аналитическое решение: type=exact. Общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных. В Maple такие постоянные обозначаются как _C1, _C2 … .

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$; б) $(y-x)dy - xdx = 0$; в) $xy' - y = y^2$.

Решение. а. Запишем уравнение в виде, содержащем производную (задание б) выполняется аналогично):

```
> restart;
> eq1:=3^(x^2+y(x))*diff(y(x),x)+x=0;
```

$$eq1 := 3^{(x^2 + y(x))}\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + x = 0$$

Найдем общее решение:

```
> dsolve(eq1,y(x));
```

$$y(x) = \frac{\ln\left(\frac{3^{(-x^2)}}{2} - \_C1\ \ln(3)\right)}{\ln(3)}$$

в. Запишем уравнение и найдем общее решение:

```
> eq3:=x*diff(y(x),x)-y(x)=(y(x))^2;
```

$$eq3 := x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - y(x) = y(x)^2$$

```
> dsolve(eq3,y(x));
```

$$y(x) = \frac{x}{-x + \_C1}$$

Задание 2. Найти частное решение:

а) $(xy' - 1)\ln x = 2y, y(e) = 0$; б) $y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$;

в) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, y(0) = -2, y'(0) = 0$.

Решение. а. Зададим уравнение

```
> eq1:=(x*diff(y(x),x)-1)*ln(x)=2*y(x);
```

$$eq1 := \left(x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 1\right)\ln(x) = 2\,y(x)$$

Зададим начальное условие

```
> cond1:=y(exp(1))=0;
```

$$cond1 := y(\mathbf{e}) = 0$$

Найдем решение:

```
> dsolve({eq1,cond1},y(x));
```

$$y(x) = -\ln(x) + \ln(x)^2$$

б. Зададим уравнение

```
> eq2:=y(x)*diff(y(x),x,x)-2*(diff(y(x),x))^2=0;
```

$$eq2 := y(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 = 0$$

Зададим начальные условия

```
> cond2:=y(0)=1,D(y)(0)=2;
```

$$cond2 := y(0) = 1,\ D(y)(0) = 2$$

Найдем решение:

```
> dsolve({eq2,cond2},y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{2\,x - 1}$$

в. Зададим уравнение

```
> eq3:=diff(y(x),x,x)-2*diff(y(x),x)+y(x)=-12*cos(2*x)-9*sin(2*x);
```

$$eq3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = -12\cos(2\,x) - 9\sin(2\,x)$$

Зададим начальные условия

```
> cond3:=y(0)=-2,D(y)(0)=0;
```

$$cond3 := y(0) = -2,\ D(y)(0) = 0$$

Найдем решение:

```
> dsolve({eq3,cond3},y(x));
```

$$y(x) = -2\,e^x - 4\,e^x\,x + 3\sin(2\,x)$$

Задание 3. Найти общее решение $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Решение. `> eq:=diff(y(x),x,x)-y(x)=exp(x)/(exp(x)+1);`

$$eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - y(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

```
> dsolve(eq);
```

$$y(x) = e^x\,\_C2 + e^{(-x)}\,\_C1 - \frac{1}{2}\left(\left(e^{(2\,x)} - 1\right)\ln(e^x+1) - e^{(2\,x)}\ln(e^x) + e^x\right)e^{(-x)}$$

Задания для самостоятельного решения по теме 1

Практическая работа № 1.1

1. Вычислить значение выражения:

1.1 $w = \dfrac{u^{-2}+v^4}{u+v^3}$, где $u = \dfrac{|2x-1.4|}{x}$, $v = \dfrac{x+4}{|x-12|}$ при x=2.3.

1.2 $y = \dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$, где $a = \dfrac{x-0.1}{\sqrt{x+0.1}}$, $b = \dfrac{x^2-0.1}{\sqrt{x^2+0.1}}$ при x=3.89.

1.3 $b = 0.4x^8 + e^{-0.1x} - \sqrt{|x|\cdot|x+y|}$ при x=-1.7 и y=7.42.

1.4 $a = \dfrac{x^5 + y\sqrt{|x+y|}}{\ln 13.24} - x^3 + \dfrac{\cos(2x)}{\sin x - 2}$ при x=34.37 и y=-3.019.

1.5 $u = \dfrac{a^2+c^3-ac}{\sqrt{|a+c-0.3a^5|}} - a\cdot\cos(2a\cdot c-4)$ при a=4.29 и c=133.06.

1.6 $x = a^3 - c^8 + \dfrac{\sqrt{a+c^{0.8-a}}}{a(c+a^6)}$, где $a = \dfrac{\sin(2d)}{\cos d + 1}$ при d=-23.14 и c=0.56.

1.7 $y = \dfrac{(a+b)^3+b^{-3}}{a^{-2}+(b-5)^2}$, где $a = \dfrac{x+\sqrt{1+|x+6|}}{\sqrt{x+0.1}}$, $b = \dfrac{x^2-0.1}{\sqrt{x^2+0.1}}$ при x=7.25.

1.8 $z = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^3+y^3}$, где $x = \dfrac{|2a^{-6}+4.3a|}{a-0.3a^4}$, $y = \dfrac{a^7-31}{|2a^3+4.7a|}$ при a=5.14.

1.9 $b = 0.1x^{-8} + e^{x-3.1} - \sqrt{|x^2-xy+y|\cdot|x+y^{-4}|}$ при x=2.18 и y=-2.81.

1.10 $a=\dfrac{x^2+y\sqrt{\left|y+x^3-\sin(xy)\right|}}{x-y}-(x+y)^3$ при x=2.678 и y=-1.29.

2.1 Найти сумму длин диагоналей прямоугольника, вершины которого находятся в точках $A(x1,\ 0)$, $B(x2,\ 0)$, $C(x2,\ y3)$, $D(x1,\ y3)$. Координаты точек задайте самостоятельно.

2.2 Найти периметр ромба, если известно, что его диагонали a и b принадлежат осям координат. Начало координат является точкой пересечения диагоналей.

2.3 Найти длину окружности, которая проходит через $A(x1;\ y1)$ и ее центр находится в точке $B(x2;\ y2)$.

2.4 Найти периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(x1;\ y1)$, $B(x2;\ y2)$, $C(x3,\ y3)$.

2.5 Найти сумму длин диагоналей прямоугольника, противоположные вершины которого находятся в точках $A(x1;\ y1)$ и $C(x3,\ y3)$.

2.6 Найти площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если длины его ребер a, b, c вводятся с клавиатуры.

2.7 Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(x1;\ y1)$, $B(x2;\ y2)$ и $C(x3,\ y3)$.

2.8 Найти площадь боковой поверхности конуса, если даны его высота h и радиус основания R.

2.9 Найти площадь круга, который проходит через $A(x1;\ y1)$, а его центр находится в точке $B(x2;\ y2)$.

2.10 Прямоугольник с вершинами $A(x,\ 0)$, $B(x,\ y)$, $C(0,\ y)$, $D(0,\ 0)$ вращается вокруг стороны CD. Найти площадь полной поверхности полученной фигуры.

Практическая работа № 1.2

1. Даны две матрицы A и $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ 7 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$. Найти: а) $A\cdot B$; б) $B\cdot A$; в) A^{-1}; г) $A\cdot A^{-1}$; д) $A^{-1}\cdot A$.

1.1 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$; 1.2 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{bmatrix}$; 1.3 $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

1.4 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; 1.5 $A=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{bmatrix}$; 1.6 $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -7\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$;

1.7 $A=\begin{bmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{bmatrix}$; 1.8 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$; 1.9 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$;

1.10 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Для заданных в задании 1. матриц A и B найти A^2+2·A·B-4·A.

3. Для заданных в задании 1. матриц A и B проверить равенство: (AB)C=A(BC),

если $C=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Решить систему уравнений A=d а) по формулам Крамера, б) с помощью обратной матрицы, где матрица A задана ранее.

4.1 $d=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; 4.2 $d=\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ -11 \end{bmatrix}$; 4.3 $d=\begin{bmatrix} -41 \\ 21 \\ 0 \end{bmatrix}$; 4.4 $d=\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$; 4.5 $d=\begin{bmatrix} -66 \\ -30 \\ -42 \end{bmatrix}$;

4.6 $d=\begin{bmatrix} -5 \\ -40 \\ 23 \end{bmatrix}$; 4.7 $d=\begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ -12 \end{bmatrix}$; 4.8 $d=\begin{bmatrix} -1 \\ 37 \\ -7 \end{bmatrix}$; 4.9 $d=\begin{bmatrix} -3 \\ -44 \\ 24 \end{bmatrix}$; 4.10 $d=\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Практическая работа № 1.3

Найти указанные пределы:

1.1 а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{x+8}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

1.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

1.3 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

1.4 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{2\sin x+x}$.

1.5 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{2\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}$.

1.6 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{3x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

1.7 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-\sin 2x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\mathrm{tg}\,x}{1+\cos 4x}$.

1.8 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\mathrm{tg}\,x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$.

1.9 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

1.10 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}\,x$.

Практическая работа № 1.4

1. Задать функцию $y(x)$ и найти значение функции y при $x=x_0$

1.1 $y(x)=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$, x_0=3.37;

1.2 $y(x)=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$, x_0=-3.17;

1.3 $y(x)=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$, x_0=8.21;

1.4 $y(x)=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$, x_0=4.56;

1.5 $y(x)=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$, x_0=-6.96;

1.6 $y(x)=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$, x_0=11.6;

1.7 $y(x)=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$, x_0=7.67;

1.8 $y(x)=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$, x_0=-0.82;

1.9 $y(x)=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$, x_0=7.26;

1.10 $y(x)=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$, x_0=2.75.

2. Найти первую производную $y'(x)$ ранее заданной функции.

3. Вычислить вторую производную $y''(x_0)$ функции:

3.1 $y(x)=\arcsin^3(4x)\cdot\operatorname{ctg}(3x)$ при x_0=0.13; 3.2 $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$ при x_0=1.5;

3.3 $y(x)=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$ при x_0=0.3; 3.4 $y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg} 7x^4$ при x_0=-0.34;

3.5 $y(x)=\operatorname{ctg}(3x)\cdot\arccos 3x^2$ при x_0=0.39; 3.6 $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$ при x_0=2.67;

3.7 $y(x)=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg}7x^4$ при x_0=1.24; 3.8 $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$ при x_0=6.19;

3.9 $y(x)=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg}5x^3$ при x_0=3.57; 3.10 $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$ при x_0=4.27.

4. Найти первую производную $y'(x)$ функции:

4.1 $y(x)=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x}$; 4.2 $y(x)=(\sin 3x)^{\arccos x}$; 4.3 $y(x)=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}5x}$;

4.4 $y(x)=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg}3x}$; 4.5 $y(x)=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$; 4.6 $y(x)=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

4.7 $y(x)=(\arccos 5x)^{\ln x}$; 4.8 $y(x)=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin x}$; 4.9 $y(x)=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg}2x}$;

4.10 $y(x)=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$.

5. Найти первую производную $y'(x)$ функции:

5.1 $\sin y=xy^2+5$; 5.2 $y=x+\operatorname{arctg} y$; 5.3 $y^2=25x-4$; 5.4 $\operatorname{arcctg} y=4x+5y$;

5.5 $y^2-x=\cos y$; 5.6 $3x+\sin y=5y$; 5.7 $\operatorname{tg} y=3x+5y$; 5.8 $xy=\operatorname{ctg} y$;

5.9 $y=e^y+4x$; 5.10 $3y=7+xy^3$.

6. Найти вторую производную y''_{xx} функции:

6.1 $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$ 6.2 $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases}$ 6.3 $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$ 6.4 $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$

6.5 $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$ 6.6 $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$ 6.7 $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$ 6.8 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$ 6.10 $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

7. Задать функцию $f(x,y,z)$. Найти значение функции $f(1, 1, 2)$.

7.1 $f(x,y,z) = z e^{-xy}$; 7.2 $f(x,y,z) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2z}\right)$; 7.3 $f(x,y,z) = \ln(x^3 + 2y^3 + z^3)$;

7.4 $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}$; 7.5 $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xy^2 + z)$; 7.6 $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{xz}{y^2}\right)$;

7.7 $f(x,y,z) = \ln(x^3 + y^2 + z)$; 7.8 $f(x,y,z) = \ln(x + y^2) - (xz)^5$;

7.9 $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^4 + y^2}$; 7.10 $f(x,y,z) = \ln(x^5 + y^4 + z)$.

8. Для ранее заданной функции $f(x,y,z)$ вычислить значения частных производных $f'_x(M_0),\ f'_y(M_0),\ f'_z(M_0)$ в точке $M_0(0, -1, 1)$.

Практическая работа № 1.5

1. Найти неопределенные интегралы:

1.1 а) $\int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$; б) $\int (x^2 + x)e^{-x}\, dx$; в) $\int \dfrac{12\, dx}{(x^2 - 2x + 3)(x-2)}$;

1.2 а) $\int \ln(x+2)\, dx$; б) $\int x^2 \sin(x+1)\, dx$; в) $\int \dfrac{43x - 67}{(x^2 - x - 12)(x-1)} dx$;

1.3 а) $\int \ln^2 x\, dx$; б) $\int x \cdot \operatorname{arctg}(4x)\, dx$; в) $\int \dfrac{8x\, dx}{(x^2 + 6x + 5)(x+3)} dx$;

1.4 а) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; б) $(x+1) \cdot e^{-4x} dx$; в) $\int \dfrac{6x^2 + 6x - 6}{(x^2 + x - 2)(x+1)} dx$;

1.5 а) $\int \ln(x+4)\, dx$; б) $\int \arcsin 5x\, dx$; в) $\int \dfrac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x-4)} dx$;

1.6 а) $\int x^2 \cdot \ln x\, dx$; б) $\int \operatorname{arctg} 4x\, dx$; в) $\int \dfrac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x-3)} dx$;

1.7 а) $\int \arccos 2x\, dx$; б) $\int (x+4) \cdot e^{2x}\, dx$; в) $\int \dfrac{3x^2 - 15}{(x^2 + 5x + 6)(x-1)} dx$;

1.8 а) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; б) $\int (x^2+1)\cdot e^x dx$; в) $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$;

1.9 а) $\int \arcsin 9x\,dx$; б) $\int (x+7)\cdot \sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$;

1.10 а) $\int (x+1)\cdot e^{2x}dx$; б) $\int (x^2-1)\cdot e^{-x}dx$; в) $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$.

2. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой:

2.1 а) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; б) $\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$; 2.2 а) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$; б) $\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$;

2.3 а) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; б) $\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$; 2.4 а) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$; б) $\int_0^{0.5} \ln(1+x^3)dx$;

2.5 а) $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x}}$; б) $\int_0^1 x^2\cdot\sin x\,dx$; 2.6 а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2}\,dx$;

2.7 а) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}}$; б) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^5}$; 2.8 а) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int_0^{0.1} \frac{e^x-1}{x}\,dx$;

2.9 а) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$; б) $\int_0^{0.5} \ln(1+x^2)dx$; 2.10 а) $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$; б) $\int_{0.3}^{0.5} \frac{1+\cos x}{x^2}\,dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл:

3.1 $\int_1^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4-1}$; 3.2 $\int_0^{\infty} e^{-3x}x\,dx$; 3.3 $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$; 3.4 $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}$;

3.5 $\int_4^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-4x+1)^3}}$; 3.6 $\int_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+5)^2}$; 3.7 $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x\,dx}{\pi(1+4x^2)}$;

3.8 $\int_{1/2}^{\infty} \frac{16\,dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$; 3.9 $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+4x+5)^3}}$; 3.10 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Практическая работа № 1.6

В задании 1 для построения графиков функций используйте линии разных цветов, толщины и стилей. В заданиях 2, 3 у построенных графиков измените цвет и толщину линий, свойства просмотра и способы отображения функций, добавьте заголовки, отформатируйте оси.

1. Построить в одной системе координат графики функций:

1.1 а) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; в) $y=x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; 1.2 а) $y=x+\frac{\ln x}{x}$;

б) $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; в) $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$; 1.3 а) $y=x^2-2\ln x$; б) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$;

в) $y=e^{2x-x^2}$; 1.4 а) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$; в) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

1.5 а) $y=x\cdot\ln x$; б) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; в) $y=x\cdot e^x$; 1.6 а) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

б) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; в) $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$; 1.7 а) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$; б) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$;

в) $y=(x+2)e^{1-x}$; 1.8 а) $y=1-\ln^3 x$; б) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; в) $y=(x+1)e^{2x}$;

1. 9 а) $y=-x\cdot\ln^2 x$; б) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; в) $y=x^3e^{x+1}$; 1. 10 а) $y=\ln(4-x^2)$;

б) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; в) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

2. Построить кривую, заданную неявно:

2.1 $y=x+\operatorname{arctg} y$; 2.2 $y^2=25x-4$; 2.3 $y^2-x=\cos y$; 2.4 $3x^3+\sin y=5y$;

2.5 $xy=\operatorname{ctg} y$; 2.6 $y^2+x^2=\sin y$; 2.7 $4x-7y=e^y$; 2.8 $xy-6=\cos y$;

2.9 $3y=7+xy^3$; 2.10 $x^3+y^3=5x$.

3. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат:

3.1 $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$; 3.2 $\rho=3\sin 6\varphi$; 3.3 $\rho=3(1+\sin\varphi)$; 3.4 $\rho=2(1-\cos\varphi)$;

3.5 $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$; 3.6 $\rho=4\sin 3\varphi$; 3.7 $\rho=3(\cos\varphi+1)$; 3.8 $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$;

3.9 $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$; 3.10 $\rho=2\cos 4\varphi$.

4. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0\le t\le 2\pi$):

4.1 $\begin{cases}x=4\cos 2t,\\ y=3\sin 2t,\end{cases}$ 4.2 $\begin{cases}x=2\sin t,\\ y=3(1-\cos\ t),\end{cases}$ 4.3 $\begin{cases}x=4\cos t,\\ y=5\sin t,\end{cases}$ 4.4 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=4\sin^3 t,\end{cases}$

4.5 $\begin{cases}x=5\cos^3 t,\\ y=5\sin^3 t,\end{cases}$ 4.6 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=5\sin t,\end{cases}$ 4.7 $\begin{cases}x=4\cos 3t,\\ y=2\sin 3t,\end{cases}$ 4.8 $\begin{cases}x=4\cos t,\\ y=4(1-\sin t),\end{cases}$

4.9 $\begin{cases}x=5\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$ 4.10 $\begin{cases}x=4\cos 2t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$

Практическая работа № 1.7

В заданиях 1–3 для построенных поверхностей измените угол просмотра, вид поверхности и цвет, добавьте заголовок и сетку координат.

1. Построить в одной системе координат поверхности:

1.1а) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$; б) $x^2+2y^2-2z=0$; 1.2 а) $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$; б) $y^2+4z^2=5x^2$; 1.3 а) $4x^2-8y^2+z^2+24=0$; б) $x^2-y=-9z^2$;
1.4 а) $x^2-6y^2+z^2=0$; б) $7x^2-3y^2-z^2=21$; 1.5 а) $z=8-x^2-4y^2$; б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$; 1.6 а) $4x^2+6y^2-24z^2=96$; б) $y^2+8z^2=20x^2$;
1.7 а) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$; б) $y=5x^2+3z^2$; 1.8 а) $x^2=8(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$; 1.9 а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$;
1.10 а) $x^2-7y^2-14z^2-2=0$; б) $2y=x^2+4z^2$.

2. Построить в одной системе координат поверхности:
2.1 а) $z=x^2+y^2$; б) $z=x^2$; 2.2 а) $z=2-(x^2+y^2)$; б) $x^2+y^2=4y$;
2.3 а) $x^2+y^2=1$; б) $x=y^2$; 2.4 а) $x^2=1-y$; б) $x^2+2y^2+4z^2=10$;
2.5 а) $x^2+y^2+z^2=16$; б) $x^2+2y^2=z$; 2.6 а) $y^2+z^2=x$; б) $x^2+2y^2+3z^2=12$;
2.7 а) $2x^2+5y^2+z^2=14$; б) $x^2=2y^2+3z^2$; 2.8 а) $y^2+z^2=6$; б) $x^2+3y^2-8z^2=0$; 2.9 а) $y=2\sqrt{x}$; б) $x^2+2y^2+2z^2=12$;
2.10 а) $y^2+z^2=x$; б) $x^2+y^2+z^2=9$.

3. Построить поверхность
3.1 $f(x,y)=\cos((x-4)^2+(y+6)^2)$ при $x\in[2, 6]$ и $y\in[-9, -3]$;
3.2 $f(x,y)=\sin(x+y)$ при $x\in[-4, 4]$ и $y\in[-3, 3]$;
3.3 $f(x,y)=\ln(x+y)$ при $x\in[-3, 3]$ и $y\in[-4, 4]$;
3.4 $f(x,y)=\sin(x+y-1)$ при $x\in[-3, 3]$ и $y\in[-2, 2]$;
3.5 $f(x,y)=\sin(4x-y)$ при $x\in[-\pi, \pi]$ и $y\in[-\pi, \pi]$;
3.6 $f(x,y)=4x\cdot e^{-x^2-y^2}$ при $x\in[-5, 5]$ и $y\in[-3, 3]$;
3.7 $f(x,y)=5+\dfrac{32\cdot x\cdot y^2}{x^3+y^4}$ при $x\in[1, 10]$ и $y\in[1, 10]$;
3.8 $f(x,y)=\sin x\cdot \operatorname{tg} y$ при $x\in[-3, 3]$ и $y\in[-3, 3]$;
3.9 $f(x,y)=e^{x^2\cdot y^2}$ при $x\in[-1, 1]$ и $y\in[-1, 1]$;
3.10 $f(x,y)=e^{-x^2\cdot y^2}$ при $x\in[-2, 2]$ и $y\in[-4, 4]$.

Практическая работа № 1.8

1. Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений:
1.1 а) $e^{x+3y}dy=xdx$; б) $(x+2y)dx-xdy=0$; в) $y-xy'=2(1+x^2y')$;
1.2 а) $\dfrac{1}{\sin x}dy=y\ln y\,dx$; б) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$; в) $y-xy'=1+x^3y'$;
1.3 а) $dy=(2x-1)\operatorname{ctg} y\,dx$; б) $y^2dx+(x^2-x)dy=0$; в) $(x+4)y'-xy=0$;

1.4 а) $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx$; б) $xdy = (y + x^3 y)dx$; в) $y' = 2xy + x$;

1.5 а) $dy = (2y+1)\operatorname{tg} x\, dx$; б) $x\,dy = (y - xe^{y/x})dx$; в) $2x\,y\,y' = 1 - x^2$;

1.6 а) $(1+e^x)\,y\; dy = e^x\, dx$; б) $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy$; в) $(x^2 - 1)y' - xy = 0$;

1.7 а) $\sin x\, dy = (y \cos x + 2\cos x)dx$; б) $x\,dy = \left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)dx$;

в) $(yx + y)y' + x = 0$;

1.8 а) $\operatorname{ctg} x\, dy + (y-2)dx = 0$; б) $dy = (y/x - 1)\,dx$; в) $x\,y\,y' = \sqrt{y^2 + 1}$;

1.9 а) $\sqrt{1-x^2}dy - \cos^2 y\, dx = 0$; б) $x\,dy + (x+y)dx = 0$; в) $y' = (1+y^2)/(1+x^2)$;

1.10 а) $e^x \operatorname{tg} y\, dx = (1-e^x)\,dy$; б) $(x-y)\,y\,dx - x^2 dy = 0$;

в) $y\sqrt{1-x^2}\; y' + \sqrt{1-y^2} = 0$.

2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

2.1 а) $(x^2+1)\,y' + 4\,x\,y = 3$, $y(0) = 0$; б) $y'' = y' e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - 6y' + 9y = -9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

2.2 а) $y' + y\,tgx = 1/\cos x$, $y(0) = 0$; б) $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;

2.3 а) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$; б) $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2$, $y(1) = \pi/4$, $y'(1) = 2$;

в) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;

2.4 а) $x^2 y' + x\,y + 1 = 0$, $y(1) = 0$; б) $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$;

2.5 а) $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$; б) $y''^2 = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$;

2.6 а) $y = x(y' - x\cos x)$, $y(\pi/2) = 0$; б) $2yy'' = y'^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' + 20y = 16\,x\,e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

2.7 а) $x\,y' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$; б) $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

в) $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;

2.8 а) $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$;

б) $y'' + 2/(1-y)y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;

2.9 а) $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$; б) $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

в) $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$;

2.10 а) $xy' + y = \sin x$, $y(\pi/2) = 2/\pi$; б) $(y-1)y'' = 2y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

в) $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

3.1 $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$; 3.2 $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$; 3.3 $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$;
3.4 $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$; 3.5 $y'' - 2y' = (4x+4)e^{2x}$;
3.6 $y'' - 4y' = 8 - 16x$; 3.7 $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$; 3.8 $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$;
3.9 $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$; 3.10 $y'' + 3y' = 10 - 6x$.

ТЕМА 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим операционное исчисление как один из методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Каких-либо решающих преимуществ этот метод перед другими не имеет; в то же время его простота сделала его основным инструментом при решении задачи Коши в целом ряде прикладных наук (механике, радиотехнике, электротехнике и т.д.).

Идея операционного исчисления состоит в следующем. Пространство функций, удовлетворяющих некоторым достаточно общим условиям (пространство функций-оригиналов) взаимно однозначно отображается в другое пространство функций (пространство функций-изображений) так, что операциям дифференцирования и интегрирования в пространстве функций-оригиналов соответствуют более простые операции (операции умножения и деления) в пространстве функций-изображений. В результате дифференциальное уравнение в пространстве функций-оригиналов преобразуется в линейное алгебраическое уравнение в пространстве функций-изображений, решение которого находится без проблем. Последнее действие − восстановление решения уравнения по его изображению.

Таким образом, необходимо изучить следующие вопросы:

1. Какие функции могут быть функциями-оригиналами и каковы свойства функций-изображений?

2. Каковы правила перевода оригиналов в изображения и обратно?

3. Какие изображения имеют основные элементарные функции (таблица стандартных изображений)?

И, наконец, рассмотрим применение программной системы Maple к нахождению прямого и обратного преобразования Лапласа, а также к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

2.1 Определение функции-оригинала

Определение. Комплексная функция $f(t)$ действительной переменной t называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) для всех $t \geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале оси Ot таких точек имеется лишь конечное число;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M>0$ и $s_0 \ge 0$, что для всех $t>0$ выполняется $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$. Число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$1(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1, t\ge 0.\end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varphi(t)\cdot 1(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ \varphi(t), t\ge 0;\end{cases}$$

следовательно, если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3, то $\varphi(t)\cdot 1(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы. Для простоты записи будем в дальнейшем опускать множитель $1(t)$, условившись, что все рассматриваемые функции равны нулю для отрицательных значений t (например, вместо $1(t)$ будем писать 1, вместо $\sin t\cdot 1(t)$ просто $\sin t$ и т.д.).

Задание 1. Установить, являются ли оригиналами следующие функции:

а) $f(t)=\dfrac{10}{t-1}$, б) $f(t)=\cos 2t\sin^4 t$, в) $f(t)=6t^7$, г) $f(t)=\dfrac{5}{t+4}$.

Решение. а. Функция $f(t)=\dfrac{10}{t-1}$ определена и непрерывна для всех $t\ge 0$, кроме точки $t=1$, где она терпит разрыв. Выясним характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы $f(1-0)$ и $f(1+0)$:

$$f(1-0)=\lim_{t\to 1-0}\frac{10}{t-1}=\frac{10}{-0}=-\infty,\quad f(1+0)=\lim_{t\to 1+0}\frac{10}{t-1}=\frac{10}{+0}=+\infty.$$

Таким образом, в точке $t=1$, принадлежащей промежутку $[0,+\infty)$, функция $f(t)=\dfrac{10}{t-1}$ имеет разрыв второго рода, а, значит, условие 2) не выполняется и функция оригиналом быть не может.

б. Данная функция является оригиналом, так как условие 1) выполнено в силу задания функции; условие 2) также выполнено, так как для всех $t\ge 0$ $f(t)=\cos 2t\sin^4 t$ − непрерывная функция. Наконец, при $\forall\, t$ получаем $|f(t)|=\left|\cos 2t\sin^4 t\right|=|\cos 2t|\cdot\left|\cos^4 t\right|\le 1\le M\cdot e^{0\cdot t}$, где M − любое действительное число, большее или равное 1. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0=0$.

в. Данная функция является оригиналом, так как условие 1) выполнено в силу задания функции; условие 2) также выполнено, так как для всех $t\ge 0$ $f(t)=6t^7$ − непрерывная функция. Наконец, при $t\ge 0$ получаем $t^7<e^{7t}$, тогда $|f(t)|=\left|6t^7\right|\le M\cdot e^{7\cdot t}$, где M − любое действительное число, большее или равное

6. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0 = 7$.

г. Данная функция является оригиналом, так как условие 1) выполнено в силу задания функции; условие 2) также выполнено, так как для всех $t \ge 0$ $f(t) = \dfrac{5}{t+4}$ − непрерывная функция. Наконец, при $t \ge 0$ получаем $\dfrac{5}{t+4} \le \dfrac{5}{4}$, тогда $|f(t)| = \left|\dfrac{5}{t+4}\right| \le M \cdot e^{0 \cdot t}$, где M − любое действительное число, большее или равное 5/4. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0 = 0$.

2.2 Изображение функции-оригинала по Лапласу. Свойства преобразования Лапласа

Определение. Изображением по Лапласу функции-оригинала $f(t)$ называется функция комплексной переменной $p = s + i\omega$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют преобразованием Лапласа. Соответствие между $f(t)$ и $F(p)$ обозначается $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(t)$.

Теорема. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 − показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

1. Линейность. Если $f(t) \risingdotseq F(p), g(t) \risingdotseq G(p)$, а c_1 и c_2 − произвольные постоянные числа, то

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) \risingdotseq c_1 F(p) + c_2 G(p).$$

2. Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и λ − любое положительное число, то

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

3. Смещение. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа α

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p - \alpha),$$

т.е. «смещение» изображения на α равносильно умножению оригинала на $e^{\alpha t}$.

4. Запаздывание. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и θ − любое положительное число,

то $f(t - \theta) \risingdotseq e^{-p\theta} F(p)$,

т.е. запаздывание оригинала на положительную величину θ равносильно умножению изображения на $e^{-p\theta}$. Свойство запаздывания удобно применять для отыскания изображений функций, которые на разных интервалах задаются различными аналитическими выражениями.

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и существуют $f'(t), f''(t),..., f^{(n)}(t)$, и все они тоже являются оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq F(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$f'''(t) \risingdotseq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

6. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t), F''(p) \risingdotseq (-1)^2 t^2 f(t), \ldots, F^n(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t),$$

т.е. дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на величину $(-t)$.

Используя определение преобразования Лапласа и его свойства, можно доказать справедливость операционных соотношений, приведенных в следующей таблице:

№	Оригинал	Изображение	№	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	6	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	7	$sh\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$ch\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$

Задание 1. Найти изображения следующих оригиналов, используя

1) свойства преобразования Лапласа;

2) средства системы Maple (только пункты а), б) и г)).

а) $f(t) = 2 - 3t^2 + 4\cos t$; б) $f(t) = e^t t$; в) $f(t) = 5(t-7)^4$; г) $f(t) = t\sin 2t$.

Решение. 1. Найдем изображения, используя свойства преобразования Лапласа.

а. Используя табличные соотношения $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$, $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$ и свойство линейности, получаем

$$2 - 3t^2 + 4\cos t \risingdotseq 2\cdot\frac{1}{p} - 3\cdot\frac{2}{p^3} + 4\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2+1}.$$

б. Используя табличное соотношение $t \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} \frac{1}{p^2}$ и свойство смещения $(\alpha = 1)$, получаем $e^t t \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} \frac{1}{(p-1)^2}$.

в. Используя табличное соотношение $t^4 \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} \frac{4!}{p^{4+1}} = \frac{24}{p^5}$ и свойства запаздывания $(\theta = 7)$ и линейности, получаем $2(t-7)^4 \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} 2e^{-7p}\frac{24}{p^5} = e^{-7p}\frac{48}{p^5}$.

г. Используя табличное соотношение $\sin 2t \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} \frac{2}{p^2+4}$ и свойство дифференцирования изображения, получаем

$$t\sin 2t \mathrel{\bullet\!\!=\!\!\bullet} (-1)\cdot\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' = \frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

2. Найдем изображения, используя средства системы Maple.

```
> with(inttrans);
> laplace(2-3*t^2+4*cos(t),t,p);
```

$$\frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2+1}$$

```
> laplace(exp(t)*t,t,p);
```

$$\frac{1}{(p-1)^2}$$

```
> laplace(t*sin(2*t),t,p);
```

$$\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}$$

Задание 2. Найти оригиналы по их изображениям, используя
1) свойства преобразования Лапласа;
2) средства системы Maple.

а) $F(p) = \frac{p-7}{p^2-2p-3}$; б) $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p+2}$; в) $F(p) = e^{-3p}\frac{1}{p^2+7}$.

Решение. 1. Найдем оригиналы, используя свойства преобразования Лапласа.

а. Представим изображение в виде суммы простых дробей:

$$\frac{p-7}{p^2-2p-3} = \frac{p-7}{(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3} = \frac{A(p-3)+B(p+1)}{(p+1)(p-3)} \Rightarrow$$

$$p-7 = A(p-3) + B(p+1).$$

Для нахождения A и B составим систему:

$$\left.\begin{aligned} p=-1:&\quad -4A=-8 \\ p=3:&\quad 4B=-4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A&=2 \\ B&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, $\dfrac{p-7}{p^2-2p-3}=\dfrac{2}{p+1}-\dfrac{1}{p-3}$.

Используя табличные соотношения $\dfrac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}$ и $\dfrac{1}{p-3}\risingdotseq e^{3t}$, и свойство линейности, получаем $\dfrac{2}{p+1}-\dfrac{1}{p-3}\risingdotseq 2e^{-t}-e^{3t}$.

б. Представим изображение в виде:

$$\frac{p+1}{p^2-p+2}=\frac{p+1}{\left(p^2-2p\,{}^1\!/_2+{}^1\!/_4\right)-{}^1\!/_4+2}=\frac{p+1}{\left(p-{}^1\!/_2\right)^2+{}^7\!/_4}=\frac{\left(p-{}^1\!/_2\right)+{}^1\!/_2+1}{\left(p-{}^1\!/_2\right)^2+{}^7\!/_4}=$$

$$=\frac{p-{}^1\!/_2}{\left(p-{}^1\!/_2\right)^2+\left({}^{\sqrt{7}}\!/_2\right)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{{}^{\sqrt{7}}\!/_2}{\left(p-{}^1\!/_2\right)^2+\left({}^{\sqrt{7}}\!/_2\right)^2}.$$

Используя табличные соотношения $\dfrac{p}{p^2+\left({}^{\sqrt{7}}\!/_2\right)^2}\risingdotseq\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}t$,

$\dfrac{{}^{\sqrt{7}}\!/_2}{p^2+\left({}^{\sqrt{7}}\!/_2\right)^2}\risingdotseq\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}t$, свойства смещения $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)$ и линейности, получаем

$$f(t)=e^{\frac{1}{2}t}\cdot\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot e^{\frac{1}{2}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t.$$

в. Так, как $\dfrac{1}{p^2+7}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{p^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\risingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sin\sqrt{7}t$, то, используя свойство запаздывания $(\theta=3)$, получаем $e^{-3p}\cdot\dfrac{1}{p^2+7}\risingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sin\sqrt{7}(t-3)$.

2. Найдем оригиналы, используя средства системы Maple.

```
> with(inttrans);
> invlaplace((p-7)/(p^2-2*p-3),p,t);
```

$$-e^{(3t)}+2e^{(-t)}$$

```
> invlaplace((p+1)/(p^2-p+2),p,t);
```

$$e^{\left(\frac{1}{2}t\right)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)+\frac{3}{7}\sqrt{7}e^{\left(\frac{1}{2}t\right)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)$$

```
> invlaplace(exp(-3*p)*(1/(p^2+7)),p,t);
```

$$\frac{1}{7}\mathit{Heaviside}(t-3)\sin(\sqrt{7}(t-3))\sqrt{7}$$

2.3 Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad (2.1)$$

и начальные условия: $y(0) = C_0, y'(0) = C_1.$ (2.2)

Будем считать, что искомая функция $y(t)$, ее производные $y'(t), y''(t)$ и функция $f(t)$ являются оригиналами и $y(t) \risingdotseq Y(p), f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - C_0$, $y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - pC_0 - C_1$. Далее, воспользовавшись свойством линейности оригинала, вместо дифференциального уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) получим операторное уравнение:

$$a_2\left(p^2 Y(p) - pC_0 - C_1\right) + a_1\left(pY(p) - C_0\right) + a_0 Y(p) = F(p).$$

Разрешим его относительно $Y(p)$:

$$Y(p)\left(a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right) = F(p) + C_0\left(a_2 p + a_1\right) + C_1 a_2,$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + C_0\left(a_2 p + a_1\right) + C_1 a_2}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Если теперь по изображению $Y(p)$ найдем оригинал $y(t)$, то это и будет искомое частное решение.

Задание 1. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 4e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2.$

Решение. Пусть искомое решение $y(t)$ − оригинал и $Y(p)$ − его изображение. Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем:

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p),\ y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2 \Rightarrow$$

$$y'' - 2y' + y \risingdotseq p^2 Y(p) - 2 - 2pY(p) + Y(p) = Y(p)(p^2 - 2p + 1) - 2.$$

Так как $4e^t \risingdotseq \dfrac{4}{p-1}$, операторное уравнение имеет вид $Y(p)(p^2 - 2p + 1) - 2 = \dfrac{4}{p-1}$ или $Y(p)(p-1)^2 = \dfrac{4}{p-1} + 2$, $Y(p)(p-1)^2 = \dfrac{2p+2}{p-1}$.

Из полученного уравнения найдем $Y(p)$: $Y(p) = \dfrac{2p+2}{(p-1)^3}$.

Представим $Y(p)$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{2p+2}{(p-1)^3} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{(p-1)^3} = \frac{A(p-1)^2 + B(p-1) + C}{(p-1)^3} \Rightarrow$$

$$2p + 2 = A(p-1)^2 + B(p-1) + C.$$

Для нахождения A, B и C составим систему:

$$\left.\begin{array}{l} p=1: \qquad\quad C=4 \\ p=0: A-B+C=2 \\ p=2: A+B+C=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=4 \end{array}\right\}.$$

Таким образом, $Y(p)=\dfrac{2p+2}{(p-1)^3}=\dfrac{2}{(p-1)^2}+\dfrac{4}{(p-1)^3}$. Но $\dfrac{1}{p^2} \risingdotseq t$, $\dfrac{2}{p^3} \risingdotseq t^2$, поэтому по свойству смещения $\dfrac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq e^t t$, $\dfrac{2}{(p-1)^3} \risingdotseq e^t t^2$. Следовательно, искомое решение

$$y(t)=2e^t t+2e^t t^2=2e^t(t+t^2).$$

Данное дифференциальное уравнение можно решить средствами системы Maple с использованием преобразования Лапласа.

```
> ur:=diff(y(t),t$2)-2*diff(y(t),t)+y(t)=4*exp(t);
```

$$ur:=\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)-2\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)+y(t)=4e^t$$

```
> dsolve({ur,y(0)=0,D(y)(0)=2},y(t),method=laplace);
```

$$y(t)=2(t+t^2)e^t$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом проводится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{21}x+a_{22}y, \end{cases} \quad x(0)=c_1, y(0)=c_2,$$

где a_{ij}, c_1, c_2- постоянные. Пусть искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами и $X(p), Y(p)$ - их изображения. Тогда $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=$ $=pX(p)-c_1$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-c_2$ и система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} pX(p)-c_1=a_{11}X(p)+a_{12}Y(p) \\ pY(p)-c_2=a_{21}X(p)+a_{22}Y(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-a_{11})X(p)-a_{12}Y(p)=c_1 \\ -a_{21}X(p)+(p-a_{22})Y(p)=c_2. \end{cases}$$

Таким образом, для изображений $X(p)$ и $Y(p)$ получили линейную систему алгебраических уравнений, которую можно решить, например, по формулам Крамера. Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p-a_{22} \end{vmatrix}=(p-a_{11})(p-a_{22})-a_{12}a_{21}.$$

Вычислим определители Δ_X и Δ_Y:

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} c_1 & -a_{12} \\ c_2 & p-a_{22} \end{vmatrix}=c_1(p-a_{22})+c_2a_{12},\ \Delta_Y=\begin{vmatrix} p-a_{11} & c_1 \\ -a_{21} & c_2 \end{vmatrix}=c_2(p-a_{11})+c_1a_{21}.$$

По формулам Крамера получаем $X(p)=\dfrac{\Delta_X}{\Delta}, Y(p)=\dfrac{\Delta_Y}{\Delta}$. Осталось найти соответствующие оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$.

Задание 2. Решить систему дифференциальных уравнений, удовлетворяющую заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} x'=5x+8y, \\ y'=3x+3y, \end{cases} \qquad x(0)=0, y(0)=5.$$

Решение. Пусть искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ − оригиналы и $X(p), Y(p)$ − их изображения. Тогда $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)= = pY(p)-5$ и система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} pX(p)=5X(p)+8Y(p), \\ pY(p)-5=3X(p)+3Y(p), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-5)X(p)-8Y(p)=0, \\ -3X(p)+(p-3)Y(p)=5. \end{cases}$$

Решим последнюю систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-5 & -8 \\ -3 & p-3 \end{vmatrix}=(p-5)(p-3)-24=p^2-8p-9,$$

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 5 & p-3 \end{vmatrix}=40, \quad \Delta_Y=\begin{vmatrix} p-5 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=5(p-5).$$

Тогда $X(p)=\dfrac{\Delta_X}{\Delta}=\dfrac{40}{p^2-8p-9}$, $Y(p)=\dfrac{\Delta_Y}{\Delta}=\dfrac{5p-25}{p^2-8p-9}$. Найдем соответствующие оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$.

$$X(p)=\frac{40}{p^2-8p-9}=\frac{40}{(p-9)(p+1)}=\frac{4}{p-9}-\frac{4}{p+1} \fallingdotseq 4e^{9t}-4e^{-t},$$

$$Y(p)=\frac{5p-25}{p^2-8p-9}=\frac{2}{p-9}+\frac{3}{p+1} \fallingdotseq 2e^{9t}+3e^{-t}.$$

Таким образом, $x(t)=4e^{9t}-4e^{-t}$, $y(t)=2e^{9t}+3e^{-t}$.

Данную систему дифференциальных уравнений можно решить средствами системы Maple с использованием преобразования Лапласа.

```
> with(inttrans);
> sys:=diff(x(t),t)=5*x(t)+8*y(t),diff(y(t),t)=3*x(t)+3*y(t);
```

$$sys := \frac{d}{dt}x(t)=5x(t)+8y(t), \frac{d}{dt}y(t)=3x(t)+3y(t)$$

```
> fcns:={x(t), y(t)};
```

$$fcns := \{x(t), y(t)\}$$

```
> dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=5},fcns,laplace);
```

$$\left\{x(t)=4e^{(9t)}-4e^{(-t)}, y(t)=2e^{(9t)}+3e^{(-t)}\right\}$$

Задания для самостоятельного решения по теме 2

Практическая работа № 2.1

Проверить, какие из этих функций являются функциями-оригиналами:

1. а) $f(t)=\dfrac{10t}{t-7}$, б) $f(t)=5\sin 5t$, в) $f(t)=2t^2$, г) $f(t)=\dfrac{2}{t^2+2}$;

2. а) $f(t)=\dfrac{t}{2t-4}$, б) $f(t)=2^t$, в) $f(t)=3t^3$, г) $f(t)=\dfrac{10}{t+7}$;

3. а) $f(t)=\dfrac{t}{t-15}$, б) $f(t)=3\cos 2t$, в) $f(t)=5t$, г) $f(t)=\dfrac{3}{t^2+2}$;

4. а) $f(t)=\dfrac{10}{t-5}$, б) $f(t)=e^{3t}\sin t$, в) $f(t)=6t^4$, г) $f(t)=\dfrac{8}{t+4}$;

5. а) $f(t)=\dfrac{2t}{t-3}$, б) $f(t)=4^t$, в) $f(t)=10t^2$, г) $f(t)=\dfrac{1}{t^3+1}$;

6. а) $f(t)=\dfrac{t+4}{t-4}$, б) $f(t)=7e^{6t}\sin 2t$, в) $f(t)=t$, г) $f(t)=\dfrac{10}{t^4+5}$;

7. а) $f(t)=\dfrac{7t^2}{t-1}$, б) $f(t)=-3e^t\cos 5t$, в) $f(t)=4t^3$, г) $f(t)=\dfrac{6}{t+3}$;

8. а) $f(t)=\dfrac{2t^2+1}{t-7}$, б) $f(t)=\sin^2 4t$, в) $f(t)=t^3$, г) $f(t)=\dfrac{12}{t^2+4}$;

9. а) $f(t)=\dfrac{4t}{5t-10}$, б) $f(t)=3\sin t\cos 4t$, в) $f(t)=8t^5$, г) $f(t)=\dfrac{2}{t^3+1}$;

10. а) $f(t)=\dfrac{t+3}{t-3}$, б) $f(t)=3^t$, в) $f(t)=7t$, г) $f(t)=\dfrac{15}{t+5}$;

Практическая работа № 2.2

1. Найти изображения следующих оригиналов, используя
1) свойства преобразования Лапласа;
2) средства системы Maple (только пункты а), б) и г)).

1.1 а) $f(t)=5-2t^3+7\sin 4t$, б) $f(t)=e^{2t}sh3t$, в) $f(t)=\cos(t-5)$, г) $f(t)=t\cos 3t$;

1.2 а) $f(t)=3e^{2t}-1-5t^4$, б) $f(t)=e^{3t}\sin 2t$, в) $f(t)=3sh(t-1)$, г) $f(t)=t^2\sin t$;

1.3 а) $f(t)=3+3t^2-4\cos 7t$, б) $f(t)=e^{-t}ch4t$, в) $f(t)=7\sin(t-2)$, г) $f(t)=tsh8t$;

1.4 а) $f(t)=8t^5+4\sin 2t-6$, б) $f(t)=e^{5t}t^2$, в) $f(t)=2ch(t-3)$, г) $f(t)=t\cos 8t$;

1.5 а) $f(t)=4-t^3+5ch3t$, б) $f(t)=e^{-4t}\sin t$, в) $f(t)=8\cos(t-5)$, г) $f(t)=t^2sh2t$;

1.6 а) $f(t)=-2+7t^2+4sht$, б) $f(t)=e^{-2t}\cos 5t$, в) $f(t)=5(t-1)^4$, г) $f(t)=t\sin 7t$;

1.7 а) $f(t)=7t^3-\cos\sqrt{5}t+10$, б) $f(t)=e^{6t}t^2$, в) $f(t)=5\sin(t-8)$, г) $f(t)=tch5t$;

1.8 а) $f(t)=25-6t^4-4\sin t$, б) $f(t)=e^{-7t}sht$, в) $f(t)=7(t-4)^2$, г) $f(t)=t\cos 9t$;

1.9 а) $f(t)=5t^2-4e^{-t}-3$, б) $f(t)=e^{-3t}\cos t$, в) $f(t)=9ch(t-2)$, г) $f(t)=t^2\sin 3t$;

1.10 а) $f(t)=11+t^5+7sh3t$, б) $f(t)=e^{8t}\sin 3t$, в) $f(t)=10\cos(t-9)$, г) $f(t)=tch2t$.

2. Найти оригиналы по заданному изображению, используя

1) свойства преобразования Лапласа;

2) средства системы Maple.

2.1 а) $F(p)=\dfrac{p+21}{p^2+2p-15}$, б) $F(p)=\dfrac{2p+4}{p^2+p+3}$, в) $F(p)=e^{-2p}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$;

2.2 а) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-3p-4}$, б) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2+2p+8}$, в) $F(p)=e^{-p}\cdot\dfrac{p}{p^2+2}$;

2.3 а) $F(p)=\dfrac{6}{p^2-4p-5}$, б) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$, в) $F(p)=e^{-3p}\cdot\dfrac{1}{p^2-4}$;

2.4 а) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-3p+2}$, б) $F(p)=\dfrac{2p-6}{p^2-p+5}$, в) $F(p)=e^{-2p}\cdot\dfrac{p}{p^2-3}$;

2.5 а) $F(p)=\dfrac{5p-3}{p^2-6p-7}$, б) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+p+4}$, в) $F(p)=e^{-p}\cdot\dfrac{1}{p^2-2}$;

2.6 а) $F(p)=\dfrac{p+8}{p^2+p-2}$, б) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+4p+5}$, в) $F(p)=e^{-5p}\cdot\dfrac{2}{p^2+9}$;

2.7 а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+p}$, б) $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2+p+7}$, в) $F(p)=e^{-4p}\cdot\dfrac{p}{p^2-9}$;

2.8 а) $F(p)=\dfrac{5p-10}{p^2-7p+6}$, б) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-4p+6}$, в) $F(p)=e^{-7p}\cdot\dfrac{2}{p^2+2}$;

2.9 а) $F(p)=\dfrac{p-8}{p^2-7p+12}$, б) $F(p)=\dfrac{p+10}{p^2+p+8}$, в) $F(p)=e^{-p}\cdot\dfrac{p}{p^2-1}$;

2.10 а) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-3p}$, б) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+6p+10}$, в) $F(p)=e^{-8p}\cdot\dfrac{1}{p^2+5}$.

Практическая работа № 2.3

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях.

1. а) $y''-9y'+20y=30e^t, y(0)=2, y'(0)=4$,
   б) $y''-2y'-3y=65\sin 2x, y(0)=0, y'(0)=2$;
2. а) $y''-12y'+36y=0{,}5e^{-2t}, y(0)=1, y'(0)=4$,
   б) $y''-3y'+2y=10\cos x, y(0)=0, y'(0)=1$;
3. а) $y''-8y'+17y=10e^{2t}, y(0)=1, y'(0)=2$,
   б) $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x, y(0)=0, y'(0)=13$;
4. а) $y''+16y=16e^{4t}, y(0)=0, y'(0)=4$,
   б) $y''+2y'=8\sin 2x, y(0)=0, y'(0)=2$;

5. а) $y'' - 4y' + 4y = \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0,$

б) $y'' - y' = \cos t + \sin t, y(0) = 1, y'(0) = 1;$

6. а) $y'' + 3y' = 10 - 6t, y(0) = 0, y'(0) = 0,$

б) $y'' - y' - 6y = 50\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 5;$

7. а) $y'' - 4y' + 20y = 17e^t, y(0) = 0, y'(0) = 3,$

б) $y'' + 5y' + 6y = 50\sin 4t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$

8. а) $y'' - 10y' + 25y = e^{5t}, y(0) = 1, y'(0) = 0,$

б) $y'' - 4y' = 17\cos t + 17\sin t, y(0) = 0, y'(0) = 3;$

9. а) $y'' + 4y' = 15e^t, y(0) = 0, y'(0) = 7,$

б) $y'' + 4y = 3\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 2;$

10. а) $y'' + y' = 2t + 1, y(0) = 0, y'(0) = 1,$

б) $y'' - 4y' + 4y = 2\cos 2t + 4\sin 2t, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Практическая работа № 2.4

Решить систему дифференциальных уравнений, удовлетворяющую заданным начальным условиям.

1. $\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 0, \\ y' = x + y, & y(0) = 1; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = 7x + 3y & x(0) = 4, \\ y' = x + 5y, & y(0) = 0; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = x + 4y & x(0) = 2, \\ y' = 4x + y, & y(0) = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - 5y & x(0) = 0, \\ y' = x + y, & y(0) = 1; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x' = 5x - y & x(0) = 2, \\ y' = -x + 5y, & y(0) = 4; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = 6x - 4y & x(0) = 3, \\ y' = 4x - 16y, & y(0) = 0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 12x - 3y & x(0) = 0, \\ y' = -3x + 4y, & y(0) = 10; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = x + 5y & x(0) = 0, \\ y' = -x - 5y, & y(0) = -4; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x - 2y & x(0) = 2, \\ y' = 3x + y, & y(0) = 0; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y & x(0) = 2, \\ y' = 3x + 2y, & y(0) = 4. \end{cases}$

ТЕМА 3. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1 Марковские процессы с конечным числом состояний и непрерывным временем

Пусть S − некоторая система, которая может находиться в одном из состояний S_1, S_2, . . . S_n, а переход из одних состояний в другие может происходить случайным образом в призвольные моменты времени. В таком случае говорят о **случайном процессе с непрерывным временем**. Говорят, что в системе S отсутствует последействие, если вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, в каких состояниях система находилась до того, как попала в состояние S_i. Непрерывный случайный процесс с отсутствием последействия называют **непрерывной марковской цепью**.

Плотностью вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j называется функция $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}$, где $p_{ij}(t)$ − вероятность того, что до момента времени t произойдет переход из S_i в S_j. Если величины $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$ не зависят от t, то марковский процесс называется **однородным**. Величину λ_{ij} называют **интенсивностью перехода** системы из S_i в S_j.

Переходы системы S в различные состояния удобно обозначать с помощью графа состояний (см. рис. 3.1).

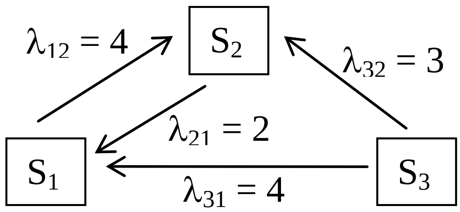


Рисунок 3.1

На рис. 3.1 вершины графа S_1, S_2, S_3 обозначают три различных возможных состояния системы S. Стрелка, направленная из вершины S_i в вершину S_j обозначает переход $S_i \to S_j$. Рядом со стрелками ставят численные значения λ_{ij}.

Состояния S_i и S_j называются **сообщающимися,** если возможны переходы как из S_i в S_j так и из S_j в S_i. (на рис. 3.1 сообщающимися являются состояния S_1 и S_2, пары S_1, S_3 и S_2 и S_3 такими не являются).

Состояние S_i называется **существенным,** если всякое S_j, достижимое из S_i является сообщающимся с S_i. Состояние S_i называется **несущественным,** если оно не является существенным (на рис. 3.1 существенными являются S_1 и S_2).

Обозначим $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ − верятности нахождения системы S в состояних S_1, S_2, ... , S_n сответственно в момент времени t. При этом $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t) = 1$.

Говорят, что при $t \to \infty$ в системе устанавливается **стационарный режим**, если существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j, \quad (j = 1,\dots,n)$. (3.1)

Числа p_j называются **предельными (финальными)** вероятностями.

Теорема 1. Если S_i − существенное состояние, то $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = 0$, то есть при $t \to \infty$ система выходит из любого несущественного состояния.

Теорема 2. Система с конечным числом состояний имеет **единственное предельное распределение** вероятностей состояний p_1, p_2, ..., p_n тогда и только тогда, когда все ее существенные состояния являются сообщающимися между собой (система на рис.3.1 удовлетворяет этой теореме, т.к. существенные состояния S_1 и S_2 сообщаются между собой).

Для вероятностей $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ можно составить систему дифференциальных уравнений, называемых **уравнениями Колмогорова.** При составлении уравнений удобно пользоваться графом состояний системы. При этом используют следующее общее **правило** записи j-го уравнения:

1) в левой части уравнения записываем производную $p_j'(t)$;

2) в правой части уравнения:

а) со знаком (+) записываем произведения $\lambda_{kj} p_k$ для стрелок, <u>входящих в</u> S_j;

б) со знаком (−) записываем произведения $\lambda_{jk} p_j$ для стрелок, <u>выходящих из</u> S_j.

К построенным трем уравнениям добавим нормирующее уравнение $p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_n(t) = 1$.

Для системы, изображенной на рис..31 система уравнений Колмогорова запишется следующим образом

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t) + \lambda_{31} p_3(t) \\ p_2'(t) = \ \ \lambda_{12} p_1(t) - \lambda_{21} p_2(t) + \lambda_{32} p_3(t) \\ p_3'(t) = \qquad\qquad\qquad -\left(\lambda_{31} + \lambda_{32}\right) p_3(t) \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Решение системы (3.2) очень громоздко, да и, в ряде случаев, не является необходимым, поскольку реальные системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования. Решение же для стационарного режима оказывается простым. Найдем финальные вероятности p_1, p_2, p_3.

В систему (3.2) подставим вместо $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ числа p_1, p_2, p_3, из пределов (3.1). При этом $p_1' = 0,\ p_2' = 0,\ p_3' = 0$. Получим

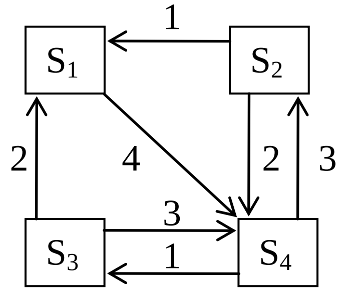
$$\begin{cases} p_1 + \quad p_2 + \quad p_3 = 1 \\ -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{21} p_2 + \lambda_{31} p_3 = 0 \\ \lambda_{12} p_1 - \lambda_{21} p_2 + \lambda_{32} p_3 = 0 \\ -\left(\lambda_{31} + \lambda_{32}\right) p_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + \ p_2 + \ p_3 = 1 \\ -p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 0 \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 = 0 \\ -7p_3 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Получим $p_1 = \dfrac{2}{3},\ p_2 = \dfrac{1}{3},\ p_3 = 0$.

Задание 1. Рассматривается система S с дискретными состояниями S_1, S_2, S_3, S_4 и непрерывным временем. Задан размеченный граф состояний и заданы интенсивности переходов λ_{ij}. Требуется:

1) составить систему уравнений Колмогорова для вероятностей $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$;

2) составить систему линейных уравнений для финальных вероятностей p_1, p_2, p_3, p_4;



3) записать расширенную матрицу A линейной системы, с помощью команд пакета Maple привести ее к простейшему виду и найти p_1, p_2, p_3, p_4 (командные строки даны далее);

4) записать вывод о процентном распределении времени нахождения системы S в состояниях S_1, S_2, S_2, S_4 после вхождения ее в стационарный режим.

Решение. 1. Для составления системы уравнений Колмогорова используем указанное ранее правило. Левая часть 1-го уравнения– производная $p_1'(t)$. Составляем его правую часть. Выходящей из S_1 стрелке $S_1 \xrightarrow{\lambda_{14}=4} S_4$ ставим в соответствие слагаемое со знаком "минус" $(-1)\cdot\lambda_{14}p_1(t) = -4p_1(t)$.

По входящим в S_1 стрелкам запиваем слагаемые со знаком "плюс": $S_2 \xrightarrow{\lambda_{21}=1} S_1 \Rightarrow \lambda_{21}p_2(t) = p_2(t)$, $S_3 \xrightarrow{\lambda_{31}=2} S_1 \Rightarrow \lambda_{31}p_3(t) = 2p_3(t)$.

Так как из вершины S_4 нет стрелки, входящей в S_1, то $\lambda_{41}p_4(t) = 0\cdot 2p_4(t) = 0$. В результате получим уравнение

$$p_1'(t) = -4p_1(t) + p_2(t) + 2p_3(t).$$

Аналогично по каждой из вершин S_2, S_2, S_4 получим уравнения

$$p_2'(t) = -3p_2(t) + 3p_4(t),$$

$$p_3'(t) = -5p_3(t) + p_4(t),$$

$$p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t).$$

К построенным трем уравнениям добавим нормирующее уравнение $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$. В результате получим систему д.у. Колмогорова:

$$\begin{cases} 1 = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \\ p_1'(t) = -4p_1(t) + p_2(t) + 2p_3(t) \\ p_2'(t) = -3p_2(t) + 3p_4(t) \\ p_3'(t) = -5p_3(t) + p_4(t) \\ p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t) \end{cases}$$

2. При t $\to \infty$ в системе устанавливается стационарный режим и $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$ для всех j = 1, 2, 3, 4, причем $\lim\limits_{t\to\infty} p_j'(t) = 0$. Из системы Колмогорова получим систему линейных уравнений для финальных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ -4p_1 + p_2 + 2p_3 = 0 \\ -3p_2 + 3p_4 = 0 \\ -5p_3 + p_4 = 0 \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 4p_4 = 0 \end{cases}$$

с расширенной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. В пакете Maple записываем **команды**

```
>restart: with(linalg):     A:=matrix(5,5,[[1,1,1,1,1],
[-4,1,2,0,0],[0,- 3,0,3,0],[0,0,-5,1,0],[4,2,3,-4,0]]);
rangA:=rank(A); Q:=rref(A); P:=col(Q,5);
for i from 1 to rangA do print(p[i]=P[i]) end do;
for i from 1 to rangA do print(p[i]=P[i]*1.0) end do;
```

(здесь **rank(A)** – ранг матрицы A, **rref(A)** – приведение матрицы A к простейшему Жордановому виду; **col(Q,5)**– выделение 5-го столбца из матрицы Q)

На выходе получим $p_1 = \dfrac{7}{51},\ p_2 = \dfrac{20}{51},\ p_3 = \dfrac{4}{51},\ p_4 = \dfrac{20}{51}$, или в десятичном виде $p_1 = 0.137\ldots$, $p_2 = 0.392\ldots$, $p_3 = 0.078\ldots$, $p_4 = 0.392\ldots$.

4. После вхождения системы S в стационарный режим она будет находится в состояниях S_1, S_2, S_2, S_4 в среднем 14 %, 39 %, 8 %, 39 % времени соответственно.

3.2. Процессы рождения и гибели

В теории массового обслуживания широко распространен специальный класс случайных процессов – процессы рождения и гибели. Название это связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций. Граф состояний системы, в которой происходит такой процесс, изображен на рис. 3.2.

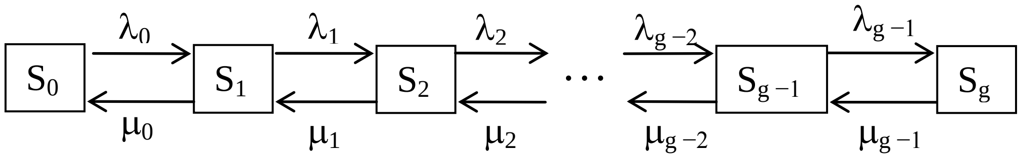


Рисунок 3.2

λ_0, λ_1, ... , λ_{g-1} – интенсивности переходов системы из состояния в состояние в направлении рождения (возникновения заявок). μ_0, μ_1, ... , μ_{g-1} – интенсивности переходов системы в направлении гибели (выполнения заявок).

Так как все состояния являются сообщающимися и существенными, то система удовлетворяет теореме 2 и имеет предельное (финальное) распределение вероятностей состояний p_1, p_2, ..., p_{g-1}.

По графу состояний системы S (рис.3.2) легко выписывается система уравнений Колмогорова, а из нее для финальных вероятностей система

$$
\begin{cases}
\lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1 \\
\lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2 \\
\quad \ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{g-1} p_{g-1} = \mu_{g-1} p_g \\
p_1 + p_2 + \ldots p_g = 1
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

(3.3) легко решается: $p_0 = \left(1 + \dfrac{\lambda_0}{\mu_0} + \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} + \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} + \ldots + \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{g-1}}{\mu_0\mu_1 \ldots \mu_{g-1}}\right)^{-1}$ (3.4)

$$
p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0; \quad p_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1}; \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} p_0; \quad p_g = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{g-1}}{\mu_0\mu_1 \ldots \mu_{g-1}} p_0 \tag{3.5}
$$

3.3 Основные понятия и классификация систем массового обслуживания. Простейший поток заявок

Во многих областях производства и экономики важную роль играют системы специального вида, в которых имеется поток требований (заявок), подлежащих обслуживанию, но ограниченность обслуживающих средств приводит к образованию очереди. Та часть системы, в которой возникают заявки, называется **обслуживаемой системой**, а та, которая принимает заявки и удовлетворяет их, − **обслуживающей**. Совокупность обслуживаемой и обслуживающей систем составляют **систему массового обслуживания** (СМО). Целью **теории массового обслуживания** (ТМО) является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО для обеспечения высокой эффективности ее работы.

Основоположником ТМО считается датский ученый А.К. Эрланг, который в 1909 году опубликовал работу “Теория вероятностей и телефонные переговоры”.

Примерами СМО могут служить: системы связи (в частности, телефонные станции), погрузочно-разгрузочные комплексы (порты, товарные станции), совокупность станков-автоматов (наладка и регулирование, загрузка заготовками и т.д.), автозаправочные станции, магазины, билетные кассы, ремонтные мастерские, больницы и т.д.

Во всякой СМО можно выделить основные элементы (см. рис 3.3):

1) входящий поток заявок; 2) очередь; 3) поток необслуженных заявок, покинувших очередь; 4) каналы обслуживания; 5) выходящий поток обслуженных заявок.

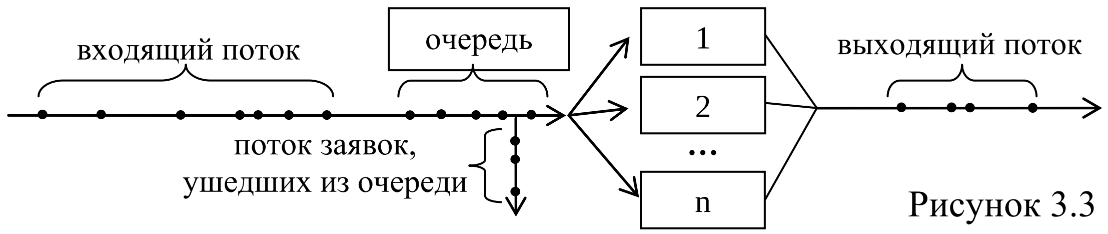


Рисунок 3.3

Входящий поток будем рассматривать как последовательность событий. Одно событие это поступление заявки. Поток заявок называется **простейшим**, если он удовлетворяет условиям:

1) отсутствие последействия, т.е. заявки поступают независимо друг от друга (поступление очередной заявки не зависит от того, сколько и когда заявок поступило прежде);

2) стационарность, т.е. вероятность появления ровно k заявок на отрезке времени $[t_0,\ t_0+\ \Delta t]$ зависит лишь от длины отрезка Δt и не зависит от начального момента t_0 ;

3) ординарность, т.е. в любой момент времени в СМО поступает лишь одна заявка, а поступление двух и более заявок одномоментно практически невозможно.

Обозначим $p_k(t)$ − вероятность поступления в СМО ровно k заявок за время t. Для простейшего потока эта вероятность равна $p_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, то есть вероятности распределены по закону Пуассона. По этой причине простейший поток называют также пуассоновским потоком.

Пусть T − случайный интервал времени между двумя последовательными заявками. Функция распределения величины T по определению равна $F(t)=P(T<t)$. С другой стороны, $P(T<t)+P(T\ge t)=1 \Rightarrow F(t)=1-P(T\ge t)=$ $=1-p_0(t)=1-e^{-\lambda t}$. Таким образом, $F(t)=1-e^{-\lambda t}$. Следовательно, время T между соседними заявками в простейшем потоке распределено по показательному закону с параметром λ.

Канал обслуживания − устройство в СМО, обслуживающее заявку. СМО может быть одноканальной или многоканальной.

В качестве **характеристик эффективности функционирования** СМО можно выбрать следующие показатели (параметры):

n − число каналов;

λ − интенсивность входного потока (для стационарного потока, среднее число поступающих заявок за единицу времени);

μ − интенсивность выходного потока (среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени одним каналом);

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ − коэффициент загрузки СМО (среднее число заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки);

$\bar{t}_{обсл}=\dfrac{1}{\mu}$ − среднее время обслуживания заявки;

m − число мест в очереди (если рассматривается СМО с очередью);

$p_{отк}$ − вероятность того, что заявка получит отказ;

$Q=1-p_{отк}$ − относительная пропускная способность (вероятность обслуживания поступившей заявки);

$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0\right)$ − абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в СМО за единицу времени);

$L_{\text{ОЧЕР}}$ − среднее число заявок, находящихся в очереди;

$L_{\text{ОБСЛ}}$ − среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени;

$L_{\text{СМО}} = L_{\text{ОЧЕР}} + L_{\text{ОБСЛУЖ}}$ − среднее число заявок, находящихся в СМО;

$\bar{n}_{\text{зан}}$ − среднее число занятых каналов;

$\bar{t}_{\text{ОЧЕР}} = \frac{L_{\text{ОЧЕД}}}{\lambda}$ − среднее время ожидания в очереди (для открытой СМО);

$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ОЧЕР}}}$ − интенсивность потока ухода из очереди;

$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{L_{\text{СМО}}}{\lambda} = \frac{L_{\text{ОЧЕР}}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}$ − среднее время пребывания заявки в СМО.

3.4 Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим СМО с n каналами обслуживания и без очереди. Если в ней все каналы заняты, то приходящая новая заявка получит отказ в обслуживании. Примером такой СМО может служить АТС. Размеченный граф состояний такой СМО изображен на рис. 3.4.

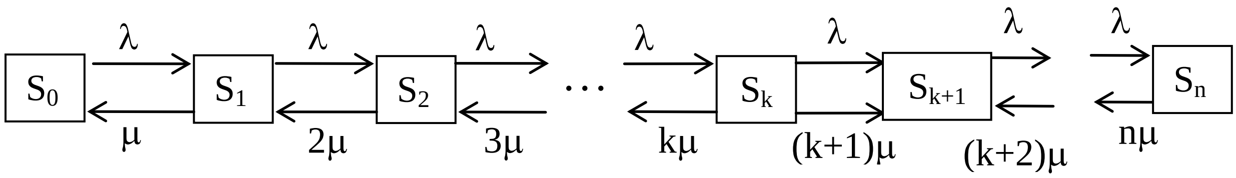


Рисунок 3.4

Состояние S_k означает, что обслуживанием заявок заняты k каналов. Переход $S_k \to S_{k+1}$ происходит под воздействием потока заявок интенсивностью λ (верхние стрелки). Для перехода $S_{k+1} \to S_k$ не важно, какой именно канал освободится. Величина $k\mu$ − интенсивность обслуживания при работе k каналов (нижние стрелки).

Сравнивая графы на рис.3.2 и на рис.3.4 легко видеть, что многоканальная СМО− частный случай системы рождения и гибели, если в последней принять $g = n,\ \lambda_k = \lambda,\ \mu_k = (k+1)\mu$. Из формул (3.4), (3.5) найдем финальные вероятности (распределение Эрланга)

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0, \quad k = 1,\ldots,n; \tag{3.6}$$

p_n − вероятность того, что все каналы заняты, следовательно, (3.7)

$p_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0$ − вероятность того, что заявка получит отказ; (3.8)

$$Q = p_{\text{обсл}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \text{ – относ. пропускная способность;} \quad (3.9)$$

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right) \text{ – абсолютная пропускная способность;} \quad (3.10)$$

$$\bar{n}_{\text{зан}} = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right) \text{ – среднее число занятых каналов,} \quad (3.11)$$

так как каждый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени.

Задание 2. На вход <u>многоканальной</u> СМО <u>с отказами</u> поступает простейший поток заявок, интенсивность которого составляет $\boldsymbol{\lambda}$ заявок в час. Среднее время обслуживания одной заявки равно $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}}$ ча́са. Каждая заявка приносит доход $\boldsymbol{S_1}$ у.е., а содержание одного канала обслуживания заявок обходится в $\boldsymbol{S_2}$ у.е. в час. Найти оптимальное число каналов обслуживания для получения максимального дохода и величину максимального дохода, если $\boldsymbol{\lambda}$=11 заявок в час**,** $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}}$= 0,15 часа, $\boldsymbol{S_1}$ =130 у.е., $\boldsymbol{S_2}$ = 122 у.е. в час**.**

Решение. Доход D = D(n) зависит от числа n обслуживающих каналов. Построим формулу D = D(n). Доход от обслуживания заявок в течение часа составит в среднем $D_1(n) = S_1 \cdot A$, где $A = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)$ – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО за единицу времени (см. (3.10)) .

Затраты на обслуживание в течение часа составят в среднем $D_2(n) = S_2 \cdot n$**.**

Следовательно, чистый доход СМО в течение часа составит в среднем $D(n) = D_1(n) - D_2(n) = S_1 \cdot A - S_2\ n$. Осталось найти величины, входящие в A: $\mu = 1/\bar{t}_{обсл} = 1/0{,}15$, $\rho = \lambda/\mu$. Далее по формуле (3.6) находим p_0 и p_n, а затем по формулам (3.9), (3.10) находим Q и A. Вычисления выполним в Maple.

Искомое оптимальное число каналов обслуживания <u>сперва зададим</u> $n = 1$.

Команды для Maple:

```
>restart:
lambda:=11: t_obsl:=0.15: S1:=130: S2:=122: n:=1:
mu:=1/t_obsl: rho:=lambda/mu:p0:=1/sum(rho^k/k!,k=0..n):
pn:=(rho^n/n!)*p0: A:=lambda*(1-pn): Dn:=S1*A-S2*n:
```

(Здесь `sum(rho^k/k!,k=0..n)` – команда суммирования)

Далее перебираем n = 1, 2, 3, … и наблюдаем за величиной дохода **Dn.**

Полученные данные заносим в таблицу.

n	1	2	3	**4**	5	6
Dn(у.е)	417	700	839	**854**	791	690

Сравнивая доходы, поступающие от СМО при различных n = 1, 2, …, замечаем, что при увеличении числа каналов от одного до четырех доход растет и при n = 4 становится наибольшим. При n>4 доход уменьшается, так как “лишние” каналы простаивают и начинают приносить убытки.

Ответ. Оптимальное число каналов $n = 4$ с доходом $D(n) = 854$ у.е. в час.

Задание 3. В фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интесивностью λ вызовов в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}}$ минут. Определить оптимальное число телефонов в фирме, при котором из каждых 100 заявок на переговоры будут удовлетворены в среднем не менее $\boldsymbol{a}$ заявок. λ = 90 вызовов в час, $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}} =$ 2 минуты, $\boldsymbol{a} = 90$.

Решение. По условию из каждых 100 заявок должны быть удовлетворены в среднем не менее $k = 90$ заявок, то есть не менее $(k\ /100) = 90\ \%$ заявок. Следовательно, вероятность обслуживания поступившей заявки не менне 0,9, то есть $Q \geq 0{,}9$. По формуле (3.9) $Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$. В условии $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}} = 2$ мин. Приведем $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}}$ к основной единице: $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}} = 2/60$ часа, $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$, $\rho = \lambda/\mu$. Вероятности p_0 и p_n находим из (3.6). Вычисления выполним в Maple.

Искомое оптимальное число каналов обслуживания сперва зададим $n = 1$.

Команды для Maple:

```
>restart;
lambda:=90: t_obsl:=2: a:=90: t_obsl:=t_obsl/60: n:=1:
mu:=1/t_obsl: rho:=lambda/mu: p0:=1/sum(rho^k/k!,k=0..n):
pn:=(rho^n/n!)*p0:Q:=(1-pn): Q:=Q*1.0; veroiatn:=a/100.0;
```

Далее перебираем $n = 1,2,3,...$ и следим за условием $\boldsymbol{Q} \geq$ **veroiatn=0,9** .

Полученные данные заносим в таблицу

n	1	2	3	4	5	**6**	7
Q	0,25	0,47	0.65	0.79	0.88	**0.94**	0.97

Сравнивая значения Q при различных $n = 1,2,3,\ldots$, видим, что при увеличении числа каналов числа Q растет и при $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$ впервые достигает значения $Q = \mathbf{0{,}94} \geq 0{,}9$. Следовательно, фирме нужно установить **6** телефонных номеров для выполнения поставленного условия.

Ответ. Оптимальное число телефонов $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$.

Задание 4. На вход многоканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ заявок в час. Среднее время обслуживания заявки равно $\bar{\mathbf{t}}_{\text{обсл}}$ минут. Время обслуживания распределено по показательному закону. Определить:

а) оптимальное число n каналов, при котором вероятность того, что заявка получит отказ, не больше α;

б) среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени в такой СМО;

в) среднее число каналов, занятых обслуживанием;

если λ= 12 заявок в час, $\bar{t}_{\text{обсл}}$ =12 минут, $\alpha = 0{,}07$.

Решение. Среднее время обслуживания заявки в часах $\bar{t}_{\text{обсл}} = \dfrac{12}{60}$ часа,

$\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обсл}}$, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $p_0 = 1\Big/\left(\dfrac{\rho^0}{0!} + \dfrac{\rho^1}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!}\right)$, $p_k = \dfrac{\rho^k}{n!} \cdot p_0$,для $k > 0$.

а. Вероятность того, что заявка получит отказ равна $p_{\text{отк}} = p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$.

Найдем число n из условия $p_{\text{отк}} \le \alpha = 0{,}07$, то есть $p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \le 0{,}07$.

Записываем программу на Maple:

```
>restart: lambda:=12: t_obsl:=12: alpha:=0.07: n:=1:
t_obsl:=t_obsl/60: mu:=1/t_obsl: rho:=lambda/mu:
p0:=1/sum(rho^k/k!,k=0..n): pn:=(rho^n/n!)*p0:
pn:=pn*1.0; alpha:=alpha;
```

Для удобства работы здесь только три команды закрываются точкой с запятой. Далее перебираем n =1,2,3,... и следим за условием **pn≤alpha:=0.07**. При увеличении числа каналов n вероятность $p_{\text{отк}} = p_n$ уменьшается. При $n = 4$ получим **pn** = 0.138... > 0,07, при $n = 5$ получим **pn** = 0. 062 < 0,07.

Таким образом, искомое оптимальное число каналов ***n* = 5.**

б. **С**реднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени, то есть абсолютная пропускная способность, равна $A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)$, $n = 5$.

в. **С**реднее число каналов, занятых обслуживанием $\bar{n}_{\text{зан}} = \dfrac{A}{\mu}$.

Дописываем формулы из б), в) в Maple - программу:

```
> A:=lambda*(1-pn); n_zan:=A/mu; t_SMO:=1.0/mu;
```

Получим **A**=11.25092569, $\bar{n}_{\text{зан}}$= **n_zan** = 2.250185138,

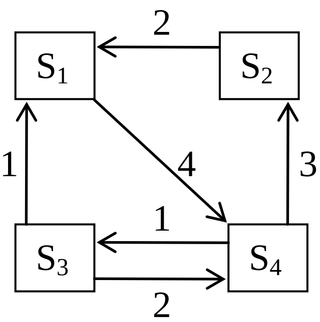
Ответ. Число каналов $n = 5$, среднее число заявок, обслуживаемых за час, равно 11, заняты обслуживанием в среднем 2 канала.

Задания для самостоятельного решения по теме 3

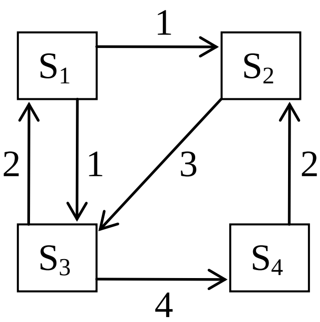
Практическая работа № 3.1

Решить **задание 1** с помощью пакета Maple. Данные к задаче взять из своего варианта.

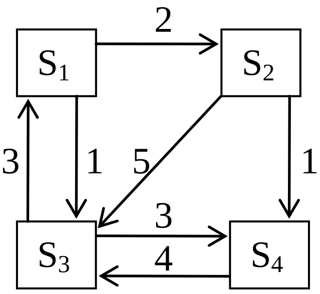
1)



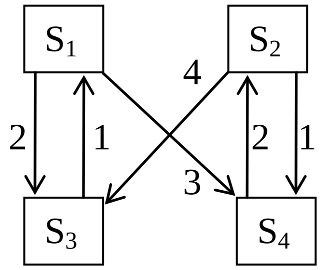
2)



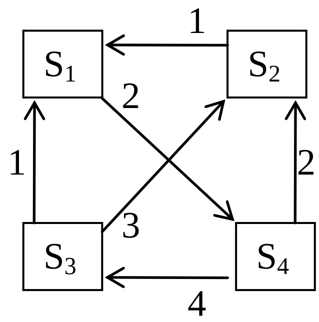
3)



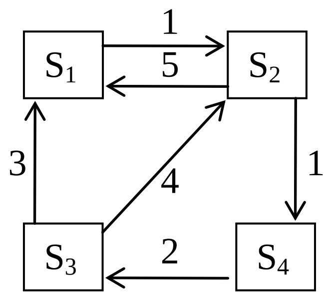
4)



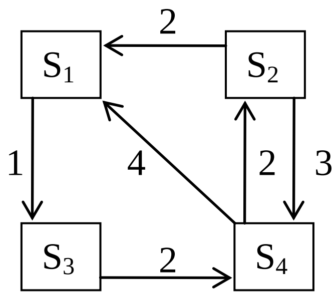
5)



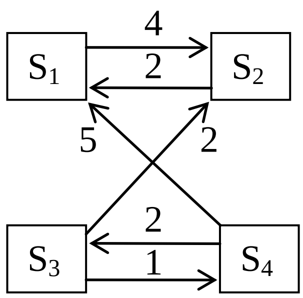
6)



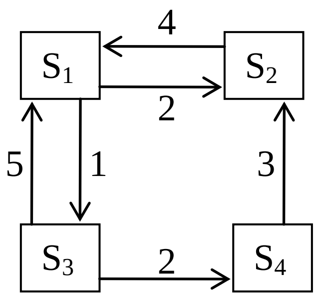
7)



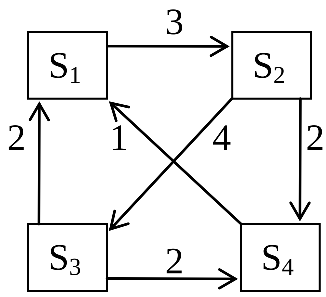
8)



9)



10)



Практическая работа № 3.2

Решить **задания 2, 3, 4** с помощью пакета Maple. Данные к задачам взять из своего варианта.

вар	Задание 2	Задание 3	Задание 4

	λ (в ч.)	$\bar{t}_{обсл}$ (часа)	S_1 (у.е.)	S_2 (у.е.)	λ (в час)	$\bar{t}_{обсл}$ (мин)	a	λ (в ч.)	$\bar{t}_{обсл}$ (мин)	α
1	19	0,23	150	145	80	1.5	85	18	14	0,05
2	15	0,18	139	137	56	2.3	95	15	12	0,08
3	12	0,25	124	115	75	1.0	80	19	10	0,04
4	17	0,19	151	149	94	1.6	95	14	18	0,06
5	15	0,27	132	126	38	3.0	90	9	12	0,03
6	21	0,21	132	131	95	2.5	95	12	15	0,02
7	9	0,32	125	118	75	3.0	80	17	14	0,03
8	18	0,12	150	154	65	2.5	97	16	12	0,04
9	17	0,20	145	133	83	3.3	95	10	30	0,07
10	21	0,24	122	121	55	1.8	85	13	15	0,09

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Наука, 1988. - 448 с.
2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – Москва : КомКнига, 2005. – 301 с.
3. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. школа, 1990. – 400 с.
4. Дьяконов, В. Maple 6. Учебный курс / В. Дьяконов. – Спб : Питер, 2001. – 603 с.
5. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – Москва.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
6. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. школа, 1976. – 256 с.
7. Сдвижков, О. А. Математика на компьютере: Maple 8 / О. А. Сдвижков. – Москва : СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
8. Чернов, В. П. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : Инфра-М, 2000. – 158 с.

СОДЕРЖАНИЕ