Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Теоретическая механика

Методические указания и контрольные задания
для студентов специальности
1-36 01 01 «Технология машиностроения»
заочной сокращенной формы обучения

ВИТЕБСК
2011

УДК 538. 8

Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» заочной сокращенной формы обучения.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО ”ВГТУ”, 2010.

Составители: профессор А.В. Локтионов
доцент Т.А. Мачихо

Методические указания содержат теоретический и практический материал, необходимый для выполнения контрольных работ студентами механических специальностей. Каждый тип задач сопровождается теоретическими комментариями и примером решения с подробными объяснениями.

Одобрено кафедрой механики УО “ВГТУ” 5 ноября 2010 г., протокол № 2.

Рецензент: профессор Б.С. Сункуев
Редактор: доцент А.М. Тимофеев

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” «___» ________ 2010 г., протокол № ___ .

Ответственный за выпуск: И.Л. Кудина

Подписано к печати _______ . Формат 60×90/16. Уч.- изд. лист. __________.
Печать ризографическая. Тираж _____ экз. Заказ №_____ Цена ____________.

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия 02330/0494384 от 16.03.2009.
210035, г. Витебск, Московский проспект, 72.

Содержание

Введение

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики необходимо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых второго порядка.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Особое внимание обратите на формулировки соответствующих определений, теорем. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами. Необходимо также понять ход всех доказательств и разобраться в их деталях. Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постараться решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И.В. Мещерского.

Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку). Приведены вопросы для проверки знаний студентов в компьютерных классах УО «ВГТУ» по разделам курса.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже (после рабочей программы). Кроме того, к каждой задаче даются методические указания по ее решению и приводится пример решения.

1 Рабочая программа

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики.

Основные понятия и аксиомы статики. Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние.

Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость или поверхность, гладкая опора, гибкая нить, цилиндрический и сферический шарниры, невесомый стержень; реакции этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрические и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.

Равновесие произвольной системы сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил; момент пары. Свойства пары сил. Понятие о приведении системы сил к заданному центру. Главный вектор и главный момент системы сил. Условия равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу.

Система сил, расположенных на плоскости (плоская система сил). Алгебраическая величина момента силы. (Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил.) Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. (Равновесие системы тел.)

Система сил, расположенных в пространстве (пространственная система сил). Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

Центр тяжести. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести.

КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная от ее радиус-вектора по времени.

Ускорение точки как производная от вектора скорости по времени. Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Оси естественного трехгранника. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника: касательное и нормальное ускорения точки.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное и вращательное движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вектор угловой скорости тела. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса; независимость угловой скорости фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Сложное (составное) движение точки. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений при переносном поступательном и переносном вращательном движениях; кориолисово ускорение и его вычисление.

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях силы, зависящей от времени, от положения точки и от ее скорости.

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Вынужденные колебания точки при гармонической возмущающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости. Резонанс.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Момент инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра, круглого диска или сплошного круглого цилиндра.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и в конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и в конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения точки.

Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении тела. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Принцип Даламбера. Принцип возможных перемещений. Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Возможные или виртуальные перемещения точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения Лагранжа. Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.

2 Вопросы по курсу «Теоретическая механика» для подготовки к экзамену

1. Аксиомы статики.
2. Связи и их реакции.
3. Теорема о проекции равнодействующей силы на ось.
4. Сходящиеся силы. Геометрические и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.
5. Пара сил. Момент пары сил. Свойства пары сил. Условия равновесия системы пар.
6. Момент силы относительно точки (центра). Изображение момента силы относительно точки в виде вектора.
7. Теорема о параллельном переносе силы (Лемма Пуансо).
8. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил.
9. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
10. Аналитические условия равновесия плоской системы сил.
11. Момент силы относительно оси.
12. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр.
13. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
14. Предмет кинематики. Задача кинематики.
15. Способы задания движения точки. Траектория точки.

16. Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания ее движения.
17. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения.
18. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания ее движения.
19. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.
20. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела.
21. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Вектор угловой скорости и углового ускорения тела.
22. Скорость и ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
23. Абсолютное и относительное движение точки; переносное движение. Абсолютная, относительная и переносная скорости и ускорения точки.
24. Теорема сложения скоростей.
25. Теорема сложения ускорений.
26. Ускорение Кориолиса и его вычисление.
27. Плоское движение твердого тела. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения.
28. Определение скорости точек плоской фигуры.
29. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры.
30. Мгновенный центр скоростей (МЦС). Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС.
31. Предмет динамики. Основные законы динамики. Две основные задачи динамики.
32. Дифференциальные уравнения движения свободной (и несвободной) материальной точки.
33. Первая и вторая задачи динамики материальной точки. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение.
34. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему. Свойство внутренних сил.
35. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
36. Теорема о движении центра масс механической системы.
37. Закон сохранения движения центра масс.
38. Количество движения материальной точки и механической системы.
39. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени.
40. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и конечной формах.

41. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах.
42. Закон сохранения количества движения механической системы.
43. Момент количества движения материальной точки.
44. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.
45. Закон сохранения момента количества движения материальной точки.
46. Главный момент количества движения механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
47. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.
48. Закон сохранения кинетического момента механической системы.
49. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном и вращательном движениях. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.
50. Работа силы. Элементарная работа силы, аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести и силы упругости.
51. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
52. Кинетическая энергия при плоскопараллельном движении твердого тела.
53. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.
54. Работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.
55. Силы инерции материальной точки.
56. Принцип Даламбера для материальной точки.
57. Принцип Даламбера для механической системы.
58. Принцип возможных перемещений.
59. Общее уравнение динамики.
60. Обобщенные координаты. Обобщенные силы. Уравнение Лагранжа 2-го рода.

3 Вопросы по статике для тестового контроля знаний

1. Что называют идеальным стержнем?
2. Что такое идеальная нить?
3. Что называют цилиндрическим шарниром?
4. Что такое связь?
5. Как направляют реакцию связи типа "идеальный стержень"?
6. Как направлена реакция гладкой поверхности?
7. Как направлена реакция подвижной шарнирной опоры?
8. Как определить проекцию силы на ось?
9. Как присвоить знак проекции силы на ось?
10. Приведите полную классификацию систем сил.
11. Чем отличаются силы активные от реакций связей?

12. Сформулируйте первую (основную) форму условий равновесия произвольной плоской системы сил.
13. Почему первая форма условий равновесия произвольной плоской системы сил называется основной?
14. Сформулируйте третью форму условий равновесия произвольной плоской системы сил.
15. Из каких скалярных уравнений состоят необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы сил?
16. Что произойдет с величиной момента силы относительно точки при переносе точки, приложения силы вдоль ее линии действия на величину, равную h?
17. В чем заключается теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно любого центра?
18. В каком случае момент силы относительно оси равен нулю?
19. Как определить момент силы относительно оси?
20. Как определить момент силы относительно точки?
21. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
22. Как определить проекцию силы на плоскость?
23. Что такое главный вектор системы сил?
24. Что такое главный момент системы сил?
25. Чем отличается пространственная система сходящихся сил от произвольной пространственной системы сил?
26. Записать условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
27. Записать условия равновесия пространственной системы сил, перпендикулярных оси OY.
28. Как должны быть расположены силы в пространстве, чтобы удовлетворять условиям равновесия: сумма Fкz = 0, сумма Mx(Fк) = 0, сумма My(Fк) = 0?
29. Записать условие равновесия пространственной системы сил, параллельных оси OX.
30. Как должны быть расположены силы в пространстве, чтобы удовлетворялись условия равновесия: сумма Fкx = 0, сумма Fкy = 0, сумма Fкz = 0?

4 Вопросы по кинематике для тестового контроля знаний

1. Какое движение называется плоскопараллельным?
2. Где находится МЦС данного тела?
3. В чем заключается теорема о проекциях скоростей 2-х точек плоской фигуры?
4. Как определить угловую скорость тела по величине скорости точки A и положению МЦС?
5. Если МЦС находится в бесконечности, то ...
6. Как определить ускорение точки B плоской фигуры?
7. Как определить величину скорости точки A по известной угловой скорости и положению МЦС?

8. Где находится МЦС тела при качении его без скольжения по неподвижной поверхности?
9. Где находится МЦС, если известны направления скоростей двух его точек?
10. Если МЦС находится в бесконечности, то что можно сказать о скоростях всех точек плоской фигуры?
11. Какое движение называется относительным?
12. Какое движение называется переносным?
13. Какое движение называется абсолютным?
14. Как определяется модуль абсолютной скорости, если вектор относительной скорости перпендикулярен вектору переносной скорости?
15. Какая формулировка соответствует теореме о сложении скоростей при сложном движении?
16. По какой формуле вычисляется модуль скорости абсолютного движения, если угол между направлениями векторов скорости относительного и переносного движения равен α?
17. Как определяется абсолютное ускорение точки при сложном движении?
18. Как определяется направление ускорения Кориолиса?
19. Как определяется величина ускорения Кориолиса?
20. В каком случае ускорение Кориолиса равно 0?

5 Вопросы по динамике для тестового контроля знаний

1. Что такое динамика?
2. Что такое материальная точка?
3. Сформулируйте основной закон динамики.
4. Сформулируйте первую (прямую) задачу динамики материальной точки.
5. Сформулируйте обратную задачу динамики.
6. Как определяются постоянные интегрирования?
7. Что входит в начальные условия?
8. Что называют центром масс механической системы?
9. Теорема о движении центра масс формулируется так …
10. Количество движения материальной точки – это ...
11. Как направлен вектор количества движения материальной точки?
12. Как формулируется теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме?
13. Количество движения системы – это ...
14. Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме формулируется следующим образом …
15. Что такое кинетический момент системы относительно определённого центра?
16. Как определяется кинетический момент твёрдого тела относительно оси вращения?
17. Кинетическая энергия системы равна …
18. Кинетическая энергия при вращательном движении равна …

19. При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна …
20. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме?
21. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме?
22. Чему равна работа постоянной силы F на перемещении S?
23. Сформулируйте принцип Даламбера для материальной точки.
24. Сформулировать принцип Даламбера для механической системы.
25. Что такое сила инерции, действующая на материальную точку?

6 Контрольные задания

Методические указания к выполнению контрольных заданий

Студенты выполняют два контрольных задания (две работы).

Задание 1 (статика и кинематика) – задачи С1, С4, К1, К3, К4.

Задание 2 (динамика) – задачи Д1, Д5, Д6, Д8, Д10.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берет рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получится более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переделки. К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа. На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задачи и в таблице P_1, l_1 r_1 и т.п. означают вес или размеры тела *1*, P_2, l_2, r_2, – тела 2 и т.д. Аналогично в кинематике и динамике. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

7 **Задачи к контрольным заданиям**

7.1 СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С 1.0 — С 1.9, табл. С1), закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом Р = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом М = 100 кН•м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условии № 1 на раму действует сила $\overline{F_2}$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\overline{F_3}$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке Е, и т. д.).

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять а = 0,5 м.

Указания. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0\left(\overline{F}\right) = m_0\left(\overline{F'}\right) + m_0\left(\overline{F''}\right)$.

Решение любых задач на равновесие твердого тела, независимо от взаимного расположения приложенных к телу сил, предлагается проводить по следующей методике:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) изобразить активные (заданные) силы;

3) если твердое тело несвободно, то следует применить принцип освобождаемости от связей, т. е. мысленно отбросить связи и заменить действия связей на твердое тело соответствующими реакциями связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела как тела свободного, находящегося в равновесии под действием активных сил и реакций связей;

5) использовать уравнения равновесия в соответствии с расположением сил, приложенных к твердому телу, и определить искомые величины.

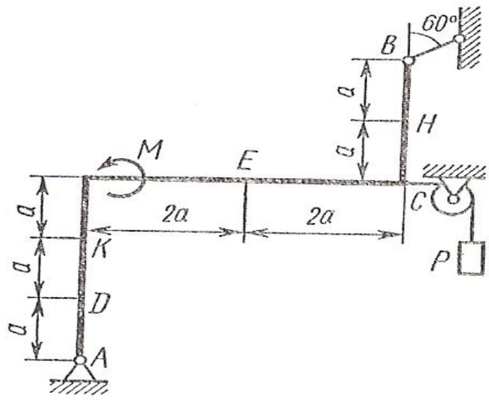


Рис. С1.0

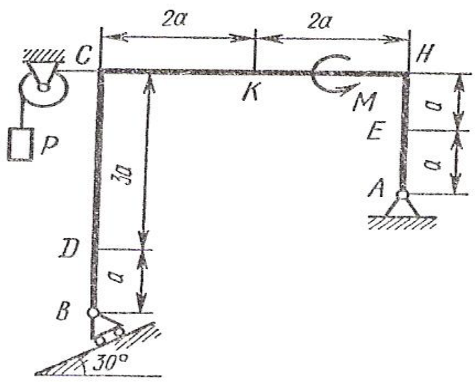


Рис. С1.1

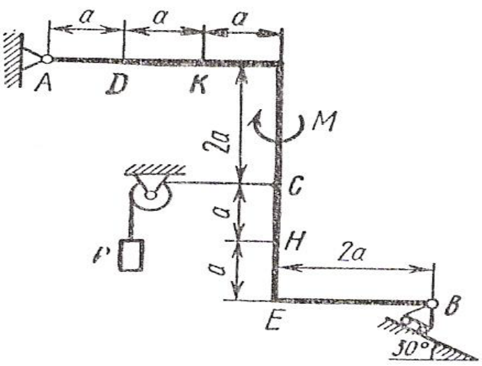


Рис. С1.2

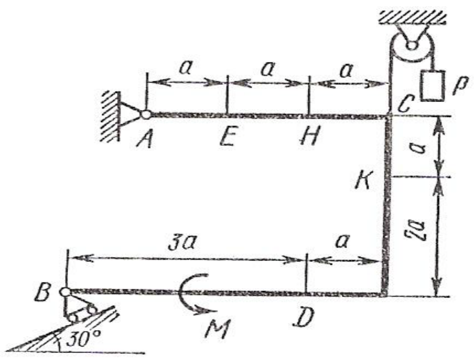


Рис. С1.3

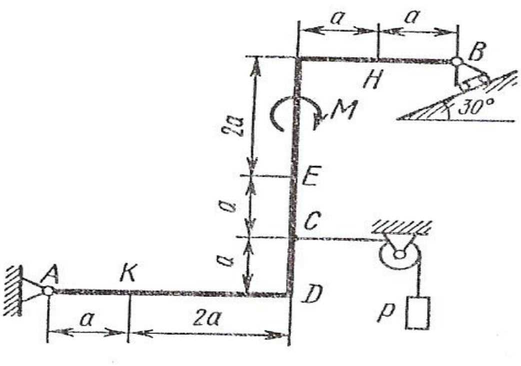


Рис. С1.4

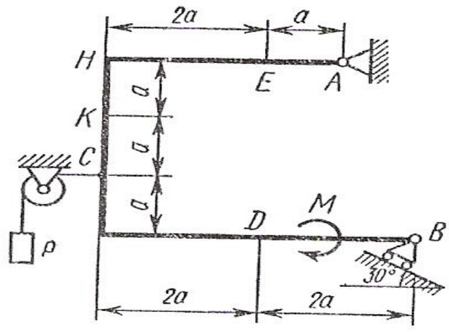


Рис. С1.5

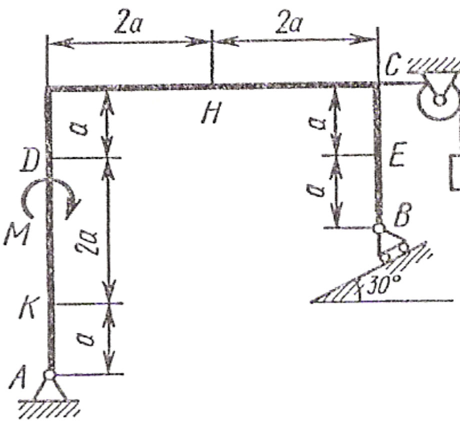


Рис. C1.6

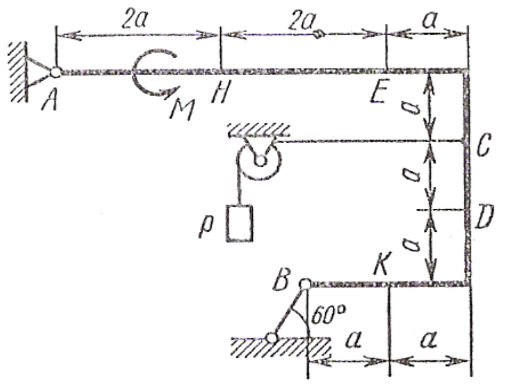


Рис. C1.7

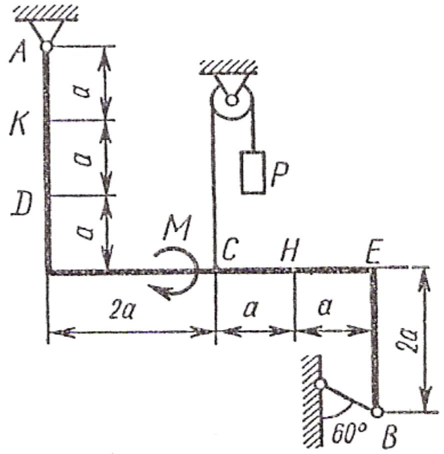


Рис. C1.8

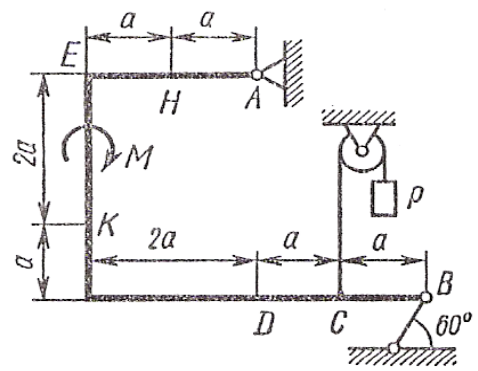
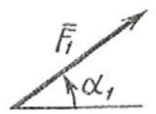
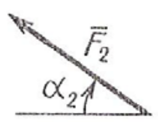
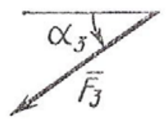
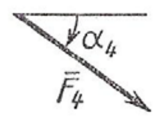


Рис. C1.9

Таблица C1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*H*	30	—	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—	—	*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—
4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	—
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

Пример решения задачи С1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

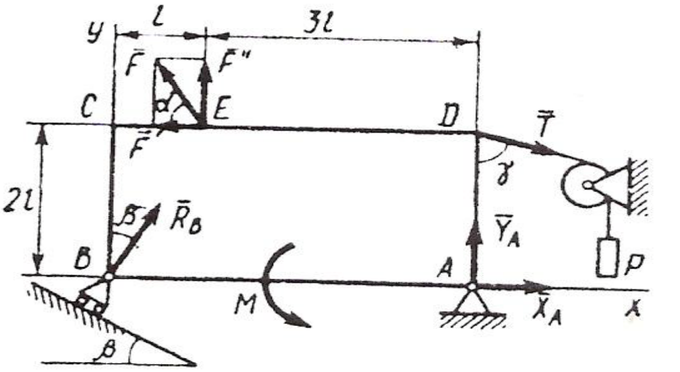


Рис. С1

Дано: F = 25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН • м, β = 30°, ℓ = 0,5 м.

Определить: реакции в точках *A* и *B,* вызываемые действующими нагрузками.

Решение

1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на пластину силы: силу F, пару сил с моментом *M,* натяжение троса *T* (по модулю *T = P)* и реакции связей X_A, Y_A, R_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы F относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу F на составляющие F", *F"* (F' = F$\cos\alpha$, *F"* = F $\sin\alpha$ *)* И учтем, что $m_A(F) = m_A(F') + m_A(F'')$ Получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_A(\overline{F_k}) = 0,\ M - R_B\cos\beta \cdot 4l + F\cos\alpha \cdot 2l - F\sin\alpha \cdot 3l -$$

$$- T\sin\gamma \cdot 2l = 0. \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A = -8,5 кН, $У_A$= -23,3 кН, R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы X_A и $У_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С4

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. С4.0 — С4.7) или же двумя подшипниками в точках А и В и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С4.8, С4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

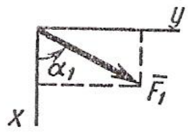
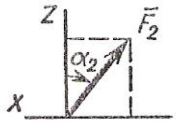
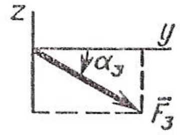
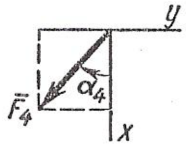
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1 = 5 кН, вес меньшей плиты P_2 = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy — горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом M = 4 кН•м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4; при этом силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_4}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\overline{F_2}$ — в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F_3}$ — в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять a = 0,6 м.

Указания. Задача С4 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x\left(\overline{F}\right) = m_x\left(\overline{F'}\right) + m_x\left(\overline{F''}\right)$ и т. д.

Таблица С4

Силы								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*E*	60	*H*	30	—	—	—	—
1	—	—	*D*	60	*E*	30	—	—
2	—	—	—	—	*K*	60	*E*	30
3	*K*	30	—	—	*D*	0	—	—
4	—	—	*E*	30	—	—	*D*	60
5	*H*	0	*K*	60	—	—	—	—
6	—	—	*H*	90	*D*	30	—	—
7	—	—	—	—	*H*	60	*K*	90
8	*D*	30	—		*K*	0	—	—
9	—	—	*D*	90	—	—	*H*	30

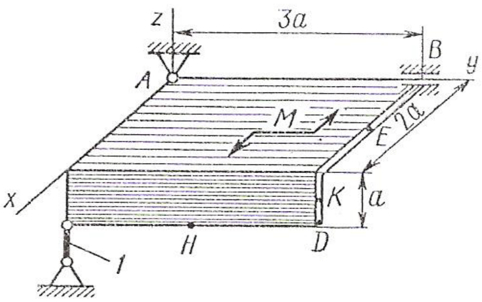


Рис. С4.0

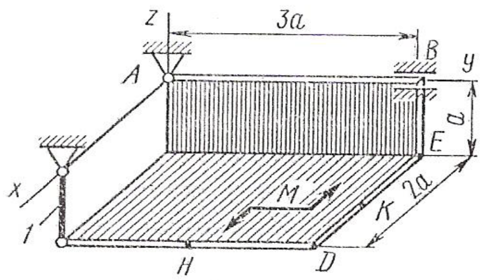


Рис. С4.1

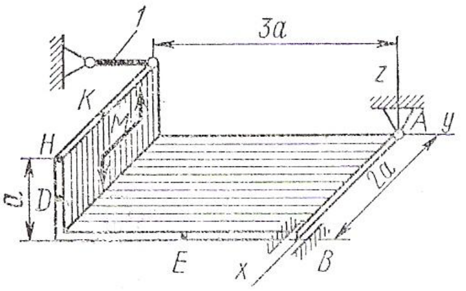


Рис. C4.2

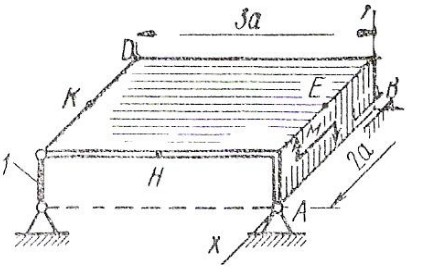


Рис. C4.3

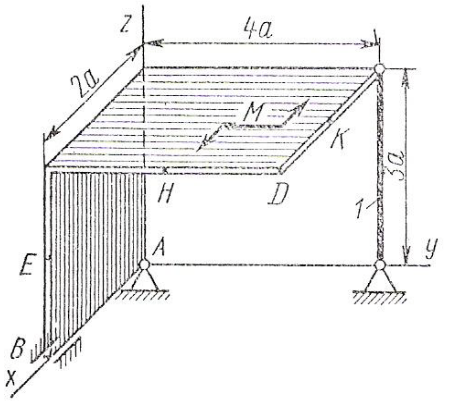


Рис. C4.4

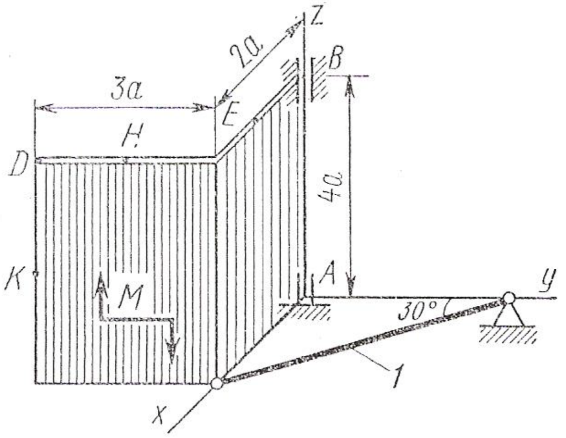


Рис. C4.5

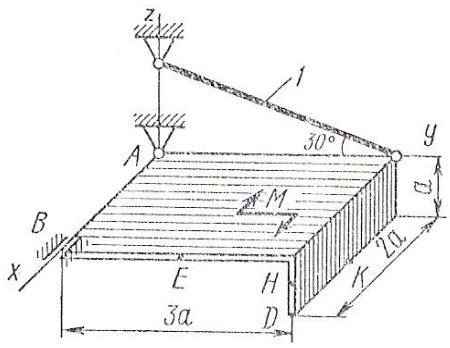


Рис. C4.6

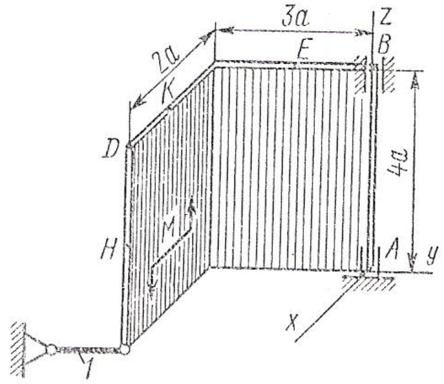


Рис. C4.7

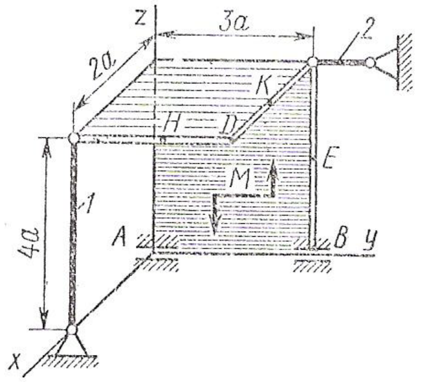


Рис. C4.8

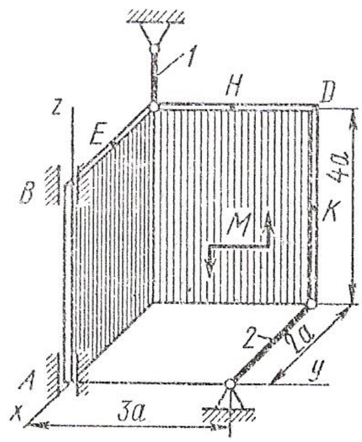


Рис. C4.9

Примеры решения задачи С4

Пример 1

Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С4) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим подшипником в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\overline{F}$, а в плоскости, параллельной yz — пара сил с моментом M.

Дано: P = 3 кН, F = 8 кН, M = 4 кН • м, a = 60°, AC = 0,8 м, AB = 1,2 м, BE = 0,4 м, EH = 0,4 м.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}$, $\overline{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, цилиндрического подшипника — на две составляющие $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + X_B + F\cos 60° = 0\ ; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - N\cos 30° = 0\ ; \qquad (2)$$

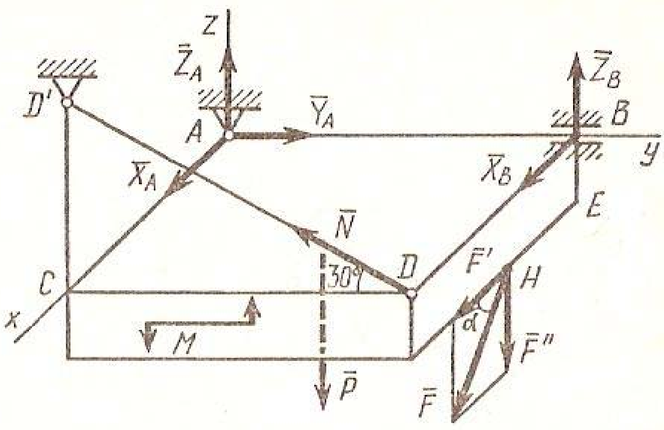


Рис. С4

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin 60° = 0\ ; \qquad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ M - P\cdot AB/2 + Z_B\cdot AB - F\sin 60°\cdot AB + N\sin 30°\cdot AB = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\cdot AC/2 - N\sin 30°\cdot AC + F\sin 60°\cdot AC/2 - F\cos 60°\cdot BE = 0\ ; \qquad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ -F\cos 60°\cdot AB - N\cos 30°\cdot AC - X_B\cdot AB = 0\ . \qquad (6)$$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, параллельные осям x и z (F' = Fcos α, F'' = Fsin α), и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$. Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции. Ответ: X_A = 3,4 кН; Y_A = 5,1 кН; Z_A = 4,8 кН; Хв = -7,4 кН; Z_B = =2,1 кН; N = 5,9 кН. Знак минус указывает, что реакция направлена противоположно показанной на рис. С4.

Пример 2

Вертикальная прямоугольная плита весом *Р* (рис. С4.2) закреплена сферическим шарниром в точке *А,* цилиндрическим подшипником в точке *В* и невесомым стержнем DD′, лежащим в плоскости, параллельной плоскости *yz*. На плиту действуют сила F *(в* плоскости *xz),* сила F_2 (параллельная оси *у)* и пара сил с моментом *М* (в плоскости плиты).

Дано: *Р* = 5кН, *М* = 3 кН • м, F_1 = 6 кН, F_2 = 7,5 кН, *a* = 30°, *АВ* = 1 м, ВС = 2 м, СЕ = 0,5 *АВ, ВК* = 0,5 DC.

Определить: реакции опор *А, В* и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы *Р,* F_1 F_2 и пара сил с моментом *М,* а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A, Y_A, Z_A, цилиндрического подшипника – на две составляющие Y_B, Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию *N* стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + F_1\cos\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P - N\sin 75^\circ + F_1\sin\alpha = 0, \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ -F_2\cdot BK + N\cos 75^\circ\cdot BC = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\frac{AB}{2} + F_1\cos\alpha\cdot BC - F_1\sin\alpha\frac{AB}{2} -$$

$$- Z_A\cdot AB + N\sin 75^\circ\cdot AB + M = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ Y_A\cdot AB - N\cos 75^\circ\cdot AB = 0. \quad (6)$$

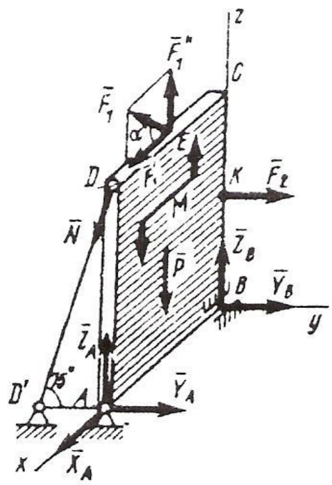


Рис. С4.2

Для определения момента силы F_1, относительно оси y, разлагаем F_1 на составляющие F'_1 и F''_1, параллельные осям x и z ($F'_1 = F_1 \cos a$, $F''_1 = F_1 \sin a$), и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции N.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдем, чему равны искомые реакции.

Ответ: X_A = -5,2 кН, Y_A = 3,8 кН, Z_A = 28,4 кН, Y_B = -7,5 кН, Z_B = -12,4 кН, N = 14,5 кН. Знаки указывают, что силы X_F, Y_B и Z_B направлены противоположно показанным на рис. С2.

7.2 КИНЕМАТИКА

Задача К1 (а)

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0 – К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 = 1с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0 – 2 в столбце 2, для рис. 3 – 6 в столбце 3, для рис. 7 – 9 в столбце 4). Как и в задачах С1, С4, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 – по последней.

Задача К1 (б). Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону s = f(t), заданному в табл. К1 в столбце 5 (s — в метрах, t — в секундах), где s = $\breve{A}M$ — расстояние точки от некоторого начала А, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с. Изобразить на рисунке векторы и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении М, а положительное направление отсчета s — от А к М.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 = 1 с. В некоторых вариантах задачи Кl (а) при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Задачи по кинематике точки следует решать в таком порядке:

1) выбрать систему координат;
2) составить уравнения движения точки в выбранной системе координат;

3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат и скорость по модулю и направлению;

4) зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси координат и ускорение по модулю и направлению.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

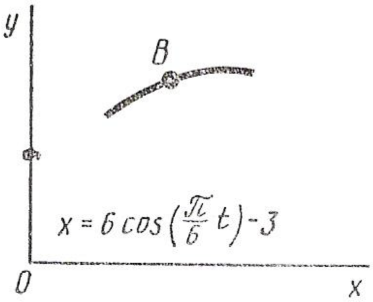


Рис. К1.0

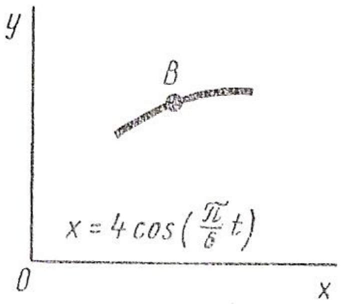


Рис. К1.1

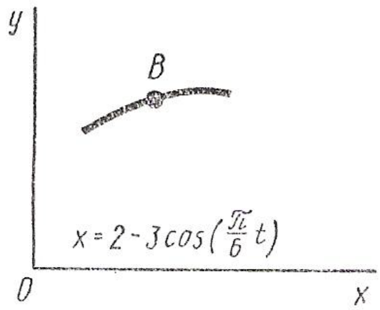


Рис. К1.2

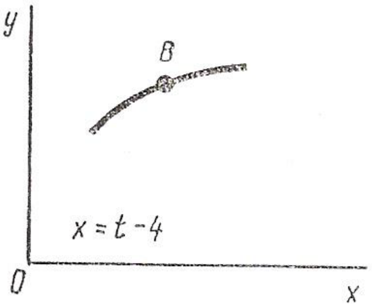


Рис. К1.3

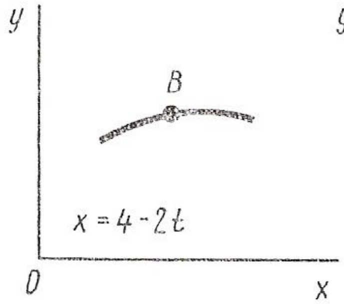


Рис. К1.4

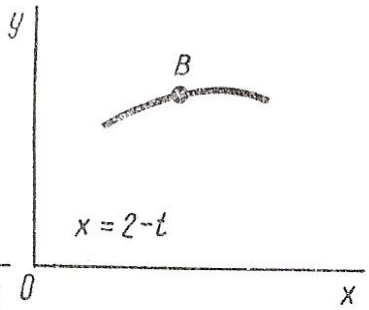


Рис. К1.5

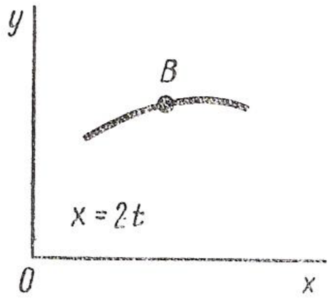


Рис. К1.6

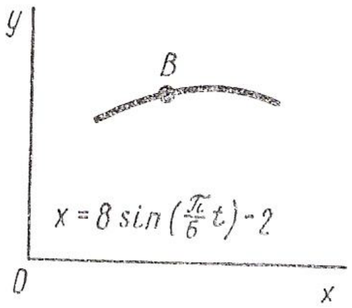


Рис. К1.7

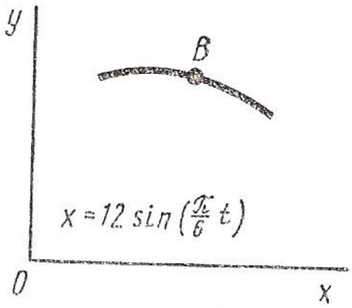


Рис. К1.8

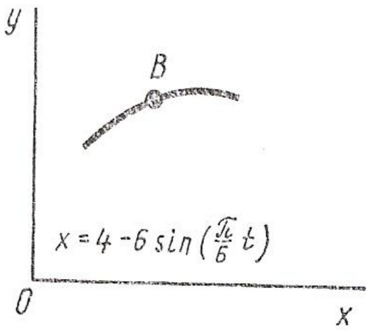


Рис. К1.9

Пример решения задачи К1 (а)

Даны уравнения движения точки в плоскости *xy:*

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3\,, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \tag{1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}\,, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}\,;$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}\,.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (парабола, рис.К1а):

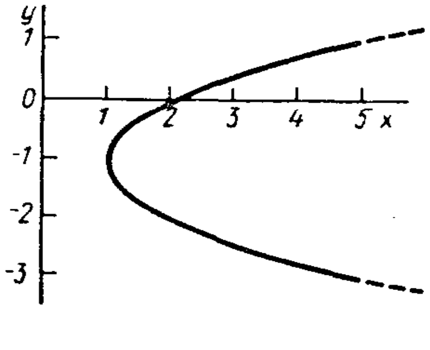
$$x = (y+1)^2 + 1 \tag{2}$$

2. Скорость точки найдём по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



И при $t = 1$с

Рис. К1а

V_{1x}=1,11см/с, V_{1y}=0.73см/с, V_1=1,33 см/с (3)

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

При t = 1с

$$a_{1x} = 0{,}87\ \text{см/с}^2,\ a_{1y} = -0{,}12\ \text{см/с}^2,\ a_1 = 0{,}88\ \text{см/с}^2. \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} \text{ и}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при t = 1 с а a_1 = 0,66 см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - \grave{a}_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения $\grave{a}_1$ и $\grave{a}_{1\tau}$, получим, что при t = 1 с a_{1n} = 0,58 см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_l и a_{ln}, найдем, что при t = 1с ρ_1 = 3,05 см.

О т в е т : v_l = 1,33 см/с, a_l, = 0,88 см/с^2, $a_{l\tau}$. = 0,66 см/с^2, a_{1n} = 0,58 см/с^2, $_1$ = 3,05 см.

Пример решения задачи К1 (б)

Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ (s — в метрах, t — в секундах), где s = AˇM (рис. К1 б). Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с.

Решение. Определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

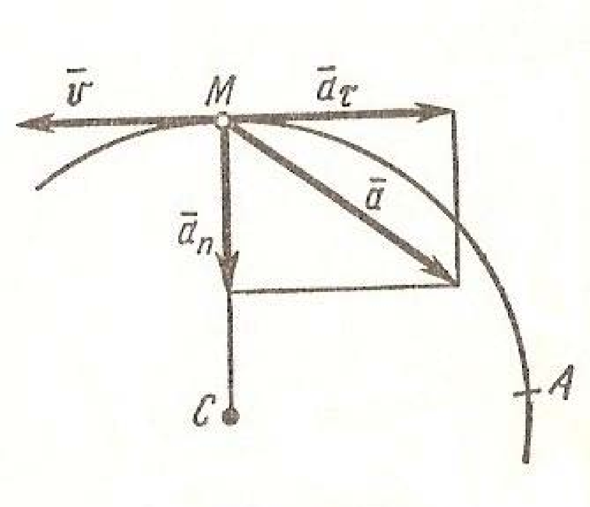


Рис. К1б

При t_1 = 1 с получим

м/с. Ускорение ходим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

При t_1 = 1 с получим, учитывая, что R = 2 м,

м/с^2, $a_{1n} = \upsilon_1^2 / 2 = \pi^2 / 16 = 0{,}62$ м/с^2. Тогда ускорение точки при t_1 = 1 с будет

м/с^2.

Изобразим на рис. К1 б векторы $\overline{\upsilon_1}$ и $\overline{a_1}$, учитывая знаки υ_1 и $a_{1\tau}$ и считая положительным направление от А к М.

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (рис. К3.0 — К3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунов В и Е (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно l_1 = = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0 — 4) или в табл. К3б (для рис. 5 — 9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_4 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти». Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3б). Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{\upsilon_B}$ и ускорение a_B — от точки В к b (на рис. 5 — 9).

Механизм рекомендуется построить в масштабе, откладывая углы с помощью транспортира, что придаст чертежу наглядность и облегчит решение задачи в части определения геометрических величин.

Указания. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности. При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где А — точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); В — точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (в случае, когда точка В тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К3).

Таблица К3а (к рис. К3.0 – К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω₁, 1/с	ω₄, 1/с	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	—	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	—	4	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	—	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	—	5	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	—	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	—	6	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	—	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	—	2	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	—	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	—	8	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица К3б (к рис. К3.5 – К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	v_B, м/с	a_B, м/с^2	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	—	—	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	—	—	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	—	—	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	—	—	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	D, E	AB	A	AB

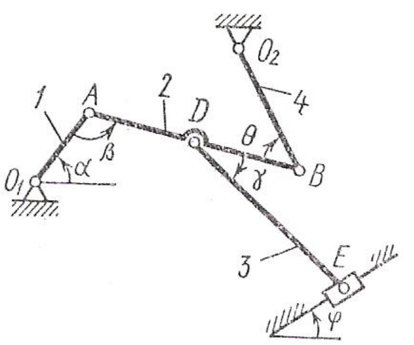


Рис. К3.0

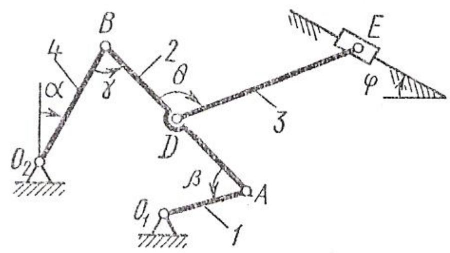


Рис. К3.1

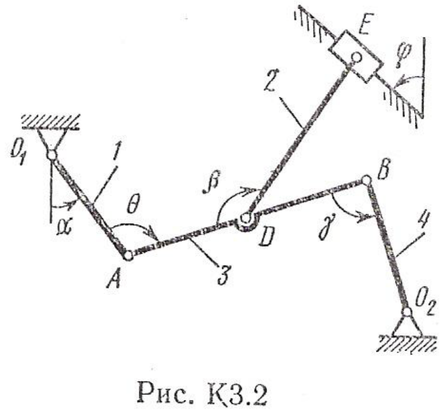


Рис. К3.2

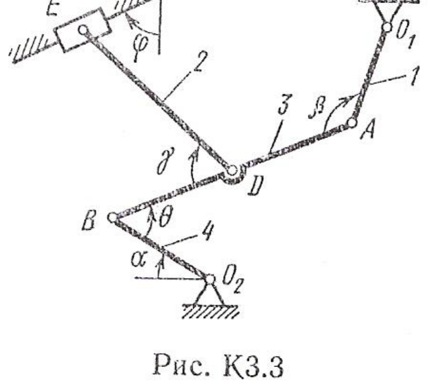


Рис. К3.3

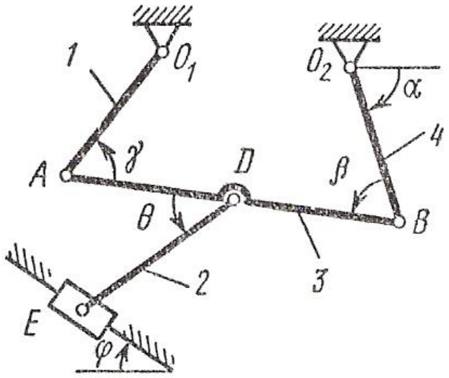


Рис. К3.4

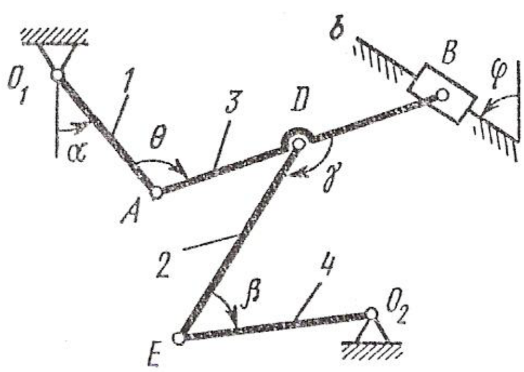


Рис. К3.5

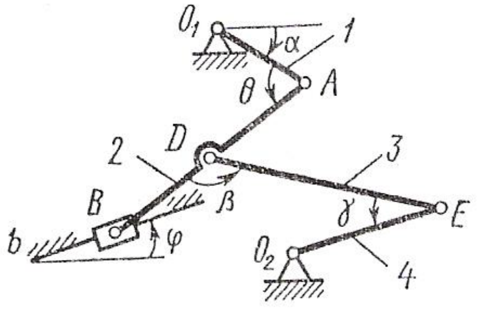


Рис. К3.6

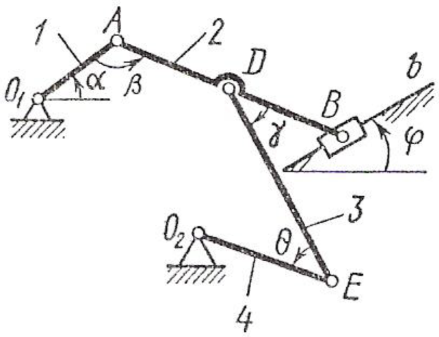


Рис. К3.7

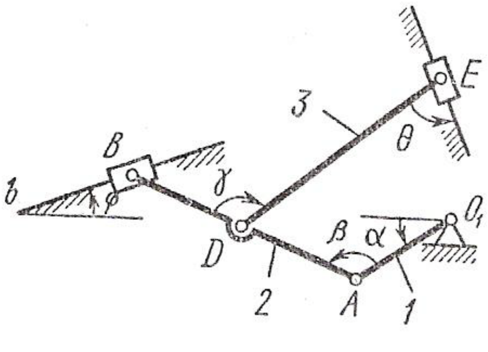


Рис. К3.8

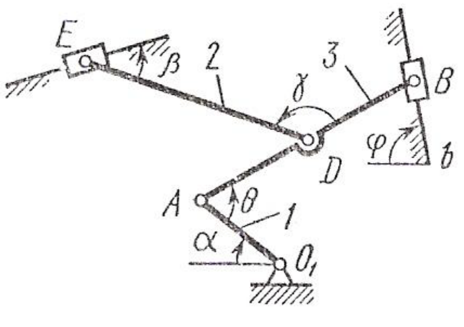


Рис. К3.9

Пример К3.

Механизм (рис. К3а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, AD = DB, $1_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 — против хода часовой стрелки). Определить: υ_B, υ_E, ω_2, a_B, ε_3.

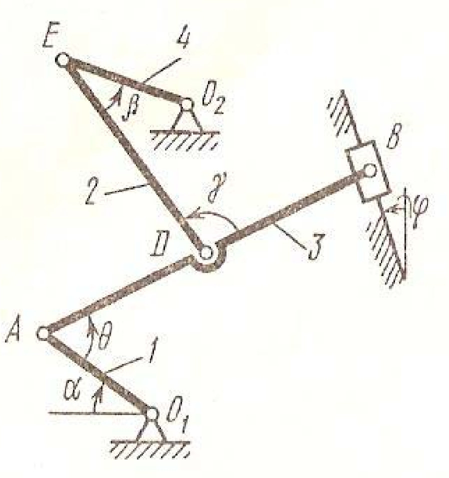


Рис. К3а

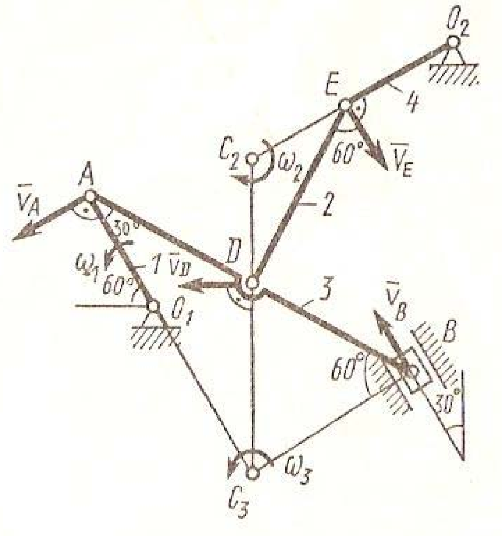


Рис. К3б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем υ_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\overline{\upsilon_B}$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\overline{\upsilon_A}$ численно:

$$\upsilon_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \ \overline{\upsilon_A} \perp O_1A. \tag{1}$$

Направление $\overline{\upsilon_B}$ найдем, учитывая, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\overline{\upsilon_A}$ и направление $\overline{\upsilon_B}$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{\upsilon_B}$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$\upsilon_B \cos 30° = \upsilon_A \cos 60° \text{ и } \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{2}$$

3. Определяем $\overline{\upsilon_E}$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{\upsilon_E}$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\overline{\upsilon_A}$ и $\overline{\upsilon_B}$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{\upsilon_A}$ и $\overline{\upsilon_B}$, восставленных из точек A и B (к $\overline{\upsilon_A}$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\overline{\upsilon_A}$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{\upsilon_D}$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину $\overline{\upsilon_D}$ найдем из пропорции:

$$\frac{\upsilon_D}{C_3D}=\frac{\upsilon_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3D —прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что C_3B = AB sin 30° = 0,5AB = BD. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$\upsilon_D = \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \ \overline{\upsilon_D} \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{\upsilon_E} \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\overline{\upsilon_E}$ и $\overline{\upsilon_D}$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{\upsilon_D}$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\overline{\upsilon_E}$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. КЗб видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{\upsilon_E}{C_2E}=\frac{\upsilon_D}{C_2D}, \ \upsilon_E = \upsilon_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{5}$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1} \tag{6}$$

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. КЗв, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$\bar{a}_A^\tau = \varepsilon_1 \ell_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$
$$\bar{a}_A^n = \omega_1^2 \ell_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \tag{7}$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\bar{a}_A^\tau$ — перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. КЗ в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{\upsilon_B}$.

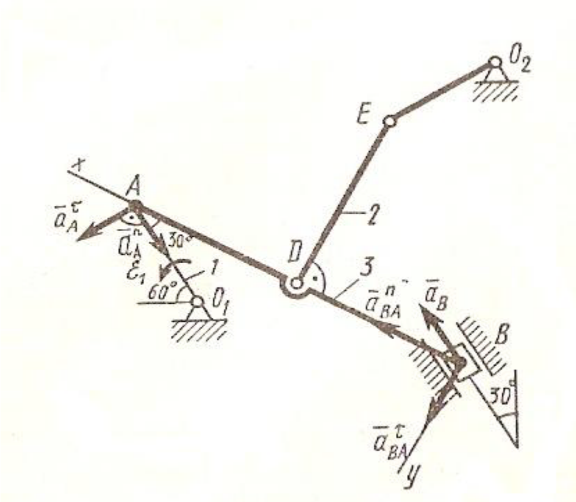


Рис. КЗв

Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^{n}$ (вдоль ВА от В к А) и $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a_{BA}^{n} = \omega_3^2 \ell_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_A}{C_3 A} = \frac{\upsilon_A}{\ell_3 \cos 30°} = 0{,}66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^{n} = 0{,}61 \text{ м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^{τ}; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление ВА (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^{\tau}$. Тогда получим

$$a_B \cos 30° = a_A^{\tau} \cos 60° - a_A^{n} \cos 30° + a_{BA}^{n}. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен, как показано на рис. КЗ в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^{τ}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a_A^{\tau} \sin 60° + a_A^{n} \sin 30° + a_{BA}^{\tau}. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^{\tau} = —3{,}58$ м/с^2. Знак указывает, что направление $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ противоположно показанному на рис. КЗв.

Теперь из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 \ell_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{\ell_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $\upsilon_B = 0{,}46$ м/с; $\upsilon_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Примечание. Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. КЗ.0 — КЗ.4, где В движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\overline{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\overline{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\overline{a}_B = \overline{a}_B^{\tau} + \overline{a}_B^{n}$), и исходное уравнение (8) примет вид

$$\overline{a}_B^{\tau} + \overline{a}_B^{n} = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_A^n$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar{a}_A^\tau$ — перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ, a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau = 0$ или a_A^n = О, если точка А движется прямолинейно).

Значение a_B^n.также вычисляется по формуле $a_B^n = \upsilon_B^2/\rho = \upsilon_B^2/\ell$, где ℓ — радиус окружности O_2B, а υ_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ, и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси. Найдя a_B^τ, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2}$.Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0 — К4.4) или круглая пластина радиуса R = 60 см (рис. К4.5 — К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону φ = f1(t), заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0—4) или по окружности радиуса R (рис. 5—9) движется точка М; закон ее относительного движения, т. е. зависимость s = AM = $f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0—4 и для рис. 5—9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка М показана в положении, при котором s = AM>0 (при s<O точка М находится по другую сторону от точки А).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t_1 = 1 с.

Указания. Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует пб условиям задачи определить, где находится точка М на пластине в момент времени t\ = 1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5—9, при решении задачи не подставлять числового значения /?, пока не будут определены положение точки М в момент времени t\ — 1 с и угол между радиусами СМ и С А в этот момент.

При решении задач на сложное движение точки рекомендуется такая последовательность.

1. Разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения.

2. Выбрать две системы координат: подвижную и неподвижную.

3. Мысленно остановить переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении.

4. Мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения, скорость и ускорение точки в переносном движении.

5. По известным угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки.

6. Применив теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость точки.

7. Пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат.

8. По найденным проекциям абсолютного ускорения найти искомое абсолютное ускорение точки по величине и направлению.

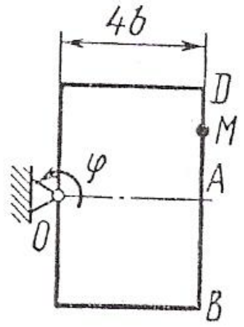


Рис. К4.0

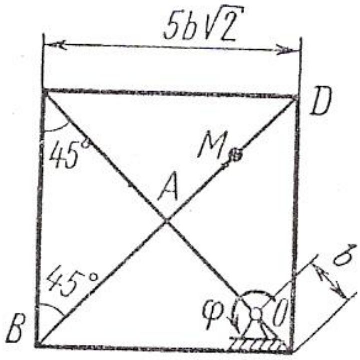


Рис. К4.1

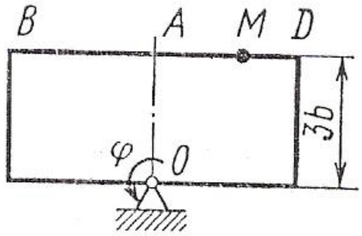


Рис. К4.2

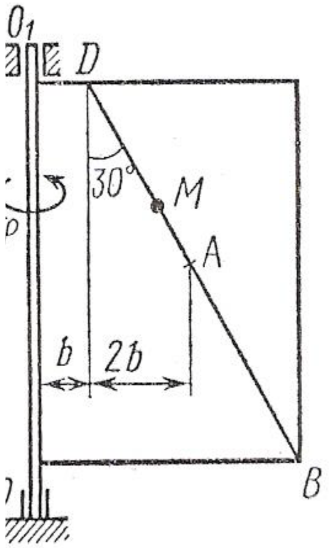


Рис. К4.3

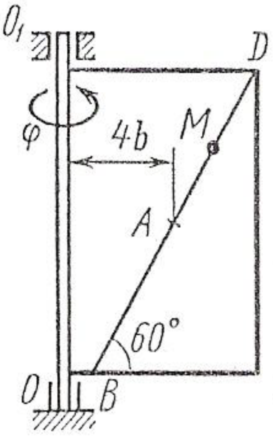


Рис. К4.4

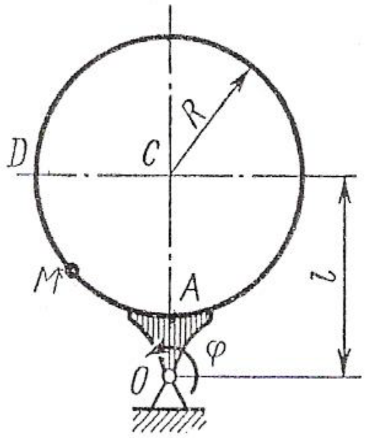


Рис. К4.5

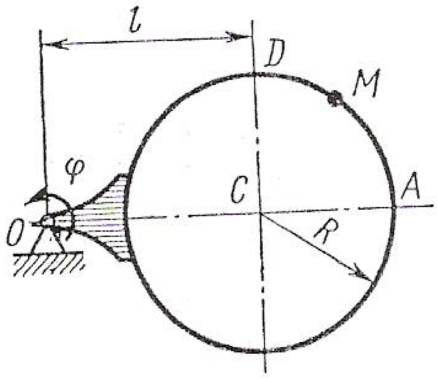


Рис. К4.6

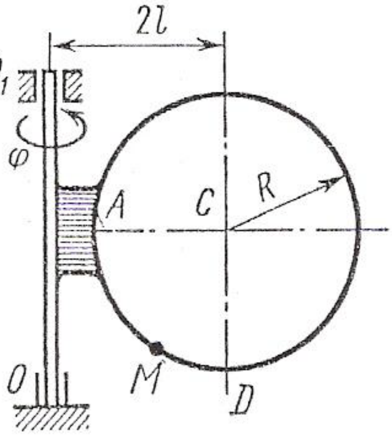


Рис. К4.7

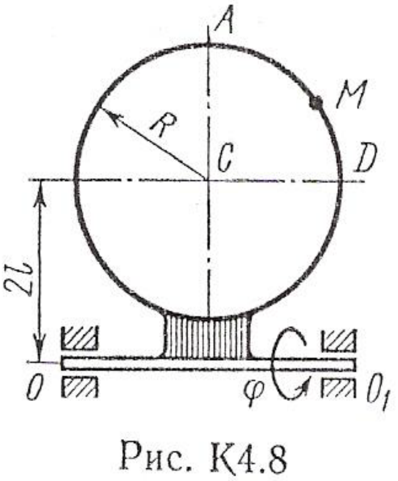


Рис. К4.8

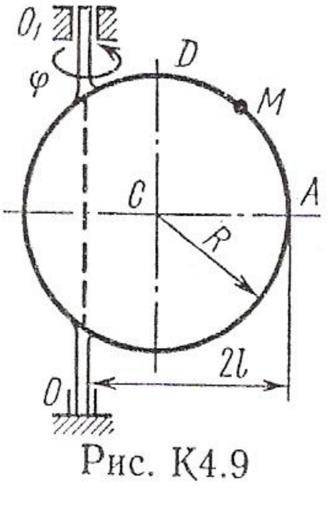


Рис. К4.9

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

Следует помнить, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях.

1. Когда $\omega_e = 0$, т.е. когда переносное движение является поступательным или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль.

2. Когда $V_r = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль.

3. Когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 180°$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения или если в данный момент времени вектор $\vec{V}_r$ параллелен этой оси.

Пример К4

Пример 1. Дано: $\varphi = t^2 - 2t^3$, $a = 16$ см, $AM = 60(t^4 - 3t^2) + 56$ (см), $t = 1$ с.

Определить: абсолютную скорость V и абсолютное ускорение a точки М.

Решение

При решении задачи считаем движение точки по пластине относительным, а вращательное движение самой пластины – переносным. Выбираем подвижную X_1AY_1 и неподвижную XOY системы координат (рис. К4.1).

Определим положение точки на пластинке в момент времени $t = 1$ с:

$$AM = S = 60(1-3) + 56 = -120 + 56 = -64 \text{ см.}$$

Знак «минус» показывает, что точка М перемещается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта расстояния АМ вниз вдоль оси относительно точки А.

Точка М совершает сложное движение. Относительное движение – это движение точки М по пластинке вдоль оси AY, а переносным движением будет вращение системы координат X_1AY_1, неизменно связанной с пластиной, относительно неподвижной системы координат XOY.

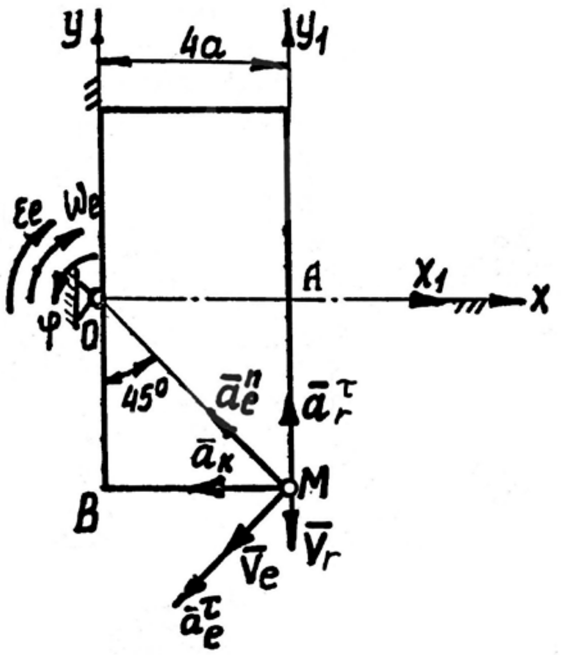


Рис. К4.1

Абсолютная скорость $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$.

Относительная скорость $V_r = \dot{S}$; $\dot{S} = 60(4t^3 - 6t)$.

При $t = 1$ с $\dot{S} = 60(4-6) = -120$ см/с, знак «минус» показывает, что вектор $\vec{V}_r$ направлен вниз вдоль оси AY_1 относительно точки А, в сторону отрицательных значений.

$s_r = AM$, $|\vec{V}_r|$=120 см/с.

Переносная скорость $V_e = \omega_e \cdot OM$, где $OM=\sqrt{OA^2+AM^2}=\sqrt{(4\cdot 16)^2+64^2}=64\sqrt{2}$ см, так как OAM – прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $OA=4\cdot 16=64$ см; $AM=64$ см, и $\angle BOM=\angle AOM=45°$. Модуль угловой скорости $\omega_e=|\dot{\varphi}|$, $\dot{\varphi}=2t-6t^2$, при $t=1$ с $\dot{\varphi}=2-6=-4$ с$^{-1}$, знак «минус» показывает, что пластинка вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла (рис. К4.1), по часовой стрелке, а вектор $\vec{\omega}_e$ перпендикулярен плоскости XOY чертежа и направлен вдоль оси, проходящей через точку О, за чертеж. $\omega_e=|\dot{\varphi}|=4$ с$^{-1}$, $V_e=64\sqrt{2}\cdot 4=362$ см/с.

Вектор $\vec{V}_e\perp OM$ и направлен в сторону ω_e в сторону вращения пластины.

Угол между $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ равен 45°, тогда

$$V=\sqrt{V_e{}^2+V_r{}^2+2V_rV_e\cos 45°}=\sqrt{120^2+362^2+2\cdot 120\cdot 362\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=451 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_k$, или $\vec{a}=\vec{a}_r^\tau+\vec{a}_r^n+\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_e^n+\vec{a}_k$.

Относительное касательное ускорение

$$a_r^\tau=\ddot{S};\ \ddot{S}=[60(4t^3-6t)]'=60(12t^2-6).$$

При $t=1$ с $\ddot{S}=60\cdot 6=360$ см/с, $a_r^\tau=360$ см/с^2 и направлено противоположно , так как V_r= -120см/с.

Относительное движение точки М направлено по прямой АВ, поэтому

$$a_r^n=\frac{V_r^2}{\rho}=\frac{V_r^2}{\infty}=0.$$

Переносное касательное ускорение $a_e^\tau=\varepsilon_e\cdot OM$, где угловое ускорение $\varepsilon=\ddot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}=(2t-6t^2)'=2-12t$. При $t=1$ с $\ddot{\varphi}=2-12=-10$ с$^{-2}$. Знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ совпадают, значит, вращение пластинки ускоренное, направления $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\varepsilon}_e$ совпадают.

$$|\varepsilon_e|=|\ddot{\varphi}|=10 \text{ с}^{-2},\ a_e^\tau=10\cdot 64\sqrt{2}=980 \text{ см/с}^2.$$

Переносное нормальное ускорение $a_e^n=\omega_e^2\cdot \text{OM}=16\cdot 64\sqrt{2}=1450$ см/с^2 и направлено от М к О.

Ускорение кориолиса $a_k=2\omega_eV_r\sin(\vec{\omega}_e;\vec{V}_r)=2\cdot 4\cdot 120\cdot\sin 90°=960$ см/с^2.

Вектор $\vec{a}_k$ направлен в соответствии с векторным равенством параллельно оси OX (рис. К4.1).

Модуль абсолютного ускорения определим методом проекций:

$$a_x=-a_e^\tau\cos 45°-a_e^n\cos 45°-a_k=-\cos 45°(980+1450)-960=-2670 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y=a_r^\tau-a_e^\tau\cos 45°+a_e^n\cos 45°=360-\cos 45°(980-1450)=696 \text{ см/с}^2;$$

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}=\sqrt{(-2670)^2+696^2}=2770 \text{ см/с}^2.$$

Пример 2. Диск радиусом R = 20 см вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O, согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{2}(2t^3 - t^2)$. По ободу диска от точки A движется точка M согласно уравнению $AM = 10\pi t^2$ см. Для момента времени t = 1 с определить величину абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M (рис. К4. 2).

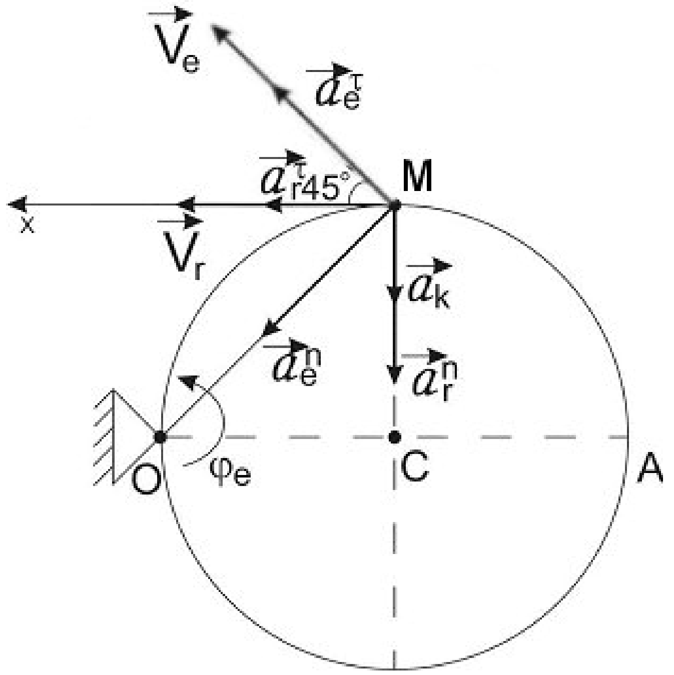


Рис. К4. 2

Решение

Убедимся, что точка M совершает сложное движение. Действительно, точка M движется по ободу диска и вместе с диском вращается вокруг оси O.

Движение точки M по ободу диска по заданному закону $S_r = AM = 10\pi t^2$ будет относительным, вращение диска вокруг оси O – переносным.

Установим положение точки M на относительной траектории в данный момент времени, определив для этого значение центрального угла $\angle ACM = \alpha$.

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{10\pi}{20} = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \angle ACM = 90^\circ.$$

Положение точки M в данный момент времени указано на рисунке.

Абсолютная скорость точки M определяется геометрической суммой относительной и переносной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$.

Относительное движение точки является криволинейным. Поэтому вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен по касательной к ободу диска в точке M. Значение относительной скорости $V_r = \frac{dS}{dt} = 20\pi t$, при t=1 с $V_r = 20\pi$ см/с.

Переносное движение, т. е. движение диска, является вращательным. Поэтому вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости, т. е. скорости той точки диска, с которой в данный момент совпала точка М, будет направлен перпендикулярно отрезку ОМ в сторону вращения диска. По модулю $V_e = |\omega_e| OM$, где $\omega_e = \dfrac{d\varphi_e}{dt} = \dfrac{\pi}{2}(6t^2 - 2t)$.

При t = 1 с $\omega_e = 2\pi$ с$^{-1}$. Значение $OM = R\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ см.

Тогда $V_e = 2\pi \cdot 20\sqrt{2} = 40\pi\sqrt{2}$ см/с.

Модуль абсолютной скорости определяем по формуле

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_e V_r \cos 45^\circ} = \sqrt{(20\pi)^2 + (40\pi\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 20\pi \cdot 40\pi\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 226{,}71 \text{ см/с.}$$

Для определения абсолютного ускорения точки М используем формулу абсолютного ускорения точки в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k .$$

Относительное нормальное ускорение равно $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{\rho} = \dfrac{V_r^2}{R} = 20\pi^2$ см/с^2.

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к его центру С.

Относительное касательное ускорение $a_r^\tau = \dfrac{dV_r}{dt} = 20\pi$ см/с^2.

Вектор $\vec{a}_r^\tau$ совпадает с направлением вектора относительной скорости. Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n = \omega_e^2 OM = 4\pi^2 \cdot 20\sqrt{2} = 80\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль ОМ к оси вращения О. Переносное касательное ускорение $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \dfrac{d\omega_e}{dt} = \dfrac{\pi}{2}(12t - 2)$, при t = = 1 с $\varepsilon_e = 5\pi$ с$^{-2}$.

Тогда $a_e^\tau = 5\pi \cdot 20\sqrt{2} = 100\pi\sqrt{2}$ см/с^2.

Так как угловая скорость ω_e и угловое ускорение ε_e одинаковы по знаку, то вектор $\vec{a}_e^\tau$ совпадает с направлением вектора $\vec{V}_e$ переносной скорости.

Ускорение Кориолиса определим по формуле $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$.

Так как вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то для определения направления кориолисова ускорения достаточно вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости повернуть в сторону вращения на 90˚ в плоскости диска. По модулю кориолисово ускорение равно

$$a_k = 2|\omega_e||V_r|\sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 2|\omega_e||V_r|\sin 90^\circ, \text{ или } a_k = 2 \cdot 2\pi \cdot 20\pi = 80\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения найдем методом проекций:

$$a_x = a_r^\tau + a_e^n \cos 45^\circ + a_e^\tau \cos 45^\circ = 120\pi + 80\pi^2 = 1166{,}4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r^n + a_k + a_e^n \cos 45^\circ - a_e^\tau \cos 45^\circ = 160\pi^2 - 100\pi = 1255{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Окончательно модуль абсолютного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

7.3 ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз *D* массой *m,* получив в точке *A* начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе *ABC,* расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила *Q* (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды *R,* зависящая от скорости *v* груза (направлена против движения).

В точке *B* груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила *F,* проекция которой F_x на ось *x* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = \ell$ или время t движения груза от точки *A* до точки *B,* найти закон движения груза на участке *BC, т.е.* $x = f(t)$, где $x = BD$. Трением груза о трубу пренебречь.

Эта задача относится ко второй основной задаче динамики точки и заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся материальной точке, массе этой точки и начальным условиям ее движения, начальному положению и начальной скорости, требуется определить закон движения этой точки.

Указания. Задача на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *AB*, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке *AB* или длину этого участка, определить скорость груза в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC*. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B* и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учитывая, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

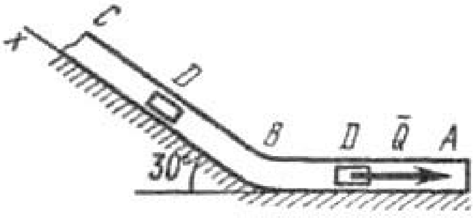


Рис. Д1.0

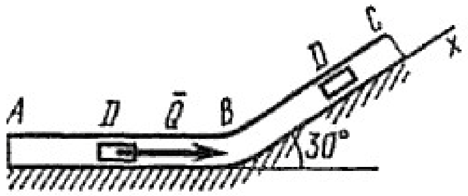


Рис. Д1.1

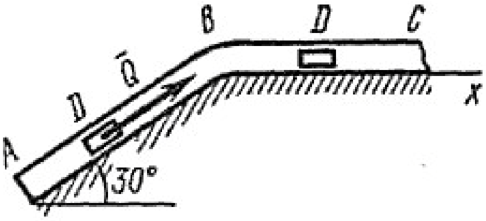


Рис. Д1.2

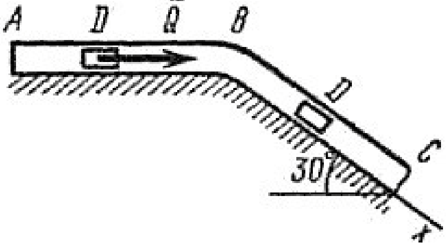


Рис. Д1.3

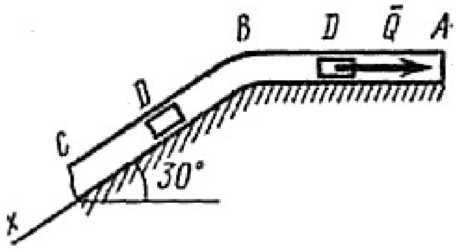


Рис. Д1.4

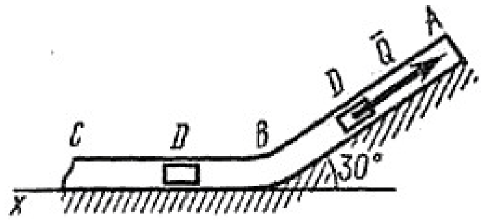


Рис. Д1.5

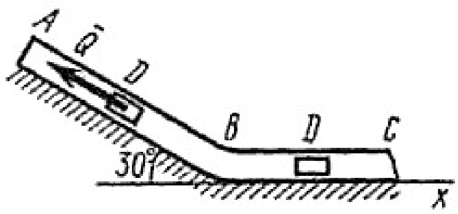


Рис. Д1.6

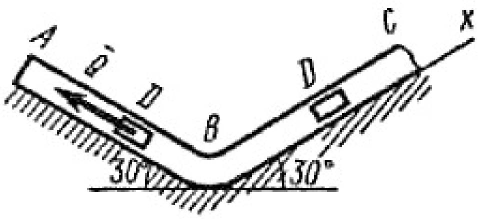


Рис. Д1.7

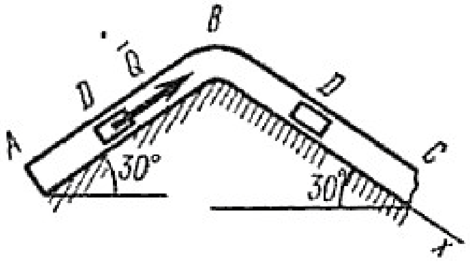


Рис. Д1.8

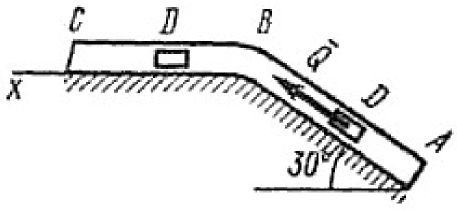


Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2,4	12	5	$0{,}8\,v^2$	1,5	–	$4\sin(4t)$
1	2	20	6	$0{,}4\,v$	–	2,5	$-5\cos(4t)$
2	8	10	16	$0{,}5\,v^2$	4	–	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0{,}3\,v$	–	2	$-2\cos(2t)$
4	6	15	12	$0{,}6\,v^2$	5	–	$-5\sin(2t)$
5	4,5	22	9	$0{,}5\,v$	–	3	$3t$
6	4	12	10	$0{,}8\,v^2$	2,5	–	$6\cos(4t)$
7	1,6	18	4	$0{,}4\,v$	–	2	$-3\sin(4t)$
8	4,8	10	10	$0{,}2\,v^2$	4	–	$4\cos(2t)$
9	3	22	9	$0{,}5\,v$	–	3	$4\sin(2t)$

Задачи рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Изобразить материальную точку в текущий момент времени.

2. Изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке.

3. Выбрать систему координат. Начало координат системы следует помещать в начальном положении точки и оси координат направлять так, чтобы координаты точки в текущий момент и проекции скорости ее на эти оси были положительными.

4. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки. При этом следует помнить, что в полученных дифференциальных уравнениях проекции всех сил необходимо выразить через те переменные, от которых эти силы зависят.

5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения движения точки. Способ интегрирования уравнений зависит от их вида.

6. Составить начальные условия движения по тексту задачи.

7. Используя начальные условия движения, определить произвольные постоянные интегрирования.

8. Найденные произвольные постоянные подставить в результат интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

9. Воспользовавшись полученным уравнением движения материальной точки, определить искомые величины.

Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки на участке AB, а затем на участке BC. При решении задачи следует учесть изложенный выше план решения задач.

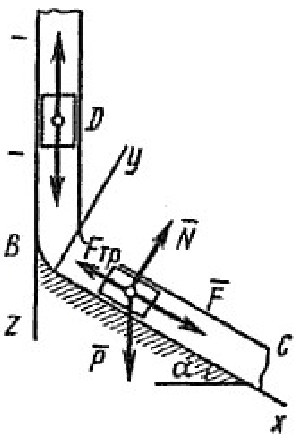


Рисунок Д1.1

Пример решения 1. На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1.1) на груз *D* массой m действуют: сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; расстояние от точки *A*, где $v = v_0$, до точки *B* равно l. На наклонном участке *BC* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m = 2 кг, $R = \mu v^2$, где μ = 0,4 кг/м, v_0 = = 5 м/с, l = 2,5 м, $F_x = 16\sin(4t)$. Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке *BC*.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } mv_z\frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении *все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят*. Учитывая, что $v_z = v$, получим

$$mv\frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v\frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - v^2\right). \qquad (1)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1},\ n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \qquad (2)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v \cdot \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \qquad (3)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2vdv}{v^2 - n} = -2kdz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \qquad (4)$$

По начальным условиям при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$, и из равенства (5) находим $\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$ или

$\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда $\ln\dfrac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz$ и $\dfrac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}$.

В результате находим $v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}$. (5)

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость v_B груза в точке B (v_0 = 5 м/с, число e = 2,7):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \text{ и } v_B = 6{,}4 \text{ м/с.} \tag{6}$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью $(v_0 = v_B)$. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x \text{ или } m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x, \tag{7}$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \tag{8}$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30° - 0{,}2\cos 30°) = 3{,}2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \tag{9}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \tag{10}$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент t = 0. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4$.

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \tag{11}$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \tag{12}$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t), \qquad (13)$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Пример решения 2

Дано: $m = 5$ *кг*, $v_0 = 20$ *м/с*, $R = \mu v^2$ *Н*, $\mu = 0{,}4$ *кг/м*, $t_1 = 1{,}5$ *с*, $k = 12$ *Н*, $f = 0$, $\alpha = 30°$, $F_x = k\sin 2\omega t$, $\omega = 2$ c^{-1}, $t = 1$ *с*.

Определить: $x = f(t)$, где $x = BD$, x_1, v.

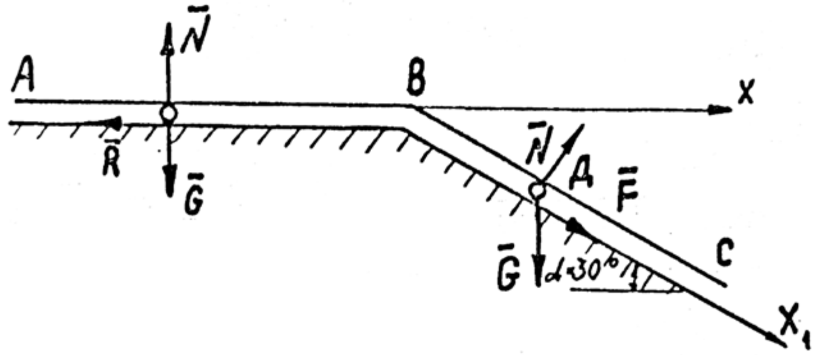


Рисунок Д1.2

Рассмотрим движение шара на участке AB. Принимаем шар за материальную точку, покажем действующие на него силы: силу тяжести $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу сопротивления $\vec{R}$ (рис. Д1. 2). Выбираем систему координат AX в соответствии с планом решения задачи. Составим дифференциальное уравнение движения шара на участке AB с учетом пункта 4 рекомендованного плана решения задачи.

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx} = -R = -\mu\dot{x}^2,$$

$$5\ddot{x} = -0{,}4\dot{x}^2, \qquad \ddot{x} = -0{,}08\dot{x}^2. \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -0{,}08\dot{x}^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -0{,}08\int dt; \quad \int\dot{x}^{-2}dx = -0{,}08\int dt.$$

$$\frac{\dot{x}^{-1}}{-1} = -0{,}08t + C_1; \quad -\frac{1}{\dot{x}} = -0{,}08t + C_1.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи: при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$. При $t = 0$ полученное выше равенство можно записать в виде $-\dfrac{1}{v_0} = C_1$. Отсюда $C_1 = -\dfrac{1}{20} = -0{,}05$. Тогда

$-\dfrac{1}{\dot{x}} = -0,08t - 0,05$; следовательно, скорость шара на участке AB определится из выражения $\dot{x} = \dfrac{1}{0,08t + 0,05}$. Зная время движения t_1 на участке AB, определим, какую скорость $\dot{x} = v_B$ будет иметь шар в точке B, $v_B = \dfrac{1}{0,08 \cdot 1 + 0,05} = 5,9$ *м/с*.

Рассмотрим движение шара на участке BC. На шар в соответсвии с условиями задачи действуют силы: сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{F}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Выбираем систему координат Bx_1.

Составим дифференциальное уравнение движения шара на участке BC: $m\ddot{x}_1 = \Sigma F_{kx_1} = G\sin\alpha + F_{x_1} = mg\sin 30^\circ + k\sin 2\omega t$. Разделив обе части равенства на m, можно записать $\ddot{x}_1 = 9,8\sin 30^\circ + \dfrac{12}{5}\sin 2 \cdot 2 \cdot t = 4,9 + 2,4\sin 4t$, или $\dfrac{d\dot{x}_1}{dt} = 4,9 + 2,4\sin 4t$. Разделяя переменные и интегрируя

$\int d\dot{x}_1 = \int 4,9dt + \int 2,4\sin 4tdt$, получим $\dot{x}_1 = 4,9t + \dfrac{2,4}{4}(-\cos 4t) + C_2$.

Это равенство можно представить в виде $\dfrac{d\dot{x}_1}{dt} = 4,9t + 0,6\cos 4t + C_2$.

Разделяя переменные и интегрируя, $\int dx_1 = \int 4,9tdt - \int 0,6\cos 4tdt + \int C_2 dt$, получим $x_1 = 4,9\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{0,6}{4}\sin 4t + C_2 t + C_3$. Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия на участке BC: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $x_0 = v_B$. Тогда при $t = 0$ $v_B = 5,9 = 0 - 0,6 + C_2$, откуда $C_2 = 6,5$.

Аналогично при $t = 0$ и $x_1 = x_0 = 0$ имеем $0 = C_3$, или $C_3 = 0$. Подставив C_2 и C_3 в уравнения для определения скорости и закона движения на участке BC, получим $\dot{x}_1 = 4,9t - 0,6\cos 4t + 6,5$, $x_1 = 2,45t^2 - 0,15\sin 4t + 6,5t$.

Тогда искомые скорость v и расстояние x_1 от точки B шара при $t = 1$ *с*

$v = \dot{x}_1 = 4,9 - 0,6\cos 4 + 6,5 = 4,9 - 0,6(-0,658) + 6,5 = 11,79$ *м/с*,

$x_1 = 2,45 - 0,15\sin 4 + 6,5 = 2,45 - 0,15(-0,759) + 6,5 = 10,09$ *м*.

Следовательно, окончательно закон движения шара на участке BC $\dot{x}_1 = 2,45t^2 - 0,15\sin 4t + 6,5t$, скорость $v = 4,79$ *м/с*, расстояние от точки B $x_1 = 10,09$ *м*.

Задача Д5

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где R = 1,2 м) массой m_1 = 24 кг вращается с угловой скоростью ω_0 = 10 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии $OC = b$ (рис. Д5.0 – Д5.9, табл. Д 5); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д5.0а (вид сверху).

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой m_1 = 8 кг по закону $s = AD = F(t)$, где s выражено в метрах, t – в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом M (задан в ньютонометрах; при $M < 0$ его направление противоположно показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т. е. угловую скорость платформы как функцию времени.

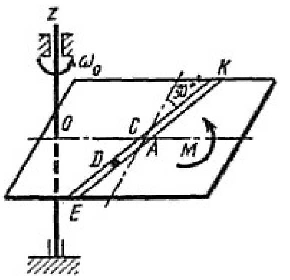


Рис. Д5.0

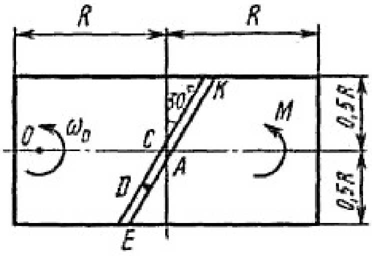


Рис. Д5.0а

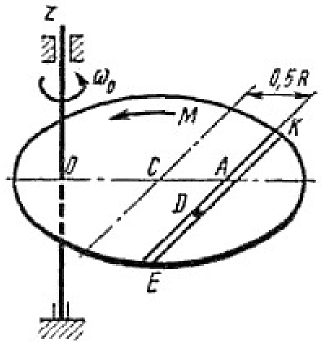


Рис. Д5.1

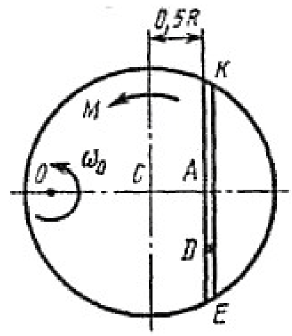


Рис. Д5.1а

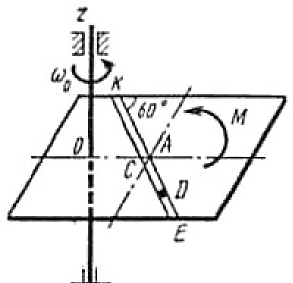


Рис. Д5.2

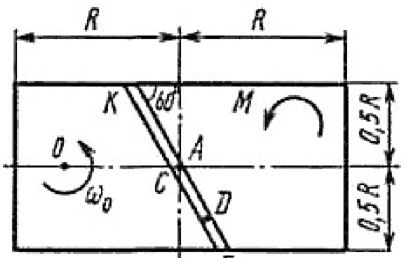


Рис. Д5.2а

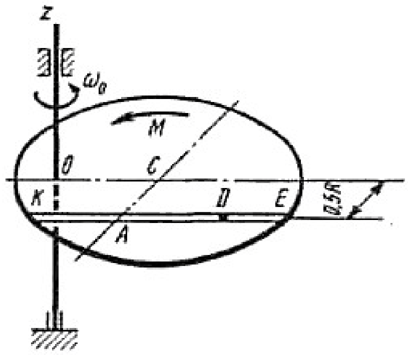


Рис. Д5.3

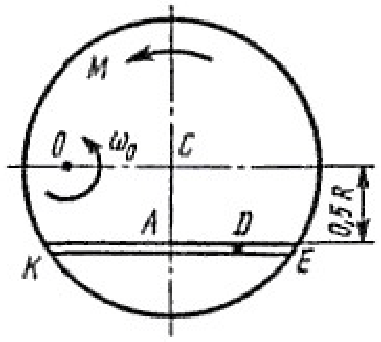


Рис. Д5.3а

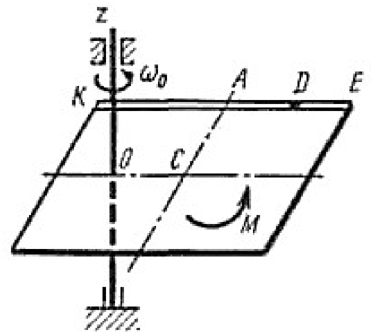


Рис. Д5.4

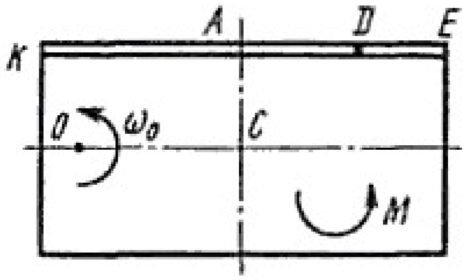


Рис. Д5.4а

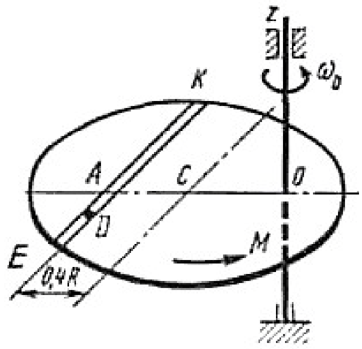


Рис. Д5.5

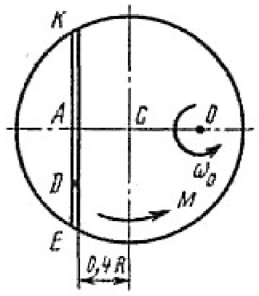


Рис. Д5.5а

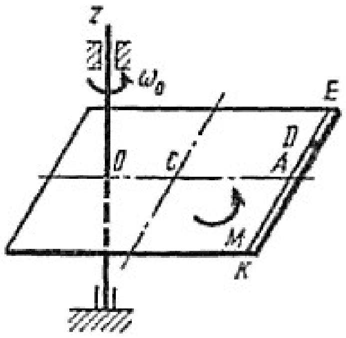


Рис. Д5.6

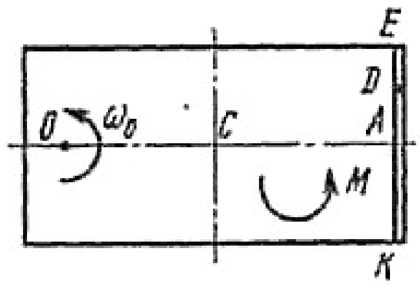


Рис. Д5.6а

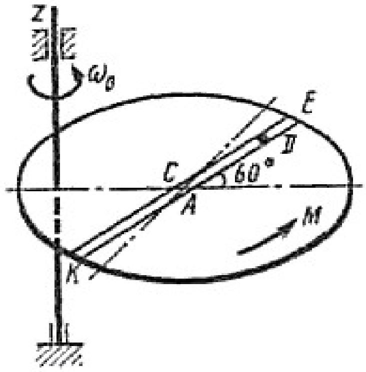


Рис. Д5.7

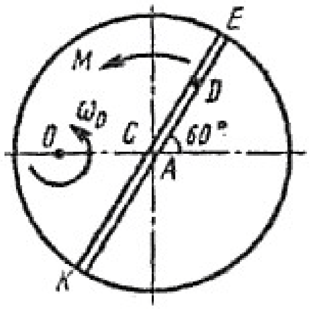


Рис. Д5.7а

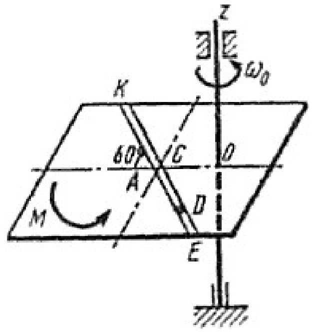


Рис. Д5.8

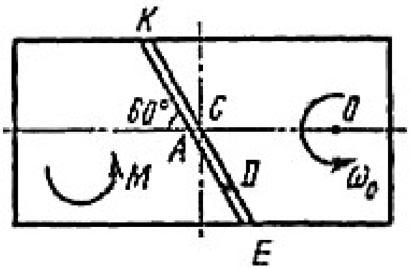


Рис. Д5.8а

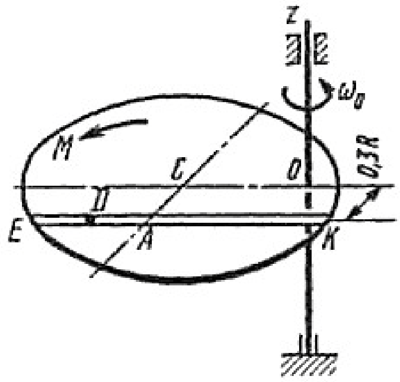


Рис. Д5.9

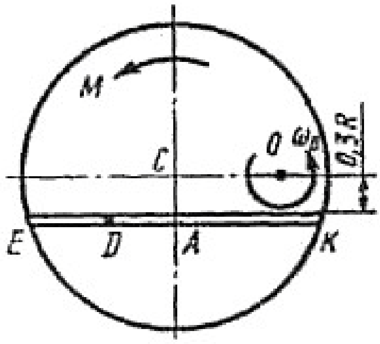


Рис. Д5.9а

Таблица Д5

Номер условия	b	$s = F(t)$	M
0	R	$-0{,}4t^2$	6
1	$R/2$	$0{,}6t^2$	$4t$
2	R	$-0{,}8t^2$	-6
3	$R/2$	$10t$	$-8t$
4	R	$0{,}4t^3$	10
5	$R/2$	$-0{,}5t$	$-9t^2$
6	R	$-0{,}6t$	8
7	$R/2$	$0{,}8t$	$6t^2$
8	R	$0{,}4t^3$	$-10t$
9	$R/2$	$0{,}5t^2$	$12t^2$

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором $s > 0$ (когда $s < 0$, груз находится по другую сторону от точки A). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии $OC = b$ от центра C.

Указания. Задача на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\bar{v}_{отн}$ и переносной $\bar{v}_{пер}$ скоростей, т.е. $\bar{v} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\bar{v} = m\bar{v}_{отн} + m\bar{v}_{пер}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой $m_z(m\bar{v}) = m_z(m\bar{v}_{пер}) + m_z(m\bar{v}_{отн})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примере Д5.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси z), как это сделано на рис. Д5.0,а – Д5.9,а.

Момент инерции пластины с массой m относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C, равен:

для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2 $\qquad I_{Cz} = m(a_1^2 + a_2^2)/12$;

для круглой пластины радиуса R $\qquad I_{Cz} = mR^2/2$.

Задачи с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.

2. Изобразить на рисунке все внешние силы системы.

3. Выбрать систему координат и направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения.

4. Записать теорему об изменении момента количеств движения (кинетического момента) системы относительно соответствующей оси.

5. Вычислить моменты внешних сил относительно неподвижной оси (если не заданы).

6. Вычислить моменты количеств движения (кинетический момент) системы относительно неподвижной оси и затем взять производную по времени от кинетического момента системы.

7. Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение и найти неизвестные величины задачи, т.е. в зависимости от условия решить прямую или обратную задачи динамики.

Задачи с помощью теоремы о сохранении кинетического момента системы рекомендуется решать в такой последовательности.

Выполнить указанные здесь пункты 1-4. Затем показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю; вычислить и приравнять кинетические моменты системы относительно оси в начальный и конечный моменты времени: $L_{1z} = L_{2z}$; решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

Пример 1

Дано: $m_1 = 24$ *кг*, $\omega = 10$ c^{-1}, $OC = h = R$, $R = 1{,}2$ *м*, $t_0 = 0$, $m_2 = 8$ *кг*,

$s = AD = 0{,}6 = const$, $M = 12t$ *Нм*, $t_1 = 1$ *с*.

Найти закон вращения платформы $\varphi = f_1(t)$.

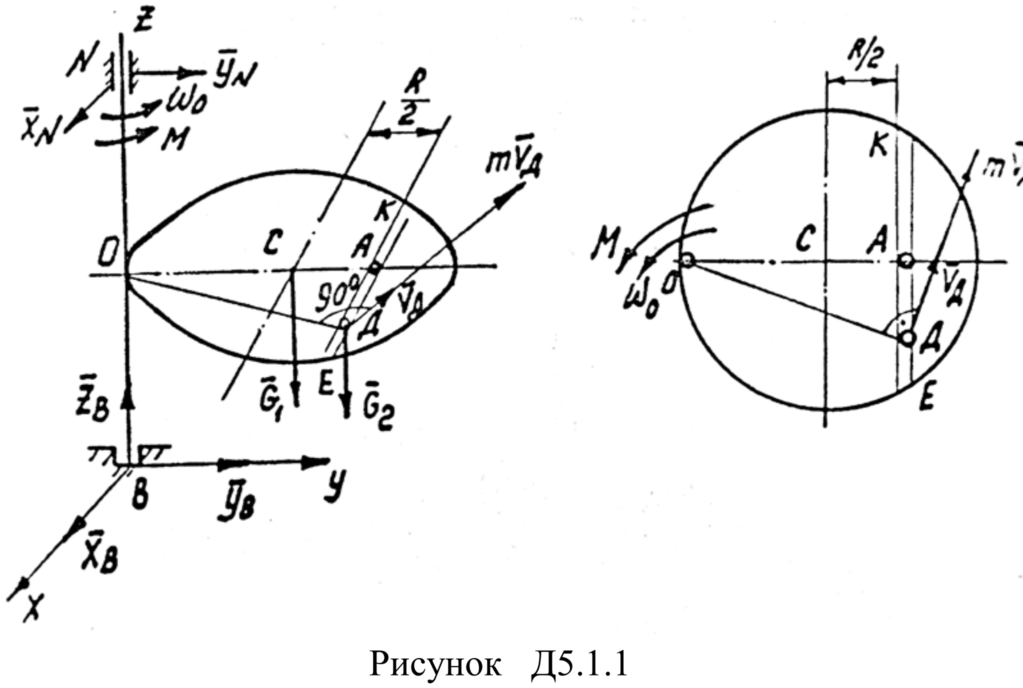


Рисунок Д5.1.1

Рассмотрим систему, состоящую из горизонтальной платформы и груза (рис. Д5.1.1).

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы $\frac{dL_z}{dt} = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e)$, где L_z – кинетический момент системы относительно оси z; $\Sigma m_z(\vec{F}_k^e)$– главный момент внешних сил системы относительно оси z. На систему за время от $t_0 = 0$ до $t\ = 1\ c$ действуют силы: $\vec{G}_1$ – сила тяжести платформы; $\vec{G}_2$– сила тяжести груза; пара сил с моментом M; реакции $\vec{X}_N$ и $\vec{Y}_N$ подшипника и $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ подпятника. $L_z = L_{z1} + L_{z2}$, где $L_{z1} = J\omega$ – кинетический момент горизонтальной платформы, вращающейся вокруг оси z; $L_{z2} = m_2 \cdot v_D \cdot OD$ – кинетический момент груза массой m_2 относительно оси z.

В свою очередь, момент инерции J_z горизонтальной платформы относительно оси z на основании теоремы Штейнера-Гюйгенса о зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей можно определить из равенства

$$J_z = J_{zc} + m_1 OC^2 = \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 = \frac{3}{2} m_1 R^2,$$

где J_{zc} – момент инерции платформы относительно оси, проходящей через ее центр масс C. Тогда

$$L_z = J_z\omega + m_2 v_2 \cdot OD = \frac{3}{2} m_1 R^2 \omega + m_2 \omega \cdot OD^2 =$$

$$= \left\{ \frac{3}{2} \cdot 24 \cdot (1,2)^2 + 8[(1,5 \cdot R)^2 + 0,6^2] \right\} \omega = 80,64\omega.$$

Силы $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ параллельны оси z, реакции подшипника и подпятника пересекают ось z. Моменты этих сил относительно оси z равны нулю. Поэтому главный момент M_{kx}^e внешних сил равен моменту M пары сил, т.е. $M_{kx}^e = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e) = M\ = 12t$.

Подставив L_z и $\Sigma m_z(\vec{F}_k^e)$ в исходное равенство, получим $\frac{d}{dt} 80,64\omega = 12t$; $80,64\frac{d\omega}{dt}12t$; $\frac{d\omega}{dt} = 0,15t$. Так как $\omega = \dot{\varphi}$, а $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}$, то данное уравнение можно записать в виде $\varphi = 15t$. Дважды проинтегрировав, получим $\dot{\varphi} = 0,15\frac{t^2}{2} + C_1$, $\varphi = 0,15\frac{t^3}{2 \cdot 3} + C_1 t + C_2$.

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, используя начальные условия. При $t = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, $\varphi_0 = 0$. Тогда при $t = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = 0 - C_1$, откуда $C_1 = \omega_0 = 10$, $\varphi = \varphi_0 = 0 = 0 + 0 + C_2$, откуда $C_2 = 0$.

С учетом C_1 и C_2 получим искомый закон вращения платформы в виде

$\varphi = 0,0025t^3 + 10t$ *рад*.

Пример 2

Пример решения. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. Д5.2.1). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент *M*, направленный противоположно ω_0; одновременно груз *D* массой m_2, находящийся в желобе *AB* в точке *C*, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

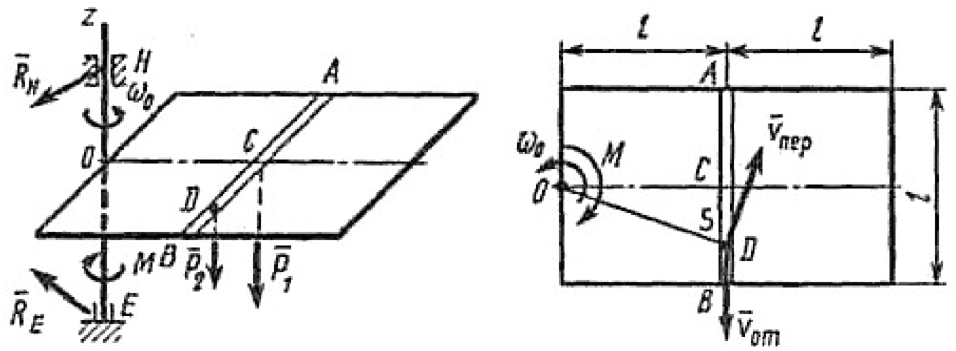


Рисунок Д5.2.1

Дано: m_1 = 16 кг, m_2 = 10 кг, l = 0,5 м, ω_0 = 2 с$^{-1}$, $s = 0,4t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), $M = kt$, где k = 6 Н·м/с. Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z(\overline{F}_k^e).$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, реакции $\overline{R}_E$, $\overline{R}_H$ и вращающий момент *M*. Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т. е. против хода часовой стрелки), получим $\Sigma m_z(\overline{F}_k^e) = -M = -kt$, и уравнение примет такой вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt.$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C_1.$$

Для рассматриваемой механической системы $K_z = K_z^{пл} + K_z^D$, где $K_z^{пл}$ и K_z^D – кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси z, то $K_z^{пл} = I_z\omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1 \cdot (OC)^2 = I_{Cz'} + m_1 l^2$ ($I_{Cz'}$ – момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр C платформы).

Но, как известно, $I_{Cz'} = m_1[(2l)^2 + l^2]/12 = 5m_1 l^2/12$.

Тогда $I_z = 5m_1 l^2/12 + m_1 l^2 = 17m_1 l^2/12$.

Следовательно, $K_z^{пл} = (17m_1 l^2/12)\omega$.

Для определения K_z^D обратимся к рис. Д5.2.1 и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{v} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$. Так как груз D движется по закону $s = CD = 0,4t^2$, то $v_{отн} = \dot{s} = 0,8t$; изображаем вектор $\bar{v}_{отн}$ с учетом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\bar{v}_{отн}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω_0, изображаем вектор $\bar{v}_{пер}(\bar{v}_{пер} \perp OD)$; численно $v_{пер} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона:

$$K_z^D = m_z(m_2\bar{v}) = m_z(m_2\bar{v}_{отн}) + m_z(m_2\bar{v}_{пер}) = -m_2 v_{отн} \cdot OC + m_2 v_{пер} \cdot OD$$

$$= -m_2 \cdot 0,8tl + m_2\omega(OD)^2.$$

Но на рисунке видно, что $OD^2 = t^2 + s^2 = l^2 + 0,16t^4$. Подставляя эту величину и значения K_z^D и $K_z^{пл}$ в равенство, получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12}m_1 l^2\omega + m_2\omega(l^2 + 0,16t^4) - m_2(0,8t)l = (8,17 + 1,6t^4)\omega - 4t.$$

Тогда уравнение, где $k = 6$, примет вид

$$(8,17 + 1,6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C_1.$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\omega = \omega_0$. Получим $C_1 = 8,17\omega_0 = 16,34$. При этом значении C_1 находим искомую зависимость ω от t. Ответ: $\omega = (16,34 + 4t - 3t^2)/(8,17 + 1,6t^4)$, где t – в секундах, ω – в с$^{-1}$.

Применение для решения задачи дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела

Когда система состоит из одного вращающегося твердого тела (платформа и жестко скрепленный с нею груз), можно сразу составить дифференциальные уравнения движения этого тела и проинтегрировать его, учитывая начальные условия.

Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени в соответствии с требованиями методики.

2. Направить одну из декартовых координат (ось z) по оси вращения твердого тела.

3. Изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу.

4. Вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения.

5. Записав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси $J_z\ddot{\varphi} = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e)$, подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции J_z твердого тела относительно оси вращения и решить, в зависимости от условия, прямую или обратную задачи. Выполнив пункты 1-4 рекомендованной последовательности решения задачи, запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$J_z\ddot{\varphi} = \Sigma m_z(\vec{F}_k^e) = M ,$$

где $J_z = J_{z1} + J_{z2}$, а $J_{z1} = J_{zc} + m_1 OC^2$, $J_{c2} = m_2 \cdot OD^2$. Тогда $J_z = J_{zc} + m_1 \cdot OC^2 + m_2 \cdot OD^2$.

Учитывая, что ранее подробно рассмотрено решение этой задачи, используемые здесь обозначения не поясняются, а представлены в виде формул. Студенту следует пояснить все используемые формулы и уравнения.

Следовательно,

$(J_{zc} + m_1 \cdot OC^2 + m_2 \cdot OD^2)\ddot{\varphi} = M = 12t$, или

$$\left\{\frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 + m_2[(1,5R)^2 + 0,6^2]\right\}\ddot{\varphi} = 12t$$

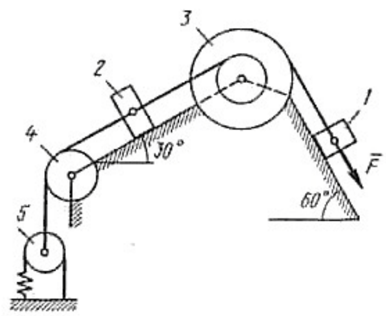
Тогда $80,64\ddot{\varphi} = 12t$ или $\ddot{\varphi} = 12t$. Получено то же самое дифференциальное уравнение. Искомый закон вращения платформы $\varphi = 0,0025t^3 + 10t$.

Задача Д6

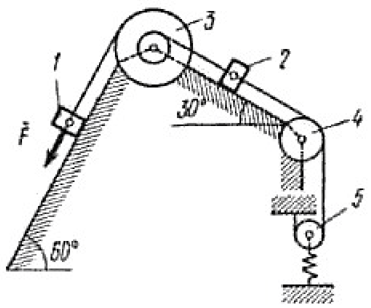
Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 = 0,2 м, блока 4 радиуса R_4 = 0,2 м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. Д 6.0 – Д 6.9, табл. Д 6.1); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Таблица Д 6.1

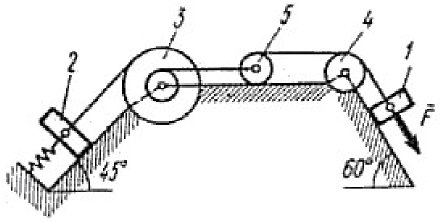
Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н/м	$F=f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	v_{C5}



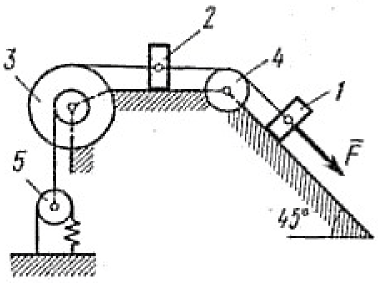
Д6.0



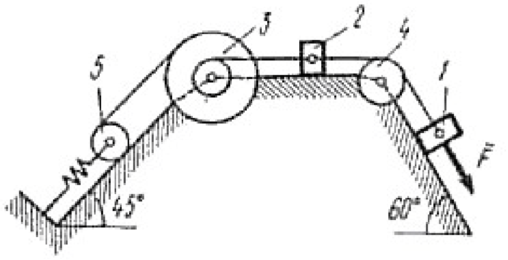
Д6.1



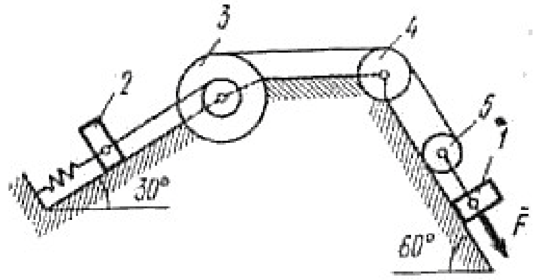
Д6.2



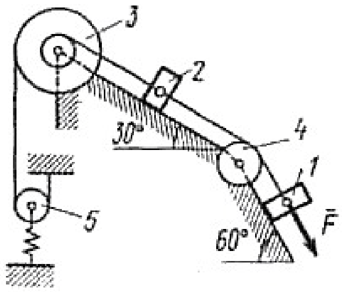
Д6.3



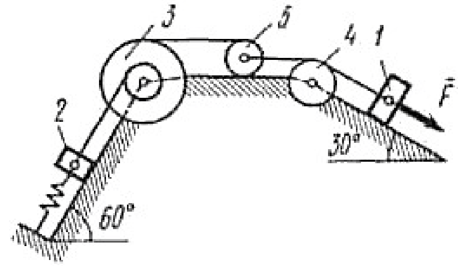
Д6.4



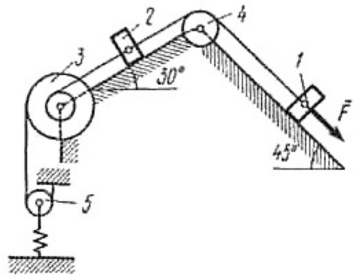
Д6.5



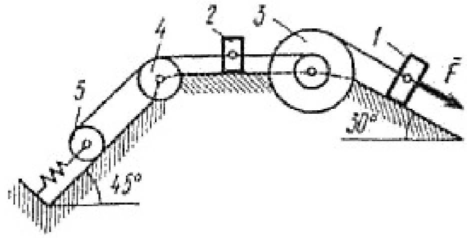
Д6.6



Д6.7



Д6.8



Д6.9

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение 5 станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы 6.1, где обозначено: v_1, v_2, v_{C5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если m_2 = 0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учитывая, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Теоремой об изменении кинетической энергии удобнее всего пользоваться в тех случаях, когда движущаяся система является неизменяемой, т.е. расстояния между точками системы остаются неизменными (частным случаем такой системы является абсолютно твердое тело). В этом случае теорема позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы, а при идеальных, не изменяющихся со временем связях – и наперед неизвестные реакции внешних связей.

Эту теорему целесообразно применять также в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: действующие силы системы, совершающие работу, начальные и конечные скорости точек или тел системы (линейные и угловые) и их перемещения. Неизвестна какая-нибудь одна величина, и ее нужно определить. При этом действующие силы должны быть постоянными или зависеть только от перемещений (расстояний).

Кроме того, эту теорему следует применять для определения ускорения движущихся тел. Для этого составляют, когда положение системы определяется одним параметром, уравнение теоремы на произвольном участке пути с последующим дифференцированием по времени обеих частей полученного равенства.

Решение задачи с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется проводить в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени и показать на рисунке все внешние и внутренние силы, действующие на систему (при неизменяемой системе – только внешние силы).

2. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы.

3. Вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях.

4. Вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы – только сумму работ внешних сил).

5. Воспользовавшись результатами вычислений пунктов 3 и 4 составить уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

6. Из полученного уравнения находим искомые неизвестные величины.

Пример 1

Дано: $m_1 = 0$, $m_2 = 4$ *кг*, $m_3 = 6$ *кг*, $m_4 = m_5 = 0$, $m_6 = 2$ *кг*, $c = 240$ *Н/м*, $M_c = 0{,}3$ *Нм*, $F = 40(3 + 8s)$ *Н*, $R_3 = 0{,}3$ *м*, $r_3 = 0{,}1$ *м*, $\rho_3 = 0{,}2$ *м*, $f = 0{,}1$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0{,}2$ *м* (рис. Д1.1).

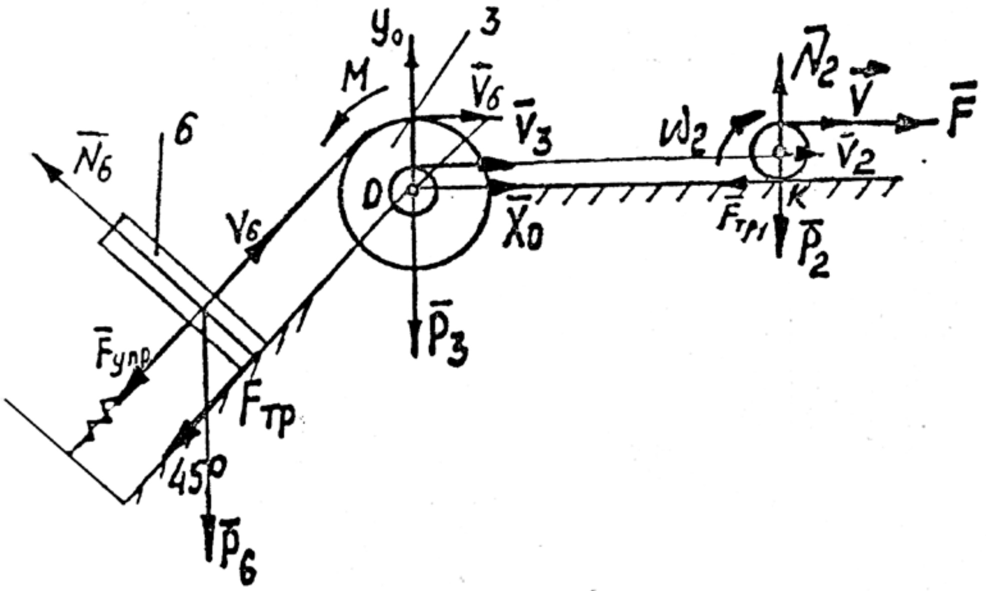


Рисунок Д1.1

Определить: угловое ускорение ε_3 ступенчатого шкива 3.

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i$.

Сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e. \qquad (1)$$

Здесь изменение кинетической энергии системы при ее перемещении равна сумме работ всех внешних сил системы на этом перемещении.

Кинетическая энергия системы в начальный момент времени $T_0 = 0$, так как система в начальный момент находилась в покое ($v_0 = 0$).

Кинетическая энергия системы в конечный момент времени

$$T_1 = T_2 + T_3 + T_6, \qquad (2)$$

где T_2, T_3, T_6 соответственно кинетические энергии катка 2, ступенчатого шкива 3 и груза 6. Так как движение катка 2 является плоскопараллельным, то его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_2 = T_{2вр} + T_{2пост}, \text{ где } T_{2пост} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2; \; T_{2вр} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

Момент инерции J_2 катка 2 относительно оси, перпендикулярной плоскости катка и проходящей через его центр, определяется из равенства $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, так как тело 2 является сплошным однородным цилиндром.

Так как каток катится без скольжения, то скорость точки касания его с неподвижной плоскостью равна нулю, т.е. эта точка является мгновенным центром вращения катка. Отсюда следует, что $v_2^2 = \omega_2 r_2$, поэтому угловая скорость вращения катка 2 $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2}$ и направлена в сторону скорости; каток вращается по ходу часовой стрелки.

Таким образом,

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 r_2^2}{2}\frac{v_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{4}m_2 v_2^2 = \frac{3}{4}m_2 v_2^2.$$

Выразим скорость v_2 центра катка через скорость v точки приложения силы F. Учитывая, что $\omega_2 = \frac{v}{2r_2} = \frac{v_2}{r_2}$, откуда $v_2 = \frac{v}{2}$. Тогда $T_2 = \frac{3}{4}m_2\frac{v^2}{4} = \frac{3}{16}m_2 v^2$.

Ступенчатый шкив 3 совершает вращательное движение. Кинетическую энергию вращающегося ступенчатого шкива находим по формуле

$$T_3 = \frac{1}{2}J_3\omega_3^2,$$

где момент инерции шкива 3 относительно оси, перпендикулярной оси вращения и проходящей через его центр – $J_3 = m_3\rho_3^2$, а $\rho_3 = 0{,}2$ *м* – радиус инерции относительно оси вращения. Угловая скорость шкива 3 $\omega_3 = \frac{v_3}{r_3} = \frac{v_2}{r_3}$, так как $v_2 = v_3$ (см. рис. Д1. 1) и направлена в сторону скорости v_3. Шкив 3 вращается по ходу часовой стрелки. Тогда

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \frac{v_3^2}{r_3^2} = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{4r_3^2} = \frac{1}{8} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{r_3^2}.$$

Груз 6 совершает поступательное движение со скоростью v_6. Скорость его перемещения определяется из соотношения

$$\frac{v_6}{v_3} = \frac{R_3}{r_3}, \text{ откуда } v_6 = v_3 \frac{R_3}{r_3} = \frac{v}{2} \frac{R_3}{r_3}.$$

Следовательно, кинетическая энергия груза 6

$$T_6 = \frac{1}{2} m_6 v_6^2 = \frac{1}{2} m_6 \frac{v^2}{4} \frac{R_3^2}{r_3^2} = \frac{1}{8} m_6 v^2 \frac{R_3^2}{r_3^2}.$$

Подставив найденные значения T_2, T_3 и T_6 в (2), получим

$$T_1 = \frac{3}{16} m_2 v^2 + \frac{1}{8} m_3 \rho_3^2 \frac{v^2}{r_3^2} + \frac{1}{8} m_6 v^2 \frac{R_3^2}{r_3^2} =$$

$$= \frac{v^2}{16}\left(3m_2 + 2m_3 \frac{\rho_3^2}{r_3^2} + 2m_6 \frac{R_3^2}{r_3^2}\right) = \frac{v^2}{16}\left(3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{0,01} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{0,09}{0,01}\right) = 6v^2$$

Окончательно имеем $T_1 = 6v^2$.

Перейдем к вычислению суммы работ всех внешних сил, приложенных к данной системе (рис. Д1. 1) при ее перемещении на расстояние s_1.

$$\Sigma A_k^e = A_F + A_{P_2} + A_{N_2} + A_{P_3} + A_{X_0} + A_{Y_0} + A_M + A_{P_6} + A_{N_6} + A_{F_{тр}} + A_{F_{упр}} + A_{F_{тр}}. \qquad (3)$$

Работа силы $\vec{F}$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, очевидно, будет $A_F = \int_0^s F ds = \int_0^s 40(3+8s) ds = 120s + 160s^2$.

Работы каждой из сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_6$ равны нулю, так как они перпендикулярны перемещению катка 3 и груза 6, т.е. $A_{P_2} = A_{N_2} = A_{N_6} = 0$. Так как силы $\vec{P}_3$, $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ приложены в неподвижной точке O, то работы каждой из этих сил равны нулю, т.е. $A_{P_3} = A_{X_0} = A_{Y_0} = 0$.

Работа постоянного момента M сил сопротивления равна произведению момента сил сопротивления на угол φ_3 поворота ступенчатого шкива, взятому со знаком минус, так как направление момента сил сопротивления противоположно направлению угловой скорости ступенчатого шкива; следовательно, $A_M = -Mv$.

Учитывая, что зависимость между перемещениями точек или углами поворота тел будет такой же, как между соответствующими линейными и угловыми скоростями, можно записать $s_2 = s_3 = \dfrac{s}{2}$, $\varphi_3 = \dfrac{s_3}{r_3} = \dfrac{s}{2r_3}$.

Тогда работа $A_M = -M\,\dfrac{s}{2r_3}$.

Работа силы тяжести P_6 будет $A_{P_6} = -P_6 h_6$,

где h_6 – вертикальное перемещение центра тяжести груза 6. Работа отрицательна, так как начальное положение центра тяжести груза ниже конечного.

Из рис. Д1. 1 $h_6 = s_6 \sin 45^\circ$, а s_6 на основании изложенной выше зависимости определяется из выражения $\dfrac{s_6}{s_3} = \dfrac{R_3}{r_3}$, $s_6 = s_3 \dfrac{R_3}{r_3}$.

Поэтому работа $A_{P_6} = -P_6 s_6 \sin 45^\circ = -m_6 g \dfrac{s}{2}\dfrac{R_3}{r_3}\sin 45^\circ$.

Работа силы трения скольжения, учитывая направление перемещения груза 6, определится из выражения $A_{F_{тр}} = -F\ \ s_6$, где $F_{тр} = f_6 N_6$ – сила трения скольжения груза 6 о плоскость, s_6 – найденное выше перемещение центра тяжести груза 6. Учитывая, что реакция $N_6 = P_6 \cos 45^\circ$, можно записать

$$A_{F_{тр}} = -fN_6 s_6 = -fP_6 \cos 45^\circ s_6 = -fm_6 g \cos 45^\circ \frac{s}{2}\frac{R_3}{r_3}.$$

Работа силы $\vec{F}_{тр_1}$ $A_{F_{тр_1}} = 0$, так как точка K, где приложена сила $\vec{F}_{тр_1}$ – мгновенный центр скоростей, и скорость точки K равна нулю.

Следовательно,

$$A_{F_{упр}} = \frac{c}{2}\left(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2\right) = \frac{c}{2}\left(0 - s_6^2\right) = -\frac{c}{2}\frac{s^2}{4}\frac{R_3^2}{r_3^2},$$

где начальное удлинение пружины $\Delta l_1 = 0$, а конечное $-\Delta l_2 = s_6$.

Подставим найденные значения в (3), получим

$$\Sigma A_k^e = 120\cdot s + 160\cdot s^2 - M\frac{s}{2r_3} - m_6 g\frac{s}{2}\frac{R_3}{r_3}\sin 45^\circ - fm_6 g\cos 45^\circ\frac{s}{2}\frac{R_3}{r_3} - \frac{c}{2}\frac{s^2}{4}\frac{R_3^2}{r_3^2} =$$

$$= s(120 + 160\cdot s - 2\cdot 9{,}8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}3}{0{,}1}\cdot\sin 45^\circ - \frac{0{,}3}{2\cdot 0{,}1} - 0{,}1\cdot 2\cdot 9{,}8\cdot\cos 45^\circ\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}3}{0{,}1} -$$

$$-\frac{240}{2}\cdot\frac{s}{4}\cdot\frac{0{,}09}{0{,}01}) = s(87{,}6 + 133\cdot s).$$

Подставим значения T_0, T_1 и ΣA_k^e в (1), окончательно получим

$$6v^2 = s(87{,}6 + 133s)\,. \tag{4}$$

Возьмем производную от обеих частей равенства (4), получим

$$6\cdot 2\cdot v\cdot\frac{dv}{dt} = v(87{,}6 + 266s)\,.$$

Сократив на v, имеем $a = \frac{dv}{dt}\frac{87{,}6 + 266\cdot 0{,}2}{12} = \frac{140{,}8}{12} = 11{,}7$ *м/с²*.

Выше отмечено, что $\omega_2 = \frac{v}{2r_2} = \frac{v_2}{r_2}$. Возьмем производную от частей данного равенства, получим

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{2r_2}\right) = \frac{dv_2}{dt}\left(\frac{1}{r_2}\right),$$

где $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, $\frac{dv}{dt} = a$ – вращательное ускорение точки обода катка 2, $\frac{dv_2}{dt} = a_2$ – ускорение центра катка 2. С учетом отмеченного угловое ускорение колеса 2 $\varepsilon_2 = \frac{a}{2r_2} = \frac{a_2}{r_2}$, откуда $a_2 = \frac{a}{2}$. Следовательно, искомое угловое ускорение шкива 3 определится из равенства

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_2}{r_3} = \frac{a}{2r_3},\ \varepsilon_3 = \frac{11{,}7}{2\cdot 0{,}1} = 58{,}5\ c^{-2}.$$

При определении ускорения a точки, движущейся прямолинейно, или углового ускорения ε вращающегося тела (здесь ε_3 ступенчатого шкива 3) следует выразить кинетическую энергию через скорость v этой точки, или угловую скорость ω тела, а в выражении работы все перемещения выразить через перемещения x той же точки или угол поворота φ того же тела. После этого воспользоваться теоремой в дифференциальной форме. Чтобы найти искомое значение a (или ε) при $s = s_1$, надо в полученном результате выразить x (или φ) через s, а затем положить $s = s_1$.

С учетом рекомендации методики при решении задачи следовало бы все кинематические характеристики и выражения работ сил для рассматриваемой системы выразить через параметры ступенчатого шкива 3, воспользоваться рекомендациями методики и получить искомое ускорение ε_3 ступенчатого шкива.

Учитывая, что полученное здесь равенство (4) применимо для определения кинематических характеристик катка 2, а не ступенчатого шкива 3, преобразуем равенство (4) применительно к ступенчатому шкиву 3. Учитывая, что $v_3 = v_2 = \dfrac{v}{2}$, $s_3 = s_2 = \dfrac{s}{2}$, т.е. $v = 2\omega_3 r_3$, $s = 2r_3\varphi_3$, равенство (4) можно записать в виде $24\omega_3^2 r_3^2 = 2r_3\varphi_3(87{,}6 + 133r_3\varphi_3)$, или

$$12\omega_3^2 r_3 = 87{,}2\varphi_3 + 133r_3\varphi_3^2. \qquad (5)$$

Возьмем производную от обеих частей равенства (5), получим

$$12r_3 \cdot 2\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 87{,}2\frac{d\varphi_3}{dt} + 133r_3 \cdot 2 \cdot \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}.$$

Учитывая, что $\dfrac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3$, $\dfrac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$, сократив обе части равенства на ω_3, получим $24r_3\varepsilon_3 = 87{,}2 + 266r_3\varphi_3$. Здесь $r_3\varphi_3 = s_3 = s_1$, тогда равенство принимает вид $24r_3\varepsilon_3 = 87{,}2 + 266s_1$.

Искомое ε_3 определится из выражения

$$\varepsilon_3 = \frac{87{,}2 + 266s_1}{24r_3} = \frac{87{,}2 + 266 \cdot 0{,}2}{24 \cdot 0{,}1} = 58{,}5 \ 1/c^2.$$

Если же использовать рекомендации методики применительно к уравнению (4), то получим уравнение аналогичное (5) для катка 2. Это позволит определить ε_2, но не ε_3. Для определения искомого ε_3 потребуется найти $a_3 = a_2$, т.е. практически повторить изложенное здесь решение задачи по определению a_2.

Поэтому для определения искомой величины ε_2 следует, как основной вариант решения, воспользоваться рекомендациями методики. Можно также решить задачу так, как здесь изложено, или из уравнения (4) получить уравнение (5) и определить искомую величину.

Пример 2

Пример решения задачи. Механическая система (рис. Д2.1) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

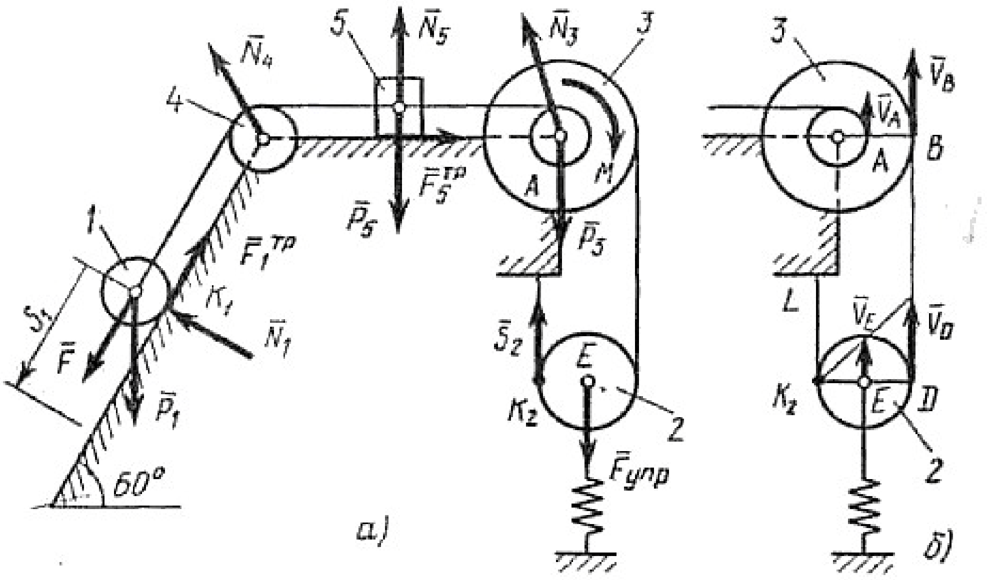


Рисунок Д2.1

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: m_1 = 8 кг, m_2 = 0, m_3 = 4 кг, m_4 = 0, m_5 = 10 кг, R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, c = 240 Н/м, M = 0,6 Н·м, $F = 20(3+2s)$ Н, s_1 = 0,2 м. Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{F}_{упр}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_3$, $\bar{N}_4$, $\bar{N}_5$, натяжение нити $\bar{S}_2$, силы трения $\bar{F}_1^{тр}$, $\bar{F}_5^{тр}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \tag{2}$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$\begin{gathered} T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2}I_{C1}\omega_1^2; \\ T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2,\ T_5 = \frac{1}{2}m_5 v_5^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3$, где A — любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3;\ \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3\frac{r_3}{r_1}. \tag{4}$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5m_1r_1^2;\ I_3 = m_3\rho_3^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенство (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4}m_1r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5r_3^2\right)\omega_3^2. \tag{6}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60°;\quad A(\overline{F}_5^{тр}) = -F_5^{тр}s_5 = -fP_5s_1;$$

$$A(M) = -M\varphi_3;\qquad A(\overline{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{тр}$ и $\overline{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{P}_4$ – неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = v_A / r_3 = v_{C1} / r_3$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / r_3$.

Далее, из рис. Д2.1 видно, что $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити $K_2 L$), то $v_E = 0{,}5 v_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\Sigma A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \qquad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3. Ответ: $\omega_3 = 8{,}1$ с$^{-1}$.

Задача Д8

Вертикальный вал *АК* (рис. Д8.0 – Д8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в столбце 2 (*AB* = *BD* = *DE* = *EK* = = a). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой m = 10 кг, состоящий из частей 1 и 2 (размеры частей стержня показаны на рисунках, где b = 0,1 м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой m_3 = 3 кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице Д8 в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в столбцах 5–8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять a = 0,6 м.

Таблица Д8

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке ломаного стержня	Крепление в точке невесомого стержня	α, град	β, град рис. 0—4	γ, град рис. 5—9	φ, град
1	2	3	4	5	6	7	8
0	*B*	*D*	*K*	45	135	225	60
1	*K*	*B*	*D*	60	240	150	45
2	*K*	*E*	*B*	30	210	120	60
3	*D*	*K*	*B*	60	150	240	30
4	*K*	*D*	*E*	30	120	210	60
5	*E*	*B*	*K*	45	225	135	60
6	*E*	*D*	*K*	60	60	150	30
7	*K*	*B*	*E*	30	30	120	60
8	*D*	*E*	*K*	60	150	60	30
9	*E*	*K*	*D*	30	120	210	60

Указания. Задача на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\overline{R}^u$, то численно $R^u = ma_C$, где a_C – ускорение центра масс *C* тела, но линия действия силы $\overline{R}^u$ в общем случае не проходит через точку *C*.

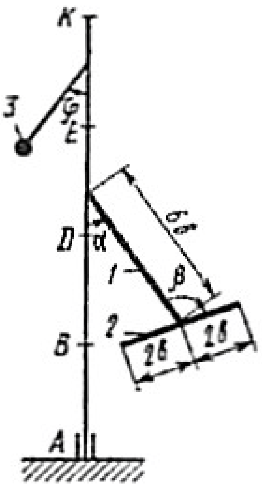


Рис. Д.8.0

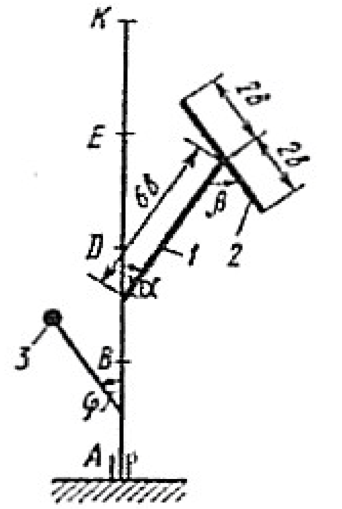


Рис. Д.8.1

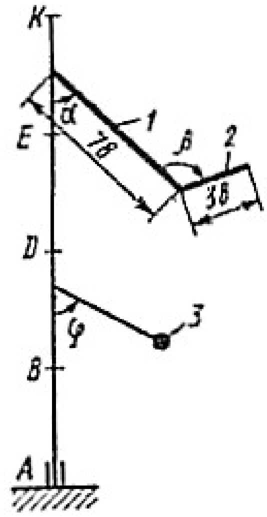


Рис. Д.8.2

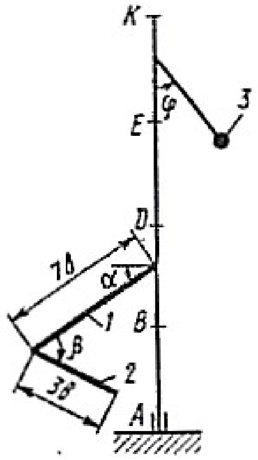


Рис. Д.8.3

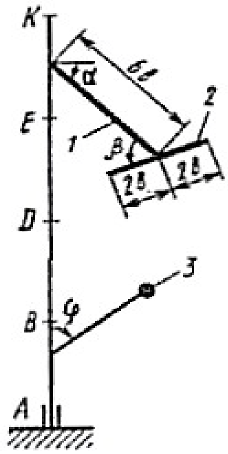


Рис. Д.8.4

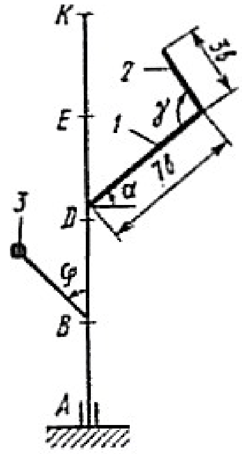


Рис. Д.8.5

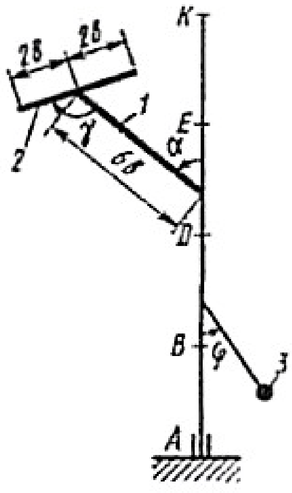


Рис. Д.8.6

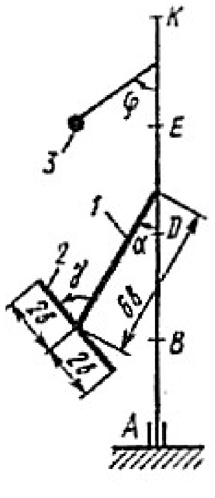


Рис. Д.8.7

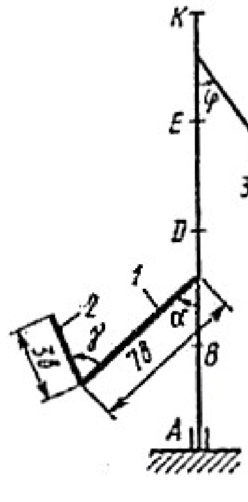


Рис. Д.8.8

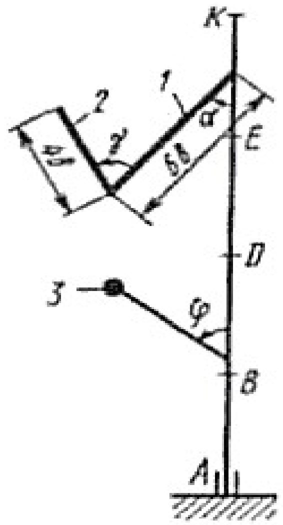


Рис. Д.8.9

Решение задачи с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке активные силы, действующие на точки системы.
3. Освободить систему от связей, заменить действия связей реакциями, наложенными на каждую из материальных точек системы.
4. Добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек системы.
5. Выбрать системы координат.
6. Составить уравнения равновесия системы сил.
7. Решить составленную систему уравнений, определить искомые величины.

Пример 1. Вертикальный вал длиной $3a(AB = BD = DE = a)$, закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. Д8.1.1), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей 1 и 2, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

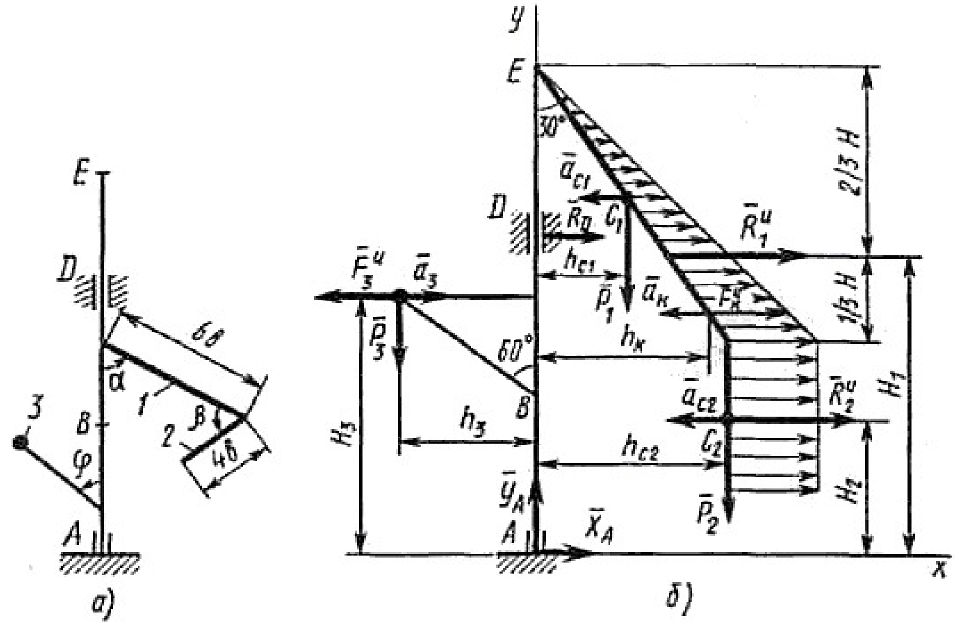


Рисунок Д8.1.1

Дано: ω = 8 с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, m_3 = 2 кг, α = 30°, β = 150°, φ = 60°, a = 0,3 м, b = 0,1 м. Определить: реакции подпятника A и подшипника D, пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. Д8.1.1). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны

$$m_1 = 0,6m;\ m_2 = 0,4m;$$

$$P_1 = 0,6mg;\ P_2 = 0,4mg;\ P_3 = m_3 g. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и реакции связей — составляющие реакции подпятника $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\bar{R}_D$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^u$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^u = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k – масса элемента. Так как все F_k^u пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 — прямоугольник (рис. 8.1.1).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^u = m a_C$, где m – масса тела, a_C – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^u = m_1 a_{C1};\; R_2^u = m_2 a_{C2}. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^u = m_3 a_3. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1},\; a_{C2} = \omega^2 h_{C2},\; a_3 = \omega^2 h_3, \qquad (4)$$

где h_{C1}, h_{C2} – расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 – соответствующее расстояние груза:

$$\begin{gathered} h_{C1} = 3b\sin 30^\circ = 0{,}15 \text{ м};\; h_{C2} = 6b\sin 30^\circ = 0{,}3 \text{ м}; \\ h_3 = l\sin 60^\circ = 5b\sin 60^\circ = 0{,}43 \text{ м}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учитывая (5), получим числовые значения R_1^u, R_2^u и F_3^u:

$$\begin{gathered} R_1^u = 0{,}6 m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6 \text{ Н};\; R_2^u = 0{,}4 m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8; \\ F_3^u = m_3\omega^2 h_3 = 55{,}0. \end{gathered} \qquad (6)$$

При этом линии действия равнодействующих $\bar{R}_1^u$ и $\bar{R}_2^u$ пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\bar{R}_1^u$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника *E*, где $H = 6b\cos 30^\circ$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\Sigma F_{kx} = 0;\; X_A + R_D + R_1^и + R_2^и - F_3^и = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} = 0;\; Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$
$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0; \qquad (7)$$
$$-R_D \cdot 2a - P_1 h_{C1} - P_2 h_{C2} + P_3 h_3 - R_1^и H_1 - R_2^и H_2 + F_3^и H_3 = 0,$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи сил $\overline{R}_1^и$, $\overline{R}_2^и$, $\overline{F}_3^и$ относительно точки *A*, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30° = 0{,}52$ м)

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \text{ м},\;\; H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18 \text{ м},$$
$$H_3 = a + l\cos 60° = 0{,}55 \text{ м}. \qquad (8)$$

Подставив в уравнение (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33{,}7$ Н; $Y_A = 117{,}7$ Н; $R_D = -45{,}7$ Н.

Пример 2. С невесомым валом *AB,* вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень *OD* длиной L и массой m, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д8.2.1).

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30°$, $\ell = 0{,}5$ м, $m_1 = 3$ кг, $m_г = 2$ кг, $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Определить: реакции подпятника *A* и подшипника *B*.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала *AB,* стержня *OD* и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси *A xy* так, чтобы стержень лежал в плоскости *xy,* и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ составляющие $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$ реакции подпятника и реакцию $\overline{X_B}$ подшипника.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно (ω= =const), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a_{nk}}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k –

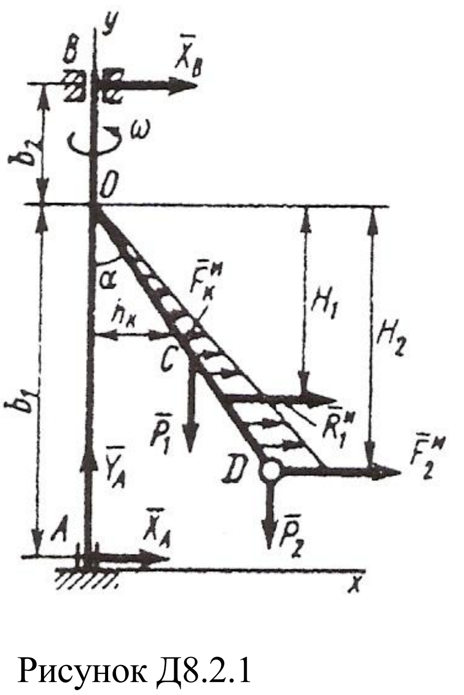


Рисунок Д8.2.1

расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\overline{F}_k^{И}$ будут направлены от оси вращения и численно $F_k^И = \Delta m a_{nk} = \Delta m \omega^2 h_k$, где Δm – масса элемента. Поскольку все пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник, и их можно заменить равнодействующей , линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины *O,*

где $H_1 = 2/3 \cdot H_2$ $(H_2 = \ell \cos a)$.

Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^И = m_1 a_C$, где a_C – ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня, $a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C = \omega^2$ OCsin a (OC = $\ell/2$). В результате получим $R_1^И = m_1\omega^2 (\ell/2) \sin a = 13{,}5$Н.

Аналогично для силы инерции $\overline{F}_2^{И}$ груза найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а численно $F_2^И = m_2\omega^2 \ell \sin a = 18$ Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости *xy,* то и реакции подпятника *A* и подшипника *B* тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + R_1^И + F_2^И = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_B(\overline{F}_k) = 0; \quad X_A(b_1 + b_2) - P_1(l/2)\sin\alpha - P_2 l \sin\alpha +$$
$$+ R_1^И(H_1 + b_2) + F_2^И(H_2 + b_2) = 0. \qquad (3)$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -11{,}8$ Н, $Y_A = 49{,}1$ *Н,* $X_B = -19{,}7$ Н. Знаки указывают, что силы и $\overline{X}_B$ направлены противоположно показанным на рис. Д8.2.1.

Пример 3 В данном примере изложено решение задачи тремя способами. Студенту рекомендуется решить задачу в общем виде, как это выполнено в варианте 2. В качестве проверки правильности выполненного решения можно использовать вариант 1 или основной вариант решения.

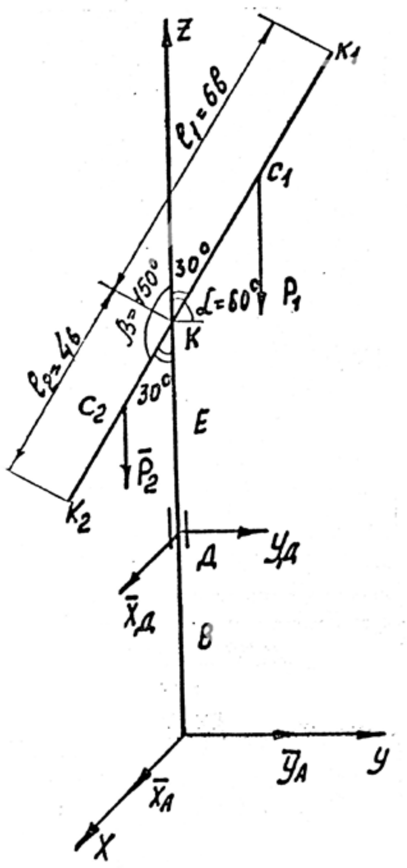


Рисунок Д8.3.1

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\omega = 10$ с$^{-1}$ $= const$, $AB = BD = DE = EK = a = 0,4$ *м*, $m = 10$ *кг*, $b = 0,1$ *м* (рис. Д8.3.1).

Определить: x_A, y_A, z_A, x_D, y_D.

Решение. Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера: рассмотрим систему, находящуюся в равновесии под действием заданных активных сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, реакций связей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D$ и сил инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ (рис. Д 8.3.1).

Так как $\omega = const$, рассмотрим только центробежные силы $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ инерции каждого стержня. Главный вектор сил инерции точек вращающегося тела определяется по формуле

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c, \qquad (1)$$

где m – масса тела, а $\vec{a}_c$ – ускорение центра тяжести тела.

В формуле (1) знак «-» показывает, что сила инерции направлена против ускорения. Дав такое направление, например, силе $\vec{\Phi}_1$ (см. рис. Д8.3.1 и Д8.3.2), мы тем самым учитываем знак «минус» и в дальнейшем считаем силу $\vec{\Phi}_1$ положительной.

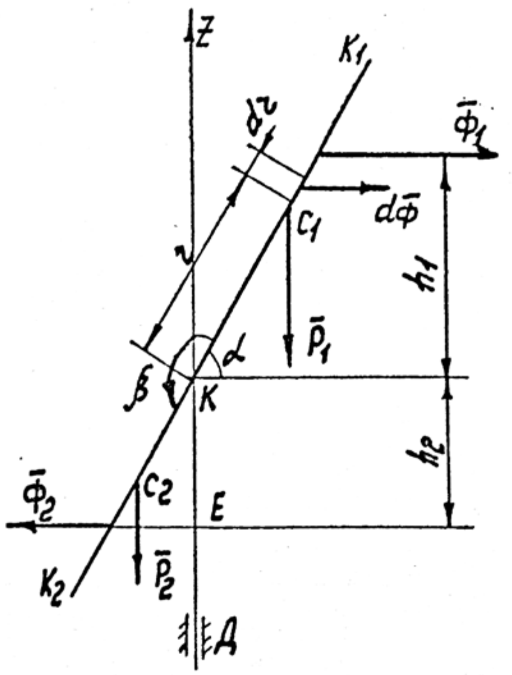


Рисунок   Д8.3.2

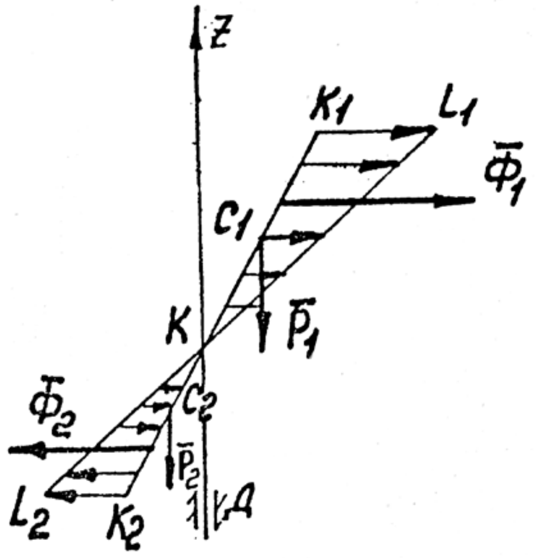


Рисунок   Д8.3.3

Равнодействующая сил инерции точек тела равна их главному вектору. Однако при решении следует иметь в виду, что в тех случаях, когда силы инерции приводятся к равнодействующей, последняя совпадает по величине и направлению с главным вектором этих сил. Но равнодействующая сил инерции необязательно проходит через центр масс тела, хотя величина и ее направление всегда определяются по формуле (1). Поэтому для стержней KK_1 и KK_2

$$\Phi_1 = m_1 a_{c_1} = m_1\omega^2 \frac{1}{2} KK_1 \cos\alpha = m\omega^2 \frac{1}{2} 6\cdot b\cdot \cos\alpha = \omega^2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 0{,}1\cdot\cos 60^\circ = 90\ H.$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{c_2} = m_2\omega^2 \frac{1}{2} KK_2 \cos(\beta - 90^\circ) = \omega^2 m_2 \frac{1}{2}\cdot 4b\cdot\cos 60^\circ = 100\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 0{,}1\cdot\frac{1}{2} = 40\,H$$

Масса всего стержня $m = m_1 + m_2 = 4b\gamma + 6b\gamma = 10b\gamma$, где $b = 0{,}1$ *м*, $\gamma = \dfrac{10\ кг}{10b} = 10$ *кг/м*. Тогда масса m_1 стержня KK_1 равна $6b\gamma = 6$ *кг*, а масса m_2 стержня KK_2 $4b\gamma = 4$ *кг*.

Для определения реакций подпятника в точке A и подшипника в точке D необходимо знать точки приложения сил $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$.

Так как сумма моментов параллельных сил инерции точек стержня относительно точки K равна моменту равнодействующих этих сил, то

$$\Phi_1 h_1 = \int_0^{l_1} r \sin\alpha d\Phi, \tag{2}$$

где h_1 – плечо силы $\vec{\Phi}_1$ относительно точки K, $d\Phi$ – элементарная сила инерции момента стержня длиной dr, r – координата элемента стержня (рис. Д8.3.3).

Подставив значение Φ_1 и $d\Phi = m_i a_i = \gamma_i dr\omega^2 r\cos\alpha$, где γ – масса участка стержня единичной длины, в уравнение (2) и сократив обе части неравенства на ω^2 и $\cos\alpha$, получим

$$m_1 \frac{1}{2} KK_1 h_1 = \gamma_1 \sin\alpha \int_0^{l_1} r^2 dr,$$

$$m_1 \frac{1}{2} l_1 h_1 = \gamma_1 \sin\alpha \frac{r^3}{3}\Big|_0^{l_1} = \gamma \sin\alpha \frac{l^3}{3} = \gamma_1 l_1 \sin\alpha \frac{l_2}{3}, \text{ где } \gamma l_1 = m_1.$$

Сокращая обе части равенства на m_1 и l_1, получим $\frac{1}{2} h_1 = \sin\alpha \frac{l_1}{3}$. Откуда $h_1 = \frac{2}{3} l_1 \sin\alpha = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot b \cdot \sin 60° = 0{,}35$ *м*. Рассматривая аналогично для стержня l_2, получим $h_2 = \frac{2}{3} l_2 \cos 30° = \frac{2}{3} \cdot 4b \cdot \cos 30° = 0{,}23$ *м*.

Согласно принципу Даламбера, силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, подшипника $\vec{X}_D, \vec{Y}_D$ и силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$, должны удовлетворять уравнениям статики:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_D = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A + Y_D + \Phi_1 - \Phi_2 = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma F_{kz} = Z_A - P_1 - P_2 = 0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_x(\vec{F}_k) = -Y_D \cdot AD - P_1 \frac{KK_1}{2} \cos\alpha + \\ + P_2 \frac{KK_2}{2} \cos(\beta - 90°) - \Phi_1 (AK + h_1) + \Phi_2 (AK - h_2) = 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Sigma m_y(\vec{F}_k) = X_D \cdot AD = 0; \tag{7}$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (7) $X_D = 0$.

Из уравнения (3) $X_A = -X_D = 0$.

Из уравнения (5) $Z_A = P_1 + P_2 = P = mg = 10 \cdot 9{,}8 = 98$ *Н*.

Из уравнения (6)
$-Y_D \cdot 2 \cdot 0,4 - mg \cdot 3b \cdot \cos 60° + m_2 \cdot 2b \cos 60° - 90(4 \cdot 0,4 + 0,35) +$
$+40(4 \cdot 0,4 - 0,23) = 0,$
или $-Y_D \cdot 0,8 - 8,82 + 3,92 - 175,5 + 54,80 = 0$. Тогда $Y_D = -150,6$ *Н*.
Из уравнения (4) $Y_D = -Y_D - \Phi_1 + \Phi_2 = -(-150,6) - 90 + 40 = 100,6$ *Н*.

Знак «минус» у реакции Y_D показывает, что она имеет направление, противоположное показанному на чертеже.

Другое решение (вариант 1). Пользуясь принципом Даламбера, присоединяем к действующим на систему внешним силам $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, x_A, y_A, z_A, x_D, y_D силу инерции. Для каждого элемента стержня с массой dm центробежная сила инерции равна $dm\omega^2 y$, где y – расстояние элемента от оси вращения AZ (рис. Д8.3.2). Равнодействующая этих распределенных по линейному закону параллельных сил проходит через центр тяжести треугольника KK_1L_1, который лежит в точке пересечения его медиан, т.е. на расстоянии $h_1 = \frac{2}{3} l_1 \sin\alpha$ от оси, параллельной AY и проходящей через точку K. Так как эта равнодействующая равна главному вектору сил инерции, то по формуле (1)

$$\Phi_1 = m_1 a_{c_1} = m_1 \omega^2 y_{c_1} = m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2} \cos\alpha .$$

Рассматривая аналогично для треугольника KK_2L_2, получим
$h_2 = \frac{2}{3} l_2 \cos 30°$, $\Phi_2 = m_2 a_{c_2} = m_2 \omega^2 y_{c_2} = m\omega^2 \frac{l_2}{2} \cos(\beta - 90°)$ (здесь y_{c_1}, y_{c_2} – координаты центров тяжести стержней l_1 и l_2).

Составляя теперь уравнения статики, получим искомые реакции подпятника A и подшипника B.

Другое решение (вариант 2). Задачу можно решить, не пользуясь результатами варианта 1, а вычисляя сумму моментов сил инерции относительно оси x непосредственно путем интегрирования. Проведем вдоль стержня KK_1 (KK_2) ось Kr. На каждый элемент стержня dr с координатой r действует сила инерции, равная $\omega^2 y dm$. Ее момент относительно оси x (для стержня KK_1) будет равен $-\omega^2 y_1 dm(AK + r\sin\alpha)$, а для стержня KK_2 равен $\omega^2 y_2 dm(AK - r\cos 30°)$. Тогда уравнение моментов можно представить в виде

$$\Sigma m_x(\vec{F}_k) = -Y_D \cdot AD - P_1 \frac{KK_1}{2} \cdot \cos\alpha + P_2 \frac{KK_2}{2} \cos(\phi - 90°) -$$
$$-\int_0^{l_1} \omega^2 y_1 dm_1 (AK + r\sin\alpha) + \int_0^{l_2} \omega^2 y_2 dm_2 (AK - r\cos 30°) = 0. \qquad (9)$$

Выражая все величины, стоящие под знаком интегралов, через r, получим

$y_1 = r\cos\alpha$, $y_2 = r\cos 60°$, $dm_1 = \dfrac{m_1}{l_1} dr$, $dm_2 = \dfrac{m_2}{l_2} dr$.

В результате будем иметь

$$-\int_0^{l_1} \omega^2 y_1 dm_1 (AK + r\sin\alpha) =$$
$$= -\int_0^{l_1} \omega^2 r\cos\alpha \cdot \frac{m_1}{l_1} dr (AK + r\sin\alpha) = -\omega^2 \frac{m_1}{l_1} \cdot AK\cos\alpha \int_0^{l_1} r dr -$$
$$-\omega^2 \frac{m_1}{l_1} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_0^{l_1} r^2 dr = -10^2 \cdot \frac{6}{0,6} \cdot 1,6 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,6^2}{2} - 10^2 \cdot \frac{6}{0,6} \cdot 0,866 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,6^3}{3} =$$
$$= -175,176.$$
$$-\int_0^{l_2} \omega^2 y_2 dm_2 (AK - r\cos 30°) = -\int_0^{l_2} \omega^2 r\cos 60° \cdot \frac{m_2}{l_2} dr \cdot (AK - r\cos 30°) = \omega^2 \frac{m_2}{l_2} \cdot AK\cos 60° \int_0^{l_2} r dr -$$
$$-\omega^2 \frac{m_2}{l_2} \cos 60° \cdot \cos 30° \int_0^{l_2} r^2 dr = 10^2 \cdot \frac{4}{0,4} \cdot 1,6 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,4^2}{2} - 10^2 \cdot \frac{4}{0,4} \cdot 0,5 \cdot 0,866 \cdot \frac{0,4^3}{3} = 54,7627.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9), находим для Y_D то же выражение, что и в предыдущем решении. Силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ вычисляются также путем интегрирования. Составляя условия равновесия, получим уравнения для определения искомых неизвестных реакций подпятника A и подшипника D.

Задача Д10

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3–6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д10.0 – Д10.9, табл. Д10). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: R_1 = 0,2 м, r_1 = 0,1 м, а шкива 2 – R_2 = 0,3 м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно ρ_1 = 0,1 м и ρ_2 = 0,2 м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса P_1, ..., P_6 шкивов и грузов заданы в таблице Д10.1 в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Указания. Задача на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера – Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в предыдущей задаче, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^u = I_z\varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление M^u противоположно направлению ε.

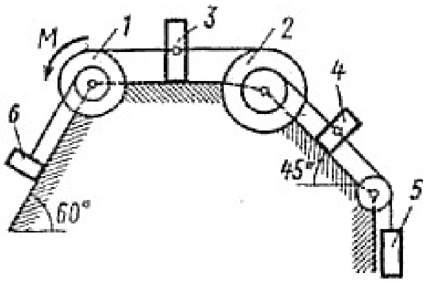


Рис. Д10.0

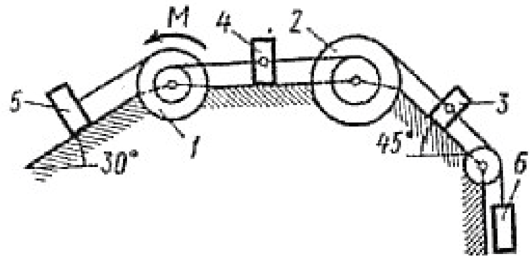


Рис. Д10.1

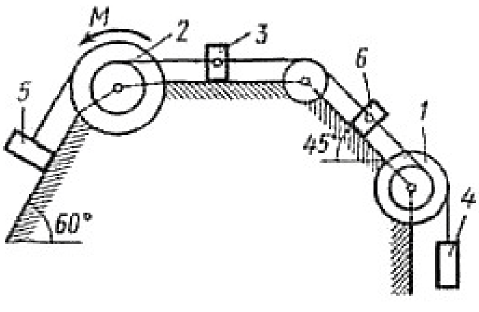


Рис. Д10.2

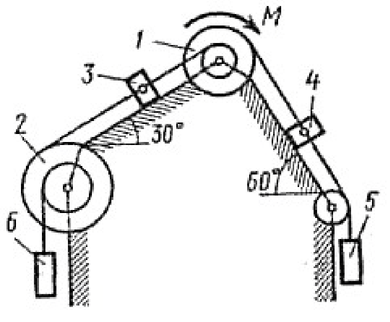


Рис. Д10.3

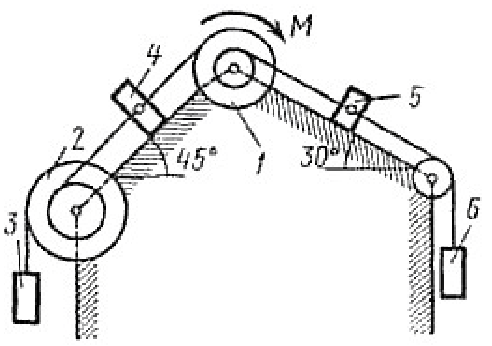


Рис. Д10.4

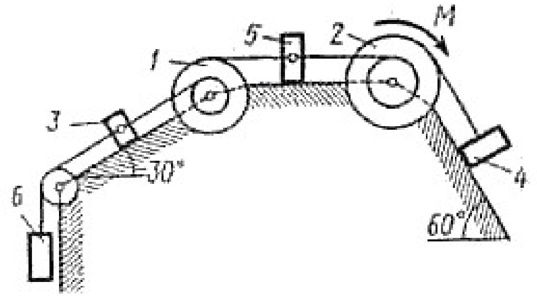


Рис. Д10.5

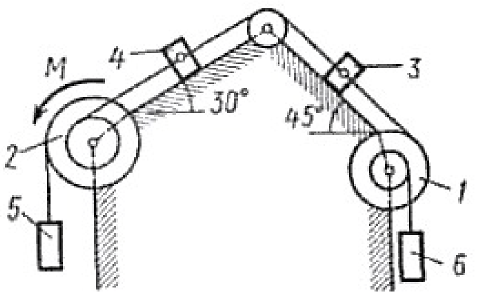


Рис. Д10.6

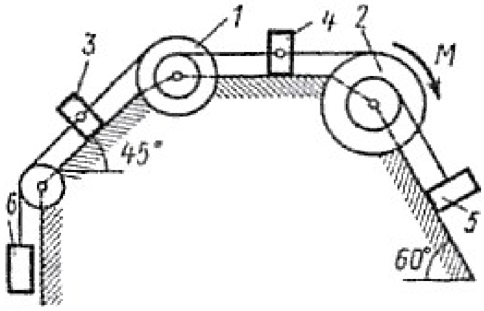


Рис. Д10.7

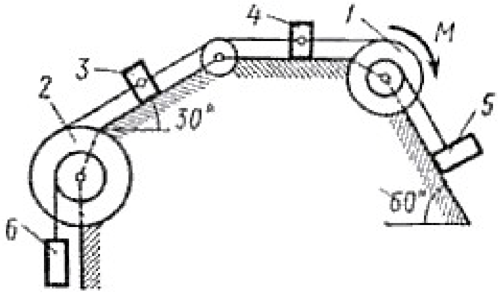


Рис. Д10.8

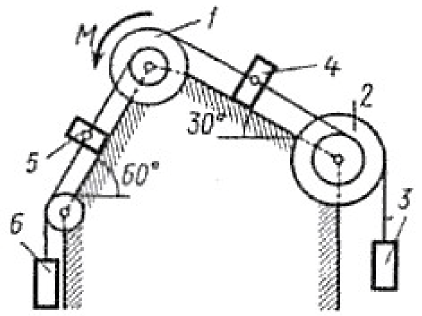


Рис. Д10.9

Таблица Д10.1

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н·м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

Пример Д10

Механическая система (рис. Д10.1) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к блоку 1.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м. Определить ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.

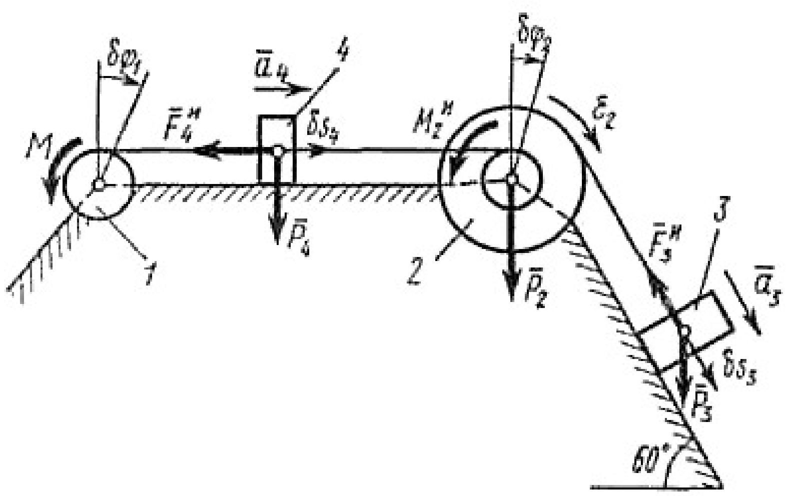


Рисунок Д10.1

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\Sigma\delta A_k^{аи} + \Sigma\delta A_k = 0, \tag{1}$$

где $\Sigma\delta A_k^{а}$ – сумма элементарных работ активных сил; $\Sigma\delta A_k^{и}$ – сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ и пару сил с моментом *M*. Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\bar{F}_3^и$, $\bar{F}_4^и$ и пару сил инерции с моментом $M_2^и$, величины которых равны:

$$F_3^и = \frac{P_3}{g}a_3,\; F_4^и = \frac{P_4}{g}a_4,\; M_2^и = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2. \tag{2}$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60° - F_3^u)\delta s_3 - M_2^u \delta\varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Выразим все перемещения через

$$\delta\varphi_2: \ \delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2; \ \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2; \ \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2. \qquad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60° - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0. \qquad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \ a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3.$$

Затем, учитывая, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках. Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60° - M(r_2 / R_1)}{P_3 R_2 + P_2\rho_2^2 / R_2 + P_4(r_2^2 / R_2)}g.$$

Вычисления дают следующий ответ: $a_3 = -0{,}9$ м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. 10.1.

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, получим общий метод решения задач динамики $\Sigma\delta A_k^a + \Sigma\delta A_k^{\Phi} = 0$. Данное равенство представляет собой общее уравнение динамики, которое может быть прочитано следующим образом: при движении системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю.

Задачу с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности.

1. Изобразить систему в текущий момент времени.

2. Изобразить активные силы, действующие на систему.

3. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.

4. Определить алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции.

5. Дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил через это возможное перемещение.

6. Вычислить сумму работ всех сил на возможных перемещениях точек системы. При этом определить знаки работ сил инерции и моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы.

7. Составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю.

8. После сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину.

Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если – отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Пример 2

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 20$ *Н*, $P_3 = 10$ *Н*, $P_4 = 30$ *Н*, $P_5 = 0$, $P_6 = 40$ *Н*, $M = 1{,}8$ *Нм*, $R_1 = 0{,}2$ *м*, $r_1 = 0{,}1$ *м*, $R_2 = 0{,}3$ *м*, $r_2 = 0{,}15$ *м*, $\rho_2 = 0{,}2$ *м*.

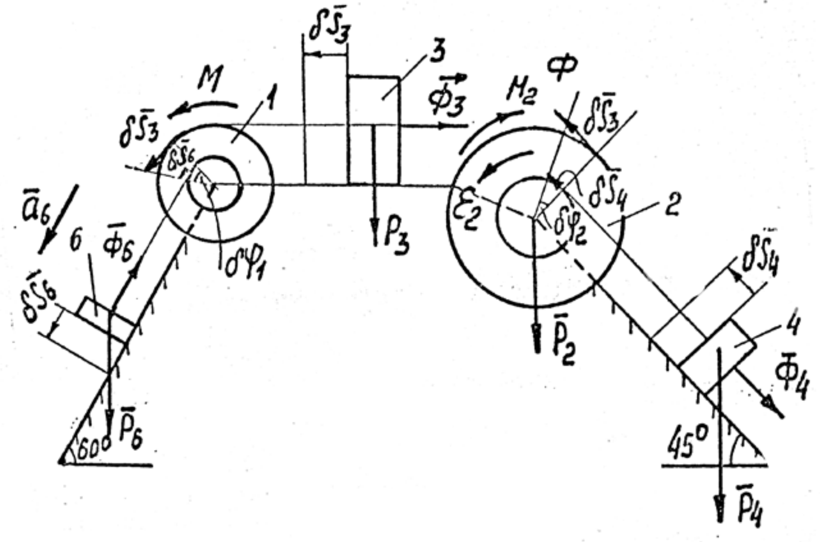


Рисунок Д10.2

Определить ускорение a_6 груза, имеющего больший вес, т.е. шестого.

Для решения задачи применим общее уравнение динамики. Покажем задаваемые силы: силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, $\vec{P}_6$ – сила тяжести шкива 2, грузов 3, 4 и 6, момент пары сил M , приложенный к шкиву 1 (рис. Д10.2).

Приложим силы инерции шкива 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ε_2, которые приводятся к паре сил инерции с моментом $\left|M_2^{\Phi}\right| = J_{2x}\varepsilon_2$, где $J_{2x} = m_2\rho_2^2$ – момент инерции шкива 2 относительно оси его вращения; направление M_2^{Φ} противоположно направлению ε_2.

Силы инерции грузов 3, 4, 6, движущихся поступательно с ускорениями $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_6$, определяются по формулам: $\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_3$; $\vec{\Phi}_4 = -m_4\vec{a}_4$; $\vec{\Phi}_6 = -m_6\vec{a}_6$. Здесь знак «минус» показывает, что сила инерции направлена против ускорения. Дав такое направление силам $\vec{\Phi}_3$, $\vec{\Phi}_4$, $\vec{\Phi}_6$, мы тем самым учитываем знак «минус» и в дальнейшем считаем силы положительными. Мысленно остановив систему, сообщим ей возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. Д10.2).

Дадим грузу 6 возможное перемещение δS_6, направив его параллельно наклонной плоскости вниз. Не следует считать, что направление движения какого-либо груза и его возможного перемещения должны обязательно совпадать. Направление движения груза зависит от системы сил, которые к ней приложены, возможное же перемещение груза, рассматриваемое из данного положения, зависит только от связей, наложенных на этот груз, в остальном оно произвольно. В данной задаче движение системы таково, что груз 6 опускается. При этом, в силу нерастяжимости нитей, грузы 3 и 4 получат возможные перемещения δS_3 и δS_4, направленные соответственно по горизонтали и вдоль наклонной плоскости вверх, а шкивы 1 и 2 получат соответственно возможные угловые перемещения $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Взяв точку нити на ободе ступени шкива, получим зависимость между линейными и угловым возможными перемещениями $\delta S = r\delta\varphi$, где r – радиус ступени шкива. Как видно, точка нити, лежащая на ободе ступени шкива, получает возможное перемещение $r\delta\varphi$.

Составим общее уравнение динамики:

$$P_6 \sin 60° \delta S_6 - \Phi_6 \cdot \delta S_6 + M\delta\varphi_1 - \Phi_3\delta S_3 - M_2^{\Phi} \cdot \delta\varphi_2 - P_4 \sin 45° \cdot \delta S_4 - \Phi_4 \cdot \delta S_4 = 0,$$

или

$$P_6 \sin 60° \delta S_6 - m_6 a_6 \cdot \delta S_6 + M\delta\varphi_1 - m_3 a_3 \delta S_3 -$$
$$-J_{2x} \cdot \varepsilon_2 \delta\varphi_2 - P_4 \sin 45° \cdot \delta S_4 - m_4 a_4 \cdot \delta S_4 = 0$$

Установим зависимость между возможными перемещениями и между ускорениями, входящими в равенство, учитывая то, что эти зависимости такие же, как между соответствующими скоростями. Зависимости между возможными перемещениями можно представить в виде:

$$\frac{\delta S_3}{\delta S_6} = \frac{R_1}{r_1}, \text{ откуда } \delta S_3 = \delta S_6 \frac{R_1}{r_1};\ \delta\varphi_1 = \frac{\delta S_6}{r_1};$$

$$\frac{\delta S_3}{\delta S_4}=\frac{R_2}{r_2}, \text{ откуда } \delta S_4=\delta S_3\frac{r_2}{R_2}=\delta S_6\frac{R_1 r_2}{r_1 R_2};\ \delta\varphi_2=\frac{\delta S_3}{R_2}=\delta S_6\frac{R_1}{r_1 R_2}.$$

Зависимости между ускорениями можно представить в виде:

$$a_{r_1}^{\tau}=a_6=\varepsilon_1 r_1, \quad \text{откуда} \quad \varepsilon_1=\frac{a_6}{r_1}; \quad a_{R_1}^{\tau}=\varepsilon_1 R_1=a_3, \quad \text{откуда} \quad a_3=a_6\frac{R_1}{r_1},$$

$$a_3=a_{R_2}^{\tau}=\varepsilon_2 R_2, \text{ откуда } \varepsilon_2=\frac{a_3}{R_2}=a_6\frac{R_1}{r_1 R_2};\ a_{r_2}^{\tau}=\varepsilon_2 r_2=a_4; \text{ откуда } a_4=\varepsilon_2 r_2=a_6\frac{R_1 r_2}{r_1 R_2}.$$

Подставив найденные значения в исходное уравнение, после почленного сокращения уравнения на δS_6 получим

$$P_6\sin 60^\circ-\frac{P_6}{g}a_6+\frac{M}{r_1}-\frac{P_3}{g}a_6\frac{R_1^2}{r_1^2}-\frac{P_2}{g}\cdot\rho_2^2 a_6\frac{R_1^2}{r_1^2R_2^2}-P_4\sin 45^\circ\cdot\frac{R_1 r_2}{r_1 R_2}-\frac{P_4}{g}a_6\cdot\frac{R_1^2 r_2^2}{r_1^2 R_2^2}=0$$

.

Подставляя значения данных по условию задачи, получим

$$40\sin 60^\circ-\frac{40}{9,8}a_6+\frac{1,8}{0,1}-\frac{10}{9,8}a_6\left(\frac{0,2}{0,1}\right)^2-\frac{20}{9,8}\cdot(0,2)^2 a_6\frac{0,2^2}{0,1^2\cdot 0,3^2}-$$

$$-30\sin 45^\circ\cdot\frac{0,2\cdot 0,15}{0,1\cdot 0,3}-\frac{30}{9,8}a_6\cdot\frac{0,2^2\cdot 0,15^2}{0,1^2\cdot 0,3^2}=0;$$

$19,35=14,8a_6$; и следовательно, искомое ускорение груза $a_6=1,3$ м/с^2.

8 Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» курса теоретической механики

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.
2. Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекциях на координатные оси.
3. Запишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на естественные оси.
4. Какая задача динамики называется прямой (первой)?
5. Когда выбираются естественные оси для проектирования векторного уравнения?
6. Как выбираются координатные оси для проецирования векторного уравнения?
7. Как определить проекции ускорения точки на координатные оси?
8. Как определить проекции ускорения точки на естественные оси?
9. Что такое масса тела?
10. Когда уравнения динамики точки вырождаются в уравнения статики?
11. Какая задача динамики называется обратной?
12. Какие особенности решения обратной задачи динамики?
13. Как определяются начальные условия?
14. Что входит в начальные условия?
15. Как определяются постоянные интегрирования?
16. Каким методом решается дифференциальное уравнение с постоянной правой частью типа $m\ddot{x} = const = C$?
17. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(V)$?
18. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(x)$?
19. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(V, x)$?

20. Каким методом решается дифференциальное уравнение типа $mdV/dt = f(t)$?

21. На точку действует сила $P = 18 - 0,5V^2$. Чему равно $V_{\max}$?

22. На точку массой 2 *кг* при начальных условиях $x_0 = 0$ и $V_0 = 1$ *м/с* действует сила $P = -72$ *кН*. Чему равно $P_{\max}$?

23. На точку массой 5 *кг* при начальных условиях $x_0 = 4$ и $V_0 = 0$ действует сила $P = -20\cos 2t$ *Н*. Чему равно $x_{\max}$?

24. На точку массой 4 *кг* при начальных условиях $x_0 = 0,8$ *м* и $V_0 = -0,4$ *м/с* действует сила $P = e^{-0,5t}$. Найдите закон движения точки.

25. На точку массой 4 кг при начальных условиях $x_0 = 0$ и $V_0 = 1$ *м/с* действует сила $P = e^{0,5x}$. Найдите зависимость скорости от координаты $V(x)$.

Примечание. В пп. 21-25 движение происходит вдоль оси x.

Тестовый контроль

1. При известном виде траектории движения.
2. Мера инертности тела.
3. $md^2\vec{r}/dt^2 = \Sigma\vec{P}_k$.
4. По заданным силам найти закон движения.
5. $m\ddot{x} = \Sigma P_{kx}$; $m\ddot{y} = \Sigma P_{ky}$; $m\ddot{z} = \Sigma P_{kz}$.
6. Значения координат и их первых производных по времени.
7. $\vec{a} = 0$ или проекции на оси равны нулю.
8. $mdV/dt = \Sigma P_{k\tau}$; $mV^2/\rho = \Sigma P_{kn}$; $0 = \Sigma P_{kb}$.
9. Разделением переменных и получением после интегрирования функции $t(V)$.
10. 6.
11. $V = e^{0,25x}$.
12. Разделением переменных и получением после интегрирования функции $V(t)$.
13. По заданному закону движения найти приложенные силы.
14. $x = -0,2 + 0,1t + e^{-0,5t}$.
15. По направлению движения.
16. Каким-либо численным методом.
17. В решении дифференциальных уравнений движения.
18. 4.
19. Сумму проекций сил на координатные оси разделить на массу.
20. 12.

21. По положению и скорости точки при $t=0$.
22. Применением подстановки $dV/dt = VdV/dx$.
23. Представлением решения в виде $x = C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2 C/m$.
24. Сумму проекций сил на естественные оси разделить на массу.
25. По начальным условиям.

Предлагаемые варианты наборов вопросов приведены в табл. 8.1

Таблица 8.1 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	*Вопросы*
1	1, 9, 16
2	2, 10, 17
3	3, 11, 18
4	4, 12, 19
5	5, 13, 20
6	6, 14, 21
7	7, 15, 22
8	8, 1, 23

Прямая задача динамики

Задача 1. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой m =1 кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0{,}5t^3$ (S – в *м*, t – в *с*). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 1$ *с*.

Задача 2. Материальная точка массой $m =$ 1 *кг* движется в плоскости *OXY*. Уравнения движения: $x = \cos 2\pi t$; $y = 2\sin \pi t$, где x и y – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = {}^1/_3$ *с*.

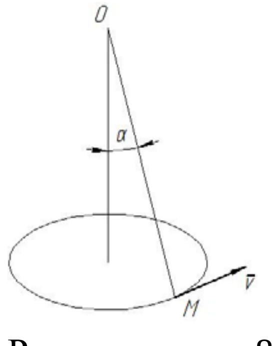


Рисунок 8.1

Задача 3. Точка массой $m = 0{,}1$ *кг*, подвешенная на нити длиной $OM = l = 0{,}2$ *м* в неподвижной точке *O*, представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 60°$ (рис. 8.1). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 4. Снаряд массой $m = 6{,}3$ *кг* вылетает из орудия со скоростью $V = 680$ *м/с*. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0{,}008$ *с*?

Задача 5. Автомобиль весом $Q = 3$ *т* движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 36$ *км/ч*, радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ *м*. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 6. Груз массой $m = 50$ *кг* поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 2$ *с* на высоту $h = 10$ *м*. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 7. Гиря массой $m = 200$ *г* вращается на нити в вертикальной плоскости. Длина нити $l = 30$ *см*. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 4$ *м/с*?

Задача 8. Материальная точка массой $m = 1$ *кг* совершает прямолинейное движение по закону $x = 2\sin\frac{\pi}{3}t$, x – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующих сил, действующих на точку в тот момент, когда $t = 2$ *с*.

Задача 9. Тело массой $m = 500$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 *м* за время $t_1 = 2$ *с* от начала движения, коэффициент трения $f = 0{,}2$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 10. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой m =1 кг, движется вертикально вверх по закону $S = t^3 + 1{,}5t^2$ (S – в *м*, t – в *с*). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 2$ *с*.

Задача 11. Материальная точка массой $m =$ 2 *кг* движется в плоскости *OXY*. Уравнения движения: $x = 2\cos 2\pi t$; $y = 3\sin \pi t$, где x и y – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = {}^1/_6$ *с*.

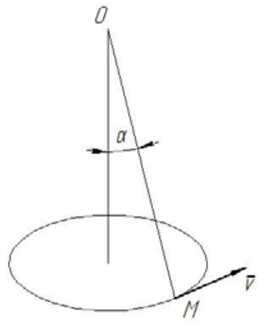


Рисунок 8.2

Задача 12. Точка массой $m = 0{,}2$ *кг*, подвешенная на нити длиной $OM = l = 30$ *см* в неподвижной точке *O*, представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$ (рис. 8.2). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 13. Снаряд массой $m = 8$ *кг* вылетает из орудия со скоростью $V = 650$ *м/с*. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0{,}009$ *с*?

Задача 14. Автомобиль весом $Q = 2$ *т* движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 54$ *км/ч*, радиус кривизны в середине моста $\rho = 60$ *м*. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 15. Груз массой $m = 100$ *кг* поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 3$ *с* на высоту $h = 15$ *м*. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 16. Гиря массой $m = 100$ *г* вращается на нити в вертикальной плоскости. Длина нити $l = 40$ *см*. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 5$ *м/с*?

Задача 17. Материальная точка массой $m = 2$ *кг* совершает прямолинейное движение по закону $x = 3\cos\dfrac{\pi}{3}t$, x – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующих сил, действующих на точку в тот момент, когда $x = 1{,}5$ *м*.

Задача 18. Тело массой $m = 200$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 *м* за время $t_1 = 4$ *с* от начала движения, коэффициент трения $f = 0{,}1$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 19. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m =$ $= 200$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0{,}4t^3$ (S – в *м*, t – в *с*). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 2$ *с*.

Задача 20. Материальная точка массой $m =$ 10 *кг* движется в плоскости *OXY*. Уравнения движения: $x = 2\cos\pi t$; $y = 2\sin 2\pi t$, где x и y – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 =$ 1 *с*.

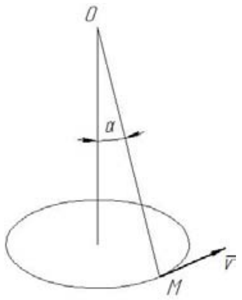


Рисунок 8.3

Задача 21. Точка массой $m = 0{,}1$ *кг*, подвешенная на нити длиной $OM = l = 40$ *см* в неподвижной точке *O*, представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 45°$ (рис. 8.3). Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 22. Снаряд массой $m = 7$ *кг* вылетает из орудия со скоростью $V = 700$ *м/с*. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение времени $t_1 = 0{,}007$ *с*?

Задача 23. Автомобиль весом $Q = 4$ *т* движется по вогнутому мосту со скоростью $v = 36$ *км/ч*, радиус кривизны в середине моста $\rho = 40$ *м*. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача 24. Груз массой $m = 200$ *кг* поднят канатом вертикально вверх в течение $t_1 = 4$ *с* на высоту $h = 20$ *м*. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача 25. Гиря массой $m = 500$ *г* вращается на нити в вертикальной плоскости, длина нити $l = 50$ *см*. Как велика сила натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент $v = 4$ *м/с*?

Задача 26. Материальная точка массой $m = 5$ *кг* совершает прямолинейное движение по закону $x = 4\sin\frac{\pi}{6}t$, x – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в тот момент, когда $t = 2$ *с*.

Задача 27. Тело массой $m = 400$ кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 *м* за время $t_1 = 5$ *с* от начала движения, коэффициент трения $f = 0{,}05$. Как велика горизонтальная сила, действующая на тело?

Задача 28. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m =$ $= 1$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0{,}5t^3$ (S – в *м*, t – в *с*). Найти силу давления груза на платформу в момент $t_1 = 1$ *с*.

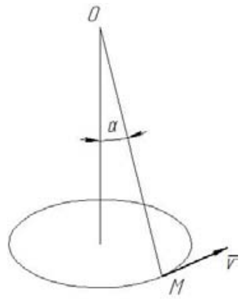


Рисунок 8.4

Задача 29. Точка массой $m = 0{,}3$ *кг*, подвешенная на нити длиной $OM = l = 40$ *см* в неподвижной точке *O*, представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 60°$. Определить скорость точки и натяжение нити.

Задача 30. Материальная точка массой $m =$ 5 *кг* движется в плоскости *OXY*. Уравнения движения: $x = 3\cos 2\pi t$; $y = 2\sin \pi t$, где x и y – в *м*, t – в *с*. Найти величину равнодействующей сил, действующих на точку в момент $t_1 = {}^1/_6$ *с*.

Обратная задача динамики

Задача 1. Материальная точка массой $m = 2$ *кг* движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -20$ *Н*. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 350$ *м/с*; $\dot{y}_0 = 500$ *м/с*.

Задача 2. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 *м*, если начальная скорость $v_0 = 1$ *м/с*?

Задача 3. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 40$ *м/с*. Коэффициент трения f = 0,1. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 2$ *с*?

Задача 4. Тело массой m = 2 *кг*, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой F = 10 *Н*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ *с*, если коэффициент трения f = 0,1?

Задача 5. Тело массой m = 2 *кг* движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10 + 5t$; F_x – в *Н*, t – в *с*. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,5$ *м/с*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ *с*?

Задача 6. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Составить уравнение движения точки, $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$.

Задача 7. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 36$ к*м/ч*, если коэффициент трения f = 0,3?

Задача 8. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, в течение $t = 2$ *с*. Его начальная скорость $v_0 = 0$. Коэффициент трения f = 0,2. Какой путь прошло тело за это время?

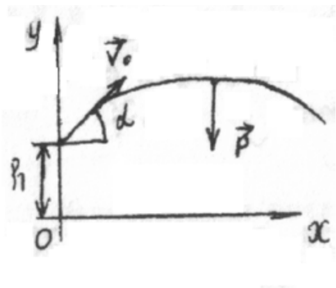
Задача 9. Материальная точка массой $m = 3$ *кг* движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -30$ *Н*. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 400$ *м/с*; $\dot{y}_0 = 600$ *м/с*.

Задача 10. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 *м*, если начальная скорость $v_0 = 1$ *м/с*?

Задача 11. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 40°$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ *м/с*. Коэффициент трения f = 0,2. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 1$ *с*?

Задача 12. Тело массой m = 5 *кг*, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой F = 20 *Н*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 4$ *с*, если коэффициент трения f = 0,2?

Задача 13. Тело массой m = 1 *кг* движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10 + 10t$; F_x – в *Н*, t – в *с*. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,2$ *м/с*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ *с*?



Задача 14. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 8.5) . Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$.

Рисунок 8.5

Задача 15. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 45$ *м/с*, если коэффициент трения f = 0,4?

Задача 16. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, в течение $t = 3$ *с*. Его начальная скорость $v_0 = 2$ *м/с*. Коэффициент трения f = 0,2. Какой путь прошло тело за это время?

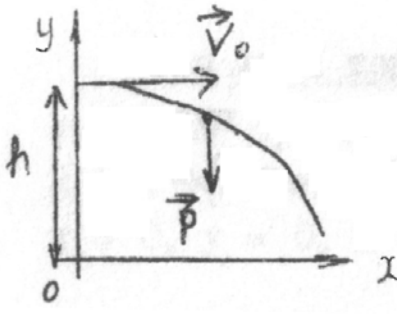
Задача 17. Материальная точка массой $m = 1$ *кг* движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -10$ *Н*. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 20$ *м*; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 300$ *м/с*; $\dot{y}_0 = 500$ *м/с*.

Задача 18. Тело массой m спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 *м*, если начальная скорость $v_0 = 2$ *м/с*?

Задача 19. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ *м/с*. Коэффициент трения f = 0,2. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 1$ *с*?

Задача 20. Тело массой m = 1 *кг*, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой F = 20 *Н*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ *с*, если коэффициент трения f = 0,2?

Задача 21. Тело массой m = 1 *кг* движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10t$; F_x – в *Н*, t – в *с*. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 2$ *м*, $\dot{x}_0 = 0{,}1$ *м/с*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 1$ *с*?



Задача 22. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 8.6). Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $\dot{x}_0 = v_0$; $\dot{y}_0 = 0$.

Рисунок 8.6

Задача 23. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v = 27$ к*м/ч*, если коэффициент трения *f* = 0,2?

Задача 24. Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, в течение $t_1 = 4$ *с*. Его начальная скорость $v_0 = 1$ *м/с*. Коэффициент трения *f* = 0,005. Какой путь прошло тело за это время?

Задача 25. Материальная точка массой $m = 5$ *кг* движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$; $F_y = -50$ *Н*. Найти уравнения движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 30$ *м*; $\dot{x}_0 = 700$ *м/с*; $\dot{y}_0 = 0$.

Задача 26. Тело массой *m* спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь в 10 *м*, если начальная скорость $v_0 = 5$ *м/с*?

Задача 27. Материальная точка поднимается по шероховатой поверхности, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, имея начальную скорость $v_0 = 30$ *м/с*. Коэффициент трения *f* = 0,1. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 2$ *с*?

Задача 28. Тело массой *m* = 3 *кг*, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянной силой *F* = 30 *Н*. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ *с*, если коэффициент трения *f* = 0,1?

Задача 29. Тело массой *m* = 3 *кг* движется прямолинейно под действием силы $F_x = 3t$; F_x – в *Н*, t – в *с*. Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 1$ *м*, $\dot{x}_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 2$ *с*?

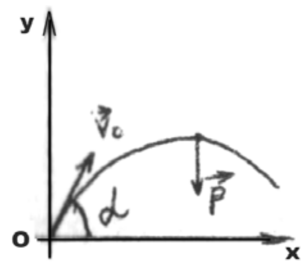


Рисунок 8.7

Задача 30. Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 8.7). Составить уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_0 \sin\alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha$.

Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка

Задача 1. Легкое тело массой *m* падает без начальной скорости под действием силы тяжести, встречая противодействие силы трения воздуха. Предполагая, что сила трения пропорциональна скорости, установить, через сколько секунд после начала падения тело достигнет земли.

Ответ: $t = \dfrac{m}{k} \ln \dfrac{g}{g - (k/m)v}$.

Задача 2. Шар массой *m* падает без начальной скорости под действием силы тяжести из точки О, которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха пропорционально скорости падения, т.е. $R = -kv$ (k – коэффициент пропорциональности). Найти закон изменения скорости шара в зависимости от времени.

Ответ: $v = \dfrac{g}{n}\left(1 - e^{-nt}\right)$, где $n = k/m$.

Задача 3. Тело массой *m*, получив начальную скорость v_0, движется прямолинейно по горизонтальной плоскости, испытывая сопротивление движению, модуль которого равен $R = k_1 v + k_2 v^2$. Найти закон движения тела в зависимости от скорости тела.

Ответ: $x = \dfrac{m}{k_2} \ln \dfrac{k_1 + k_2 v_0}{k_1 + k_2 v}$.

Задача 4. Тело весом *P* движется прямолинейно по горизонтальной плоскости, испытывая сопротивление движению, модуль которого равен $R = R_0 e^{-\alpha t}$. Найти закон изменения скорости движения тела в зависимости от времени, если в начальный момент тело получило начальную скорость v_0.

Ответ: $v = v_0 - \dfrac{g R_0}{\alpha P}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$.

Задача 5. Ракета выстрелена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 100$ *м/с*. Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, равное $-kv^2$ *м/с²*, где v – мгновенная скорость ракеты, k – аэродинамический коэффициент. Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Ответ: $t = \dfrac{arctg(31,62\sqrt{k})}{3,162\sqrt{k}}$.

Задача 6. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ *км/ч*. На полном ходу ее мотор выключают, и через 40 *с* после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ *км/ч*. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 *мин* после остановки мотора.

Ответ: $v = 1,28$ *км/ч*.

Задача 7. Судно водоизмещением в 12000 *т* движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ *м/с*. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 *т* при скорости 1 *м/с*. Определить время движения судна, когда скорость его станет равной 5 *м/с*.

Ответ: t = 4,6 *с*.

Задача 8. С некоторой высоты брошено вертикально вниз с начальной скоростью v_0 тело массой m. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действует сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

Ответ: $v = \dfrac{m}{k}\left[g - \left(g - \dfrac{k}{m}v_0 \right) e^{-\frac{k}{m}t} \right]$.

Задача 9. На тело массой m = 2 *кг*, находящееся на горизонтальной гладкой плоскости, в направлении движения действует сила, изменяющаяся по закону $F = (4t + 2)$ *Н*. Определить, через сколько секунд тело достигнет скорости 6 *м/с*, если в начальный момент $v_0 = 2$ *м/с*.

Ответ: t = 1 *с*.

Задача 10. Тепловоз массой m в момент отключения тяги имел скорость v_0. Определить, какое расстояние он пройдет до остановки, если суммарное сопротивление движению выражается формулой $R = kv + k_1v^2$, где k и k_1 – постоянные, v – скорость тепловоза.

Ответ: $s = \dfrac{m}{k_1}\ln\left(1 + \dfrac{k_1v_0}{k} \right)$.

Задача 11. Тело массой 0,5 *кг* брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ *м/с*. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости $R = k/v$ (v – мгновенная скорость тела, k – аэродинамический коэффициент). Найти закон изменения скорости тела.

Ответ: $v = \dfrac{1}{\alpha}\left[\left(g + \alpha v_0\right)e^{-\alpha t} - g\right]$, где $\alpha = \dfrac{k}{m}$.

Задача 12. Материальная точка массой m, имеющая начальную скорость v_0, движется прямолинейно. На точку действует сила, совпадающая с направлением движения и изменяющаяся по закону $F = k\sqrt{t}$. Определить скорость точки по истечении 4 *с*.

Ответ: $v = \dfrac{4k}{m} + v_0$.

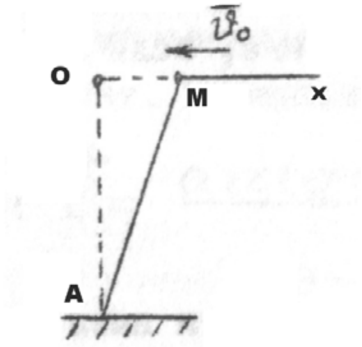


Рисунок 8.8

Задача 13. К тонкому упругому вертикальному стержню (рис. 8.8), закрепленному в нижнем конце A, прикреплен на верхнем конце шарик M массой m. В начальный момент шарик отклонили от вертикального положения на небольшое расстояние a и сообщили начальную скорость v_0, направленную к положению равновесия. Найти закон изменения скорости шарика в зависимости от положения шарика.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{k}{m}(a^2 - x^2)}$.

Задача 14. Тело весом P скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°. Коэффициент трения тела по поверхности $k = 0{,}5$. Определить, какую скорость приобретет тело, пройдя путь $s = 3$ *м*, если в начальный момент тело имело скорость $v_0 = 2$ *м/с*?

Ответ: $v = 2{,}8$ *м/с*.

Задача 15. На точку массой $m = 2$ *кг* из состояния покоя действует вдоль прямой сила $F = A\sin kt$. Определить скорость точки в момент времени $t = 1{,}57$ *с*, если $A = 6$ *Н*, $k = 2$ c^{-1}.

Ответ: v = 3 *м/с*.

Задача 16. Тело массой $m = 98{,}1$ *кг* находится на горизонтальной шероховатой поверхности. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}5$. Какую силу надо приложить к телу, чтобы в течение $t = 10$ *с* оно приобрело скорость $v = 10$ *м/с* ?

Ответ: $F = 10{,}49$ *кг* = 102,81 *Н*.

Задача 17. На материальную точку массой m в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = \frac{b}{x^3}$. Найти зависимость скорости точки от положения точки, если в начальный момент $x_0 = a$, а $v_0 = 0$.

Ответ: $v = \frac{\sqrt{\frac{b}{m}\left(x^2 - a^2\right)}}{ax}$.

Задача 18. Материальная точка массой m при движении в жидкости испытывает сопротивление движению $R = \alpha v^2$. Найти зависимость скорости движения от положения точки, если в начальный момент точка находилась в покое.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1 - e^{-kx}\right)}$, где $k = \alpha / m$.

Задача 19. При погружении в грунт тело массой m = 5 *кг* испытывает сопротивление движению $R = \alpha x$. Найти скорость погружения тела в зависимости от глубины погружения, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x} = v_0$.

Ответ: $v = \sqrt{2gx - \frac{\alpha}{m}x^2 + v_0^2}$.

Задача 20. После полученного толчка с начальной скоростью $v_0 = 19,2$ *м/с* тело поднимается по наклонной плоскости с углом наклона 30°. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: t = 4 *с*.

Задача 21. Тело, получив начальную скорость $v_0 = 4$ *м/с*, скользит по наклонной плоскости с углом $\alpha = 45°$. Найти, через сколько секунд скорость тела достигнет $v_1 = 7$ *м/с*, если коэффициент трения скольжения f = 0,1 (g = 9,81 *м/с*^{2}).

Ответ: t = 0,48 *с*.

Задача 22. Тело весом P, падая без начальной скорости с некоторой высоты h, внедряется в грунт, испытывая сопротивление движению $R = \alpha x$. Найти зависимость скорости внедрения в грунт тела от глубины погружения.

Ответ: $v = \sqrt{2g(x+h) - \frac{\alpha}{m}x^2}$.

Задача 23. Сопротивление водной среды движению моторного судна задано эмпирической функцией $F(v) = \alpha v + \beta v^2$, где α и β – константы. Масса судна равна m. Найти время движения судна до остановки, если выключение мотора произошло в момент, когда скорость была равна v_0.

Ответ: $t = \frac{m}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{\alpha}\right)$.

Задача 24. Определить в момент t = 3 *с* скорость точки массой m, совершающей прямолинейное движение под действием силы, зависящей от времени, в виде $F = m(2 + 5t + 4t^2)$, если начальный момент времени $v = v_0 = 20$ *м/с*.

Ответ: $v = 84{,}5$ *м/с*.

Задача 25. На тело весом P, находящееся на горизонтальной плоскости вдоль прямой, параллельной плоскости, действует сила в положительном направлении оси, изменяющаяся по закону $F = Q + ax^2 + bx$. Найти закон изменения скорости движения точки (принимая тело за материальную точку) в зависимости от изменения координаты, если в начальный момент скорость точки равна v_0 $(Q = const)$.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2g}{P}\left(Qx + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx}{2}\right) + v_0^2}$.

Задачи на составление и интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка

Задача 1. На тело весом P, находящееся на гладкой горизонтальной поверхности, действует вдоль прямой сила, изменяющаяся по закону $F = b\cos kt$. Найти закон движения точки (принимая тело за материальную точку), считая, что в начальный момент времени координата $x = a$, а скорость $\dot{x} = 0$.

Ответ: $x = \frac{gb}{k^2 P}(1 - \cos kt) + a$.

Задача 2. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение a приближенно связаны уравнением $a = -g - kv$, где g и k – постоянные. Выразить пройденное телом расстояние в функции времени, если в момент $t = 0$ тело находилось в покое.

Ответ: $s = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

Задача 3. Тяжелое тело скользит по шероховатой наклонной плоскости, причем угол наклона равен α, а коэффициент трения μ. Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

Ответ: $s = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$.

Задача 4. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v = 10$ *км/ч*. На полном ходу его мотор был выключен, и через $t = 20$ *с* скорость катера уменьшилась до $v_1 = 6$ *км/ч*. Считая, что сопротивление воды движению катера пропорционально его скорости, найти: а) скорость катера через 2 *мин* после остановки мотора; б) расстояние, пройденное катером в течение первой минуты после остановки мотора.

Ответ: $v_2 = 0,467$ *км/ч*; $s = 85,2$ *м*.

Задача 5. Тело медленно погружается в жидкость. Сопротивление движению пропорционально скорости тела: $R = -kv$. Найти закон движения тяжелой материальной точки (принимая тело за материальную точку), погружающейся в жидкость без начальной скорости.

Ответ: $s = \dfrac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{mt}} - 1\right) + \dfrac{mg}{k}t$.

Задача 6. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее силой $F = \dfrac{k^2 m}{r^3}$, где r – расстояние точки от центра. Если движение начинается из состояния покоя при $r = a$, найти время, по истечении которого точка достигнет центра.

Ответ: $t = \dfrac{a^2}{k}$.

Задача 7. На материальную точку массой m из состояния покоя в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = kx^3$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = -\dfrac{2m}{\sqrt{2km} \cdot t}$.

Задача 8. На прямолинейно движущуюся материальную точку массой m действует из состояния покоя сила $F = \beta e^{-\alpha t}$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = \dfrac{\beta}{\alpha^2 m}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \dfrac{\beta}{\alpha m}t$.

Задача 9. В результате полученного толчка с начальной скоростью $v_0 = 10$ *м/с* тело поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить путь s, пройденный телом за промежуток времени $t = 3$ *с* ($g = 9,8$ *м/с²*).

Ответ: $s = 7,95$ *м*.

Задача 10. Используя условие предыдущей задачи, найти максимальный путь тела до его остановки.

Ответ: $s = 19{,}8$ *м*.

Задача 11. Свая массой m при забивке в грунт испытывает сопротивление движению, равное αv. Найти закон движения точки (принимая сваю за материальную точку), если в начальный момент скорость сваи равна v_0, а координата $y = 0$ (ось y направлена вниз).

Ответ: $y = \dfrac{g}{k} - g - \dfrac{kv_0}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$, где $k = \dfrac{\alpha}{m}$.

Задача 12. Свая весом P при забивке в грунт испытывает сопротивление движению $R = \alpha e^{\beta t}$. Найти закон движения точки (принимая сваю за материальную точку), если в начальный момент скорость сваи равна v_0, а координата $y = h$ (ось y направлена вертикально вниз).

Ответ: $y = \dfrac{gt^2}{2} + \left(v_0 + \dfrac{k}{\beta}\right)t + \dfrac{k}{\beta^2}\left(1 - e^{\beta t}\right) + h$, где $k = \dfrac{g\alpha}{P}$.

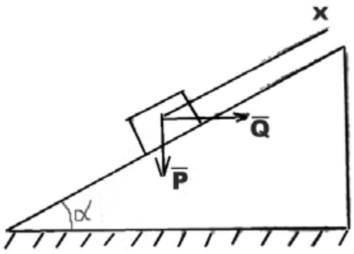


Рисунок 8.9

Задача 13. На тело весом P, находящееся на наклонной плоскости с углом $\alpha = 30°$, действует сила Q, направленная параллельно основанию наклонной плоскости (рис. 8.9). Найти закон движения точки (принимая тело за материальную точку), если тело движется вверх, а в начальный момент времени координата $x_0 = a$, скорость $\dot{x}_0 = v_0$.

Ответ: $x = \left(\dfrac{\sqrt{3}Q}{P} - 1\right)\dfrac{gt^2}{4} v_0 t + a$.

Задача 14. Принимая условие предыдущей задачи, найти закон движения точки, если коэффициент трения скольжения между телом и наклонной плоскостью равен f.

Ответ: $x = \left(\dfrac{\sqrt{3}Q}{P} - f\sqrt{3} - 1\right)\dfrac{gt^2}{4} + v_0 t + a$.

Задача 15. Тело после полученного толчка из состояния покоя со скоростью $v_0 = 10$ *м/с* проходит по горизонтальной прямой до остановки путь $s = 20$ *м*. Определить коэффициент трения скольжения.

Ответ: $f = 0{,}25$.

Задача 16. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием приложенной к ней силы, изменяющейся по закону $F = \frac{\alpha}{t^2}$. Найти закон движения точки, если при $t = 1$ *с* $x = s$, $\dot{x} = v_0$.

Ответ: $x = -\frac{\alpha}{m}\ln t + (t-1)\left(v_0 - \frac{\alpha}{m}\right) + s$.

Задача 17. На материальную точку M массой $m = 10$ кг вдоль горизонтальной прямой действует восстанавливающая сила, пропорциональная первой степени отклонения $F = c|x|$ (рис. 8.10). При отклонении точки на 1 *см* требуется сила в 10 *Н*. Найти закон движения точки, если в начальный момент при $t = 0$ $x_0 = 0{,}2$ м, $\dot{x}_0 = 20$ м/с.

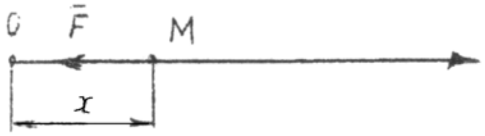


Рисунок 8.10

Ответ: $x = 0{,}2\cos 10t + 2\sin 10t$.

Задача 18. На материальную точку массой $m = 5$ *кг* в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = 10(t^2 - t + 4)$ *Н*. Найти положение точки в момент $t = 2$ *с*, если в начальный момент $x_0 = 2$ *м* и $\dot{x}_0 = 0$.

Ответ: $x = 18$ *м*.

Задача 19. На материальную точку массой m вдоль горизонтальной прямой действует сила, изменяющаяся по закону $F = F_0(1 - \cos kt)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x = 0$, $\dot{x} = v_0$.

Ответ: $x = \frac{F_0}{2m}t^2 + v_0 t + \frac{F_0}{k^2 m}(\cos kt - 1)$.

Задача 20. Поезд массой 1000 *т* идет по горизонтальному пути со скоростью $v_0 = 54$ *км/ч*. На расстоянии $s = 1000$ *м* от станции машинист включает тормоз, и поезд останавливается на станции. Определить силу R сопротивления движению.

Ответ: $R \approx 115000$ *Н*.

Задача 21. Тело опускается по негладкой поверхности, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, в течение какого промежутка t тело пройдет путь s, если в начальный момент времени его скорость равнялась v_0 и коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $t = \dfrac{2s}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}$.

Задача 22. Материальная точка массой $m = 25$ кг притягивается к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию точки от этого центра $F = cx$; при $x = 1$ *см* величина силы $F = 49{,}05$ *Н*. Найти закон движения точки при следующих начальных условиях: $x_0 = 0{,}1$ *м*, $\dot{x}_0 = 42$ *м/с*.

Ответ: $x = 0{,}1\cos 14t + 3\sin 14t\mu$.

Задача 23. Автомобиль движется по горизонтальному пути со скоростью $v = 72$ *км/ч*. Шофер включает тормоз, и через некоторый промежуток времени автомобиль останавливается. Определить время торможения и тормозной путь, если коэффициент трения скольжения $f = 0{,}3$.

Ответ: $t = 6{,}8$ *с*, $s = 68$ *м*.

Задача 24. На тяжелую материальную точку из состояния покоя вдоль горизонтальной прямой в положительном направлении оси x действует сила, изменяющаяся по закону $F = \alpha^2 mx$. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = e^{\alpha t}$.

Задача 25. При падении материальная точка массой m испытывает сопротивление движению, величина которого равна $R = \alpha v$. Найти закон движения точки, если в начальный момент координата и скорость равны нулю.

Ответ: $y = \dfrac{g}{k}t - \dfrac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Под действием какой силы возникают свободные колебания?
2. Под действием какой силы возникают вынужденные колебания?
3. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний без сопротивления.
4. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний с сопротивлением.
5. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$.

6. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$ для случая $n<k$.
7. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$ для случая $n=k$.
8. Запишите решение дифференциального уравнения $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$ для случая $n>k$.
9. Чему равна постоянная C_1 для решения $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$?
10. Чему равна постоянная C_2 для решения из п. 9?
11. Чему равна постоянная C_2 для решения $x=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right)$?
12. Чему равна частота свободных колебаний, описываемых уравнением $m\ddot{x}+cx=0$?
13. Чему равен период свободных колебаний из п. 12?
14. Чему равна частота свободных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$?
15. Чему равна частота свободных колебаний без сопротивления, если известна статическая деформация δ_{cm}?
16. Запишите общее решение уравнения $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt$.
17. Чему равна амплитуда свободных колебаний без сопротивления?
18. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt$?
19. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний, описываемых уравнением $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin pt$?
20. При какой частоте возбуждения имеет место резонанс в системе из п. 19?
21. При какой частоте возбуждения имеет место резонанс в системе из п. 18?
22. Чему равно запаздывание по фазе вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в системе из п. 19?
23. Чему равно запаздывание по фазе вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в системе из п. 18, если $k<p$?
24. Запишите ответ на вопрос п. 23, если $k=p$.
25. Запишите ответ на вопрос п. 23, если $k>p$.

Тестовый контроль

1. $h/\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}$.

2. $arctg\left(\dfrac{2np}{k^2-p^2}\right)$.
3. $\pi/2$.
4. $\dot{x}_0/k$.
5. $h/(k^2-p^2)$.
6. $\sqrt{k^2-n^2}$.
7. Под действием восстанавливающей силы.
8. $x=e^{-nt}\left(C_1+C_2t\right)$.
9. $2\pi/k$.
10. x_0.
11. $\sqrt{k^2-2n^2}$.
12. $\sqrt{x_0{}^2+(x_0/k)^2}$.
13. Под действием возмущающей силы.
14. $\sqrt{g/\delta_{cm}}$.
15. $m\ddot{x}=-cx-\beta\dot{x}$.
16. k.
17. $m\ddot{x}=-cx$.
18. π.
19. $\left(nx_0+\dot{x}_0\right)/k_1$.
20. $x=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right)$.
21. $x=C_1e^{-n_1t}+C_2e^{-n_2t}$.
22. $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+h\sin pt/(k^2-p^2)$.
23. 0.
24. $\sqrt{c/m}$.
25. $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$.

Предлагаются следующие варианты вопросов (табл. 8.2).

Таблица 8.2 – Варианты вопросов

Номер варианта	*Вопросы*
1	3, 14, 20
2	4, 15, 21
3	5, 16, 17
4	6, 18, 23
5	7, 19, 24
6	8, 20, 25

Окончание таблицы 8.2

7	1, 16, 22
8	2, 17, 25
9	9, 12, 24
10	10, 16, 23
11	11, 17, 19
12	3, 18, 21
13	4, 19, 20
14	5, 20, 22
15	6, 10, 23
16	7. 11, 24
17	8, 12, 25
18	9, 13, 23
19	10, 14, 24

ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Что называют центром масс механической системы?
2. По каким формулам определяются координаты центра масс?
3. Как читается теорема о движении центра масс?
4. Как записывается теорема о движении центра масс в векторной форме?
5. Как записывается теорема о движении центра масс в проекциях на оси координат?
6. В каком случае скорость центра масс остается постоянной?
7. В каком случае проекция скорости центра масс на ось остается постоянной?
8. В каком случае координата центра масс остается постоянной?
9. Можно ли в формулы динамики подставлять относительные скорости, ускорения и перемещения?
10. Можно ли в формулы динамики подставлять абсолютные скорости, ускорения и перемещения?
11. В каких задачах динамики можно применять теорему о движении центра масс?
12. В каких задачах динамики целесообразно применять закон о сохранении скорости движения центра масс?
13. В каких задачах динамики целесообразно применять закон о сохранении положения центра масс?

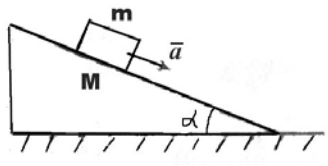


Рисунок 8.11

14. Вычислите силу трения, удерживающую призму от горизонтального перемещения (рис. 8.11)

15. Вычислите давление призмы на горизонтальную поверхность (рис. 8.11).

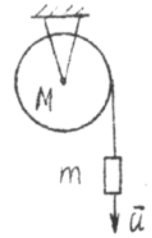
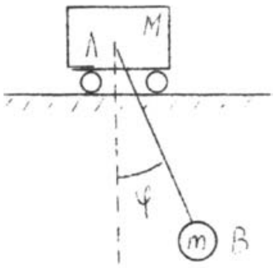


Рисунок 8.12

16. Вычислите вертикальную реакцию оси блока (рис. 8.12)



$AB = l$

$\varphi = \sin \omega t$

Рисунок 8.13

17. Вычислите давление тележки на горизонтальную поверхность (рис. 8.13) при максимальном угле φ.

18. Вычислите давление тележки на горизонтальную поверхность (рис. 8.13) при $\varphi = 0$.

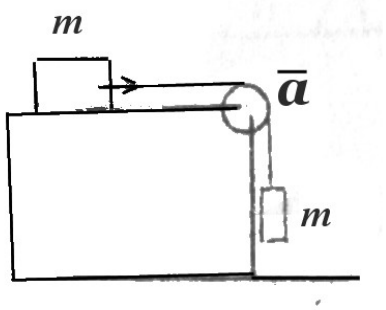


Рисунок 8.14

19. Вычислите горизонтальную составляющую реакции оси блока (рис. 8.14), если коэффициент трения между телами m и M равен f, а ускорение $\vec{a}$ предполагается найденным.

20. Вычислите вертикальную составляющую реакции шарнира блока (рис. 8.14).

21. Вычислите нормальное давление призмы M на горизонтальную поверхность (рис. 8.14).

22. Вычислите силу трения, удерживающую призму M от горизонтального перемещения (рис. 8.14), если трение между телами m и M отсутствует.

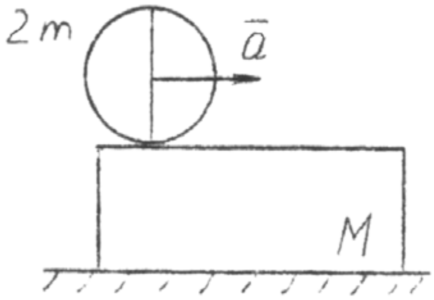


Рисунок 8.15

23. Вычислите силу трения от горизонтального перемещения призмы M (рис. 8.15).

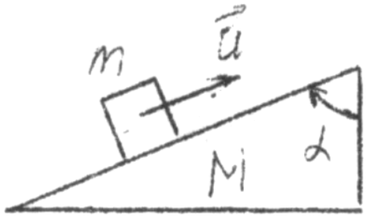


Рисунок 8.16

24. Вычислите силу трения, удерживающую от горизонтального перемещения призму M (рис. 8.16).

25. Вычислите давление призмы M на горизонтальную поверхность (рис. 8.16).

Тестовый контроль

1. $M\vec{a}_c = \Sigma\vec{P}_k^e$.
2. $\Sigma P_{kx}^e = 0$.
3. Если $V_c \neq 0$.
4. Если $\Sigma P_k^e = 0$.
5. Геометрическая точка.
6. Нельзя.
7. Если $V_c = 0$.
8. При определении динамических реакций.
9. $x_c = \Sigma m_k x_k / M$; $y_c = \Sigma m_k y_k / M$; $z_c = \Sigma m_k z_k / M$; $M = \Sigma m_k$.
10. $m\ddot{x} = \Sigma P_{kx}^e$; $m\ddot{y} = \Sigma P_{ky}^e$; $m\ddot{z} = \Sigma P_{kz}^e$.
11. $V_{cx} = 0$.
12. Центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.
13. Можно.
14. $(M+m)g - ml\omega^2 \sin\alpha$.
15. $(M+m)g - ma\sin\alpha$.
16. $m(g-a)$.
17. $2ma$.

18. $ma\cos\alpha$.
19. $(M+m)g+ma\cos\alpha$.
20. $ma\sin\alpha$.
21. $(M+m)g+ml\omega^2$.
22. ma.
23. $ma+mgf$.
24. $(M+m)g-ma$.
25. $(M+2m)g-ma$.

Предлагаются следующие варианты наборов вопросов (табл. 8.3).

Таблица 8.3 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	*Вопросы*
1	1, 10, 15
2	2, 11, 16
3	3, 12, 17
4	4, 13, 18
5	5, 9, 19
6	6, 2, 20
7	7, 4, 21
8	8, 11, 22

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. Какой величиной (векторной или скалярной) является количество движения материальной точки?
2. Какой величиной (векторной или скалярной) является проекция количества движения материальной точки на ось?
3. Как определить количество движения механической системы?
4. Как определить проекцию количества движения механической системы на ось?
5. Как читается теорема об изменении количества движения материальной точки?
6. Как читается теорема об изменении количества движения механической системы?
7. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения материальной точки в векторной форме.

8. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось OX .
9. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения механической системы в векторном виде.
10. Запишите формулу, выражающую теорему об изменении количества движения механической системы в проекции на ось OX .
11. Что называется элементарным импульсом силы?
12. Что называется импульсом системы сил?
13. Как вычислить импульс постоянной силы за промежуток времени t ?
14. В каком случае количество движения системы не изменяется?
15. В каком случае проекция количество движения системы постоянна?
16. По какой формуле вычисляется количество движения твердого тела с использованием понятия центра масс системы?
17. Чему равно количество движения твердого тела, вращающегося вокруг центральной оси (проходящей через центр масс)?
18. В каком случае импульс системы сил равен нулю?
19. В каком случае проекция импульса системы сил на ось равна нулю?
20. Запишите формулу Эйлера для вычисления силы давления струи на неподвижную преграду.
21. В каких задачах динамики целесообразно применить теорему об изменении количества движения?
22. Вычислите скорость спускающегося по наклонной гладкой плоскости с углом $\alpha = 30°$ к горизонту груза через 20 с после начала движения.
23. Определите проекцию импульса силы тяжести массы 2 кг на ось, с которой сила тяжести составляет угол 60°, за время 20 с.
24. На какую ось проекция импульса силы тяжести равна нулю?
25. На какую ось проекция импульса нормальной реакции спускающегося по наклонной плоскости груза равна нулю?

Тестовый контроль

1. Вдоль наклонной плоскости.
2. Векторная.
3. По формуле $\Sigma m_k \vec{v}_k$.
4. Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.
5. $\vec{q} - \vec{q}_0 = \Sigma \vec{S}(P_k)$.
6. $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \Sigma \vec{S}(\vec{P}_k^e)$.

7. Векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени.
8. По формуле $\vec{S} = \vec{P}t$.
9. $\Sigma S_x(\vec{P}_k^e) = 0$.
10. Нуль.
11. $\vec{R} = 0$ или $\vec{R} \perp OX$ ($\vec{R}$ – главный вектор системы сил).
12. Действующие силы постоянны или зависят только от времени. В число данных и искомых величин входят: действующие силы, время движения, начальная и конечная скорости точки.
13. 196,2.
14. Скалярная.
15. По формуле Σq_{kx}.
16. Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.
17. $q_x - q_{ox} = \Sigma S_x(\vec{P}_k)$.
18. $Q_x - Q_{ox} = \Sigma S_x(\vec{P}_k^e)$.
19. Геометрическая сумма импульсов системы сил.
20. $\Sigma \vec{S}(\vec{P}_k^e) = 0$.
21. По формуле $m\vec{v}_c$.
22. $\vec{R} = 0$ ($\vec{R}$ – главный вектор системы сил).
23. $\vec{R} = \rho \pi d^2 U^2 / 4$.
24. 98,1.
25. Горизонтальная.

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Контрольные вопросы и тестовый контроль

1. По какой формуле вычисляется осевой момент инерции сплошного однородного диска массы m и радиуса R?
2. По какой формуле вычисляется осевой момент инерции тонкого кольца массы m и радиуса R?
3. По какой формуле определяется момент инерции относительно центральной оси однородного стержня длины l и массы m?
4. По какой формуле определяется осевой момент инерции относительно центральной оси, проходящей через конец однородного стержня массы m и длины l?

5. Запишите формулу Штейнера-Гюйгенса для вычисления осевого момента инерции относительно оси, параллельной центральной.
6. По какой формуле вычисляется момент количества движения материальной точки?
7. По какой формуле вычисляется кинетический момент механической системы?
8. Как записывается теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра в векторной форме?
9. Как записывается теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси, проходящей через неподвижный центр?
10. Как вычисляется кинетический момент твердого тела относительно оси вращения?
11. В каком случае кинетический момент системы относительно неподвижного центра постоянен по величине и направлению?
12. В каком случае проекция кинетического момента системы на ось, проходящую через неподвижную точку, постоянна?
13. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.
14. Напишите уравнение равнопеременного вращения твердого тела.
15. Запишите дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

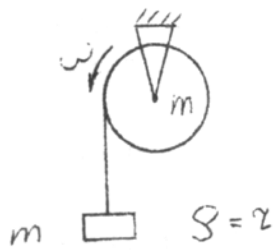


Рисунок 8.17

16. Определите кинетический момент системы (рис. 8.17) относительно неподвижной оси.

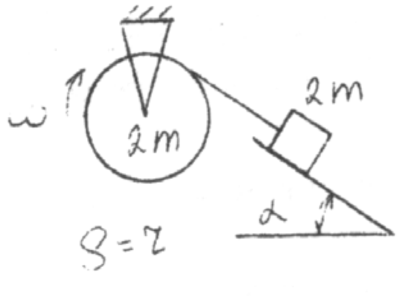


Рисунок 8.18

17. Определите кинетический момент системы (рис. 8.18) относительно неподвижной оси.

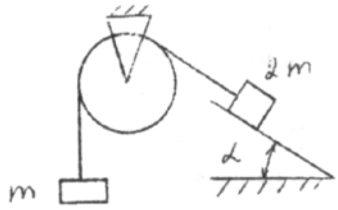


Рисунок 8.19

18. Определите кинетический момент системы (рис. 8.19) относительно неподвижной оси.

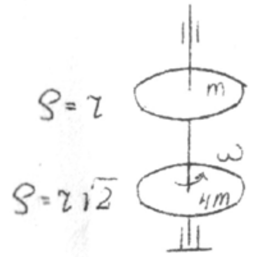


Рисунок 8.20

19. Определите кинетический момент системы (рис. 8.20) относительно неподвижной оси.

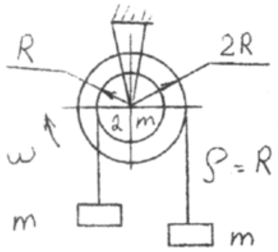


Рисунок 8.21

20. Определите кинетический момент системы (рис. 8.21) относительно неподвижной оси.

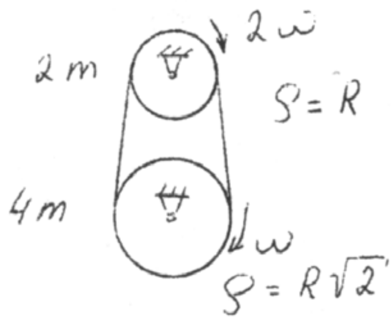


Рисунок 8.22

21. Определите кинетический момент меньшего диска системы (рис. 8.22).

22. Определите кинетический момент большего диска (рис. 8.22).

23. Определите кинетический момент системы (рис. 8.22).

24. Определите угловое ускорение вращения диска (рис. 8.17).

25. Определите угловое ускорение вращения диска (рис. 8.18).

Тестовый контроль

1. $g\sin\alpha/2r$.
2. По формуле $mR^2/2$.
3. По формуле $ml^2/12$.
4. $J = J_c + mcl^2/2$.
5. По формуле $\Sigma\vec{r}_k \times m_k\vec{V}_k$.
6. $dL_z/dt = \Sigma m_z(\vec{P}_k^e)$.
7. $g/2r$.

8. $\Sigma m_z(P_k^e) = const$.

9. $m\ddot{x}_c = \Sigma P_{kx}$; $m\ddot{y}_c = \Sigma P_{ky}^e$; $J_c\ddot{\varphi} = \Sigma m_c(\vec{P}_k^e)$.

10. $12mR^2\omega$.

11. $4mR^2\omega$.

12. $2mr^2\omega$.

13. $4mr^2\omega$.

14. По формуле mR^2.

15. По формуле $ml^2/3$.

16. По формуле $\vec{r} \times m\vec{v}$.

17. $3mr^2\omega$.

18. $9mr^2\omega$.

19. $7mR^2\omega$.

20. $8mR^2\omega$.

21. $d\vec{L}_0/dt = \Sigma\vec{m}_0(\vec{P}_k^e)$.

22. $L_z = J_z\omega$.

23. $\Sigma m_z(\vec{P}_k^e) = 0$.

24. $\Sigma\vec{m}_0(\vec{P}_k^e) = 0$.

25. $J_z\ddot{\varphi} = \Sigma_z(\vec{P}_k^e)$.

Предлагаются следующие варианты наборов вопросов (табл. 8.4).

Таблица 8.4 – Варианты наборов вопросов

Номер варианта	*Вопросы*
1	1, 6, 16
2	2, 7, 17
3	3, 8, 18
4	4, 9, 19
5	5, 10, 20
6	6, 11, 21
7	7, 12, 22
8	8, 13, 23
9	9, 14, 24
10	10, 15, 25

9 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Основные понятия векторной алгебры

Методы векторного исчисления широко используются в механике. Они имеют большое преимущество перед координатным методом, что объясняется сокращенностью записей, физической наглядностью формул. Векторные формулы не связаны с системой координат. Они инвариантны по отношению к преобразованиям координат.

Различают два типа величин: скалярные и векторные. Физические величины, определяемые числом, не зависящим от выбора системы координат, называются скалярными, или скалярами. Векторной величиной, или вектором, является направленный отрезок, который задается его длиной и направлением в пространстве. В свою очередь, вектор может быть свободным (приложенным в любой точке пространства), скользящим (приложенным в любой точке некоторой прямой – линии действия вектора) и неподвижным (приложенным в некоторой фиксированной точке).

Проекция вектора на ось и на плоскость. Аналитическое задание вектора

Проекцией вектора $A\vec{B} = \vec{a}$ на ось x (рис. 9.1) называется, взятая с соответствующим знаком, длина отрезка A_1B_1, заключенного между проекциями начала и конца вектора $A\vec{B}$ на эту ось. Проекция берется со знаком "плюс", если перемещение от A_1 к B_1 совпадает с положительным направлением оси x, и, если нет, то со знаком "минус», $np_x(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB})_x = \pm|A_1B_1| = \pm|AB'| = AB\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, x})$ или $np_x(\vec{a}) = a_x = a\cos(\widehat{\vec{a}, x}) = a\cos\alpha$.

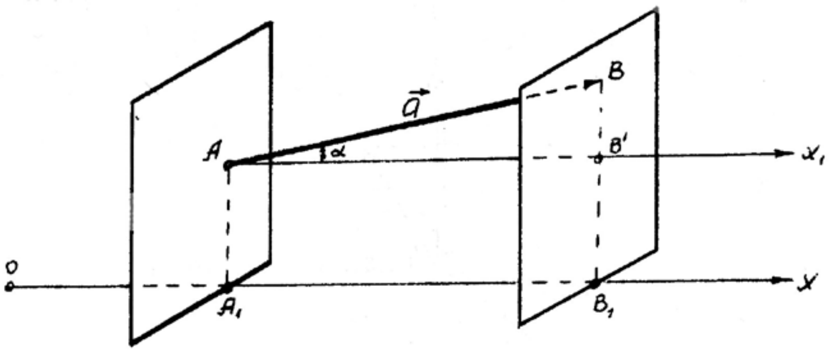


Рисунок 9.1

Согласно определению, проекция вектора на ось есть величина скалярная: положительная или отрицательная, в зависимости от того, острый иди тупой угол образует проектируемый вектор с осью проекций.

Из самого определения проекции вектора на ось следует, что проекция не изменится, если мы будем переносить вектор параллельно самому себе или если будем проектировать на различные, но параллельные и одинаково направленные оси.

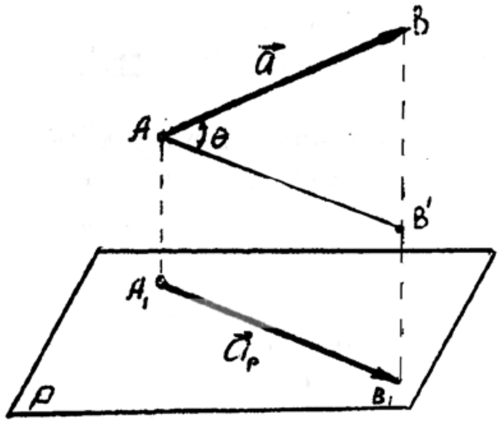


Рисунок 9.2

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ на плоскость P называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, заключенный между проекциями начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту плоскость (рис. 9.2). По определению $\vec{a}_p = \overrightarrow{A_1B_1}$ есть вектор, который характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости P. Модуль вектора $\vec{a}_p$ определяется равенством $a_p = \left|A_1B_1\right| = a\cos\Theta$, где Θ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}_p$.

Суммой двух свободных векторов называется вектор, совпадающий по величине и направлению с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах. Сумма нескольких векторов есть вектор, который изображается замыкающей стороной ломаной линии, составленной из слагаемых векторов. При этом начало каждого последующего вектора откладывается от конца предыдущего, а замыкающий вектор направлен от начала первого слагаемого вектора к концу последнего. Составленный таким способом многоугольник носит название векторного многоугольника, а сам метод – правила векторного многоугольника. Если ломаная линия, составленная из слагаемых векторов, самозамыкается, т.е. если конец последнего из слагаемых векторов совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нулю.

В векторном исчислении различают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

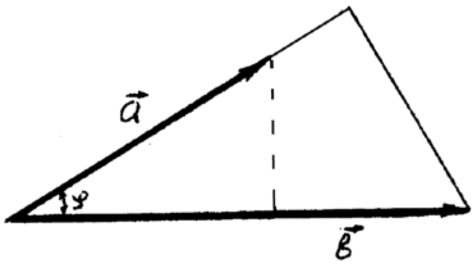


Рисунок 9.3

1. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, равная произведению модулей a и b этих векторов, умноженному на косинус угла между ними (рис. 9.3). По определению $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

Скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot npb_a = b\cdot npa_b = ab\cos\varphi .$$

Из этого равенства следует, что:

а) скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю;

б) скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}^2\right| = a \cdot a\cos\varphi = a^2$. Здесь $\varphi = 0$.

2. <u>Векторное произведение</u> есть <u>вектор</u> (рис.9.4), модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними.

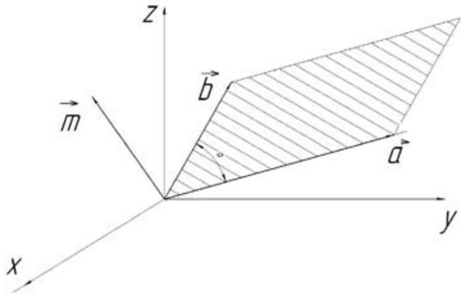


Рисунок 9.4

Направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем в ту сторону, чтобы, смотря с конца полученного вектора $\vec{m}$, видеть кратчайший поворот первого вектора до совмещения со вторым против хода часовой стрелки (рис. 9.4). По определению вектор векторного произведения определяется по формуле

$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b}$,

а его модуль

$m = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Из последнего равенства следует, что:

1) модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 9.4);

2) векторное умножение двух векторов свойством коммутативности (переместительности) не обладает, так как $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

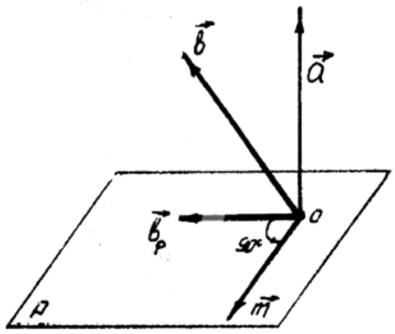


Рисунок 9.5

Геометрически векторное произведение $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b}$ можно найти следующим построением (рис. 9.5): проводим плоскость Р, перпендикулярную вектору $\vec{a}$, строим ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на плоскость Р и поворачиваем эту проекцию в плоскости Р вокруг точки О на 90° против хода часовой стрелки (если смотреть на плоскость с конца вектора $\vec{a}$). Полученный вектор $\vec{m}$ является векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛЕ. ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Таблица 9.1 – Основные формулы для производных

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
5	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
7	$y = e^x$	$y' = e^x$
8	$y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$
9	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
10	$y = c \cdot u(x)$	$y' = c \cdot u'(x)$
11	$y = u(x) + v(x) + w(x)$	$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x)$
12	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
13	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
14	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
15	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
16	$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Окончание табл. 9.1

17	$y=\mathrm{ctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\mathrm{cosec}^2 x$
18	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20	$y=\mathrm{arctg}x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
21	$y=\mathrm{arcctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
22	$y=(u^v)'$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$	$y'=vu^{v-1}\cdot u'+u^v\log u\cdot v'$
23	$x=f(y)$	$x_y{}'=\dfrac{1}{y'}$

При решении технических задач приходится не по заданной функции искать ее производную, а наоборот, восстанавливать функцию по известной ее производной. Разыскание для функции всех ее первообразных, называемое интегрированием ее, и составляет одну из задач интегрального исчисления. Эта задача является обратной основной задаче дифференциального исчисления.

Ниже приведены основные формулы неопределенных интегралов, которые могут быть использованы при решении задач кинематики и динамики курса теоретической механики.

1. $\int 0\cdot dx=C$.
2. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$.
3. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$.
4. $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.
5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C$.
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.
7. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $\int e^x dx=e^x+C$.
8. $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C$.

15. $\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \ln \frac{x + b}{x + a} + C$.

Интегральное исчисление используется также в тех разделах теоретической механики, в основу которых положен принцип суммирования бесконечно малых элементов (определение центра тяжести твердых тел, моментов инерции и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для студентов технических вузов / С. М. Тарг. – 13-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2003. – 416с.: ил. /и предыдущие издания/.

2. Котова, Л. И. Теоретическая механика : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации, технологических специальностей, а также геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических специальностей вузов / сост. Л. И. Котова [и др.]; под. ред. С. М. Тарга. – Москва : Высшая школа, 1988. – 64 с.

3. Локтионов, А. В. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Статика» курса теоретической механики для студентов механических и технологических специальностей : методические указания / А. В. Локтионов, Л. Н. Буткевич. – Витебск, 1997. – 90 с.

4. Локтионов, А. В. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Кинематика» курса теоретической механики для студентов механических и технологических специальностей : методические указания / А. В. Локтионов, Л. Н. Буткевич. – Витебск, 1998. – 84 с.

5. Локтионов, А. В. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» курса теоретической механики для студентов механических и технологических специальностей : методические указания / А. В. Локтионов, Л. Н. Буткевич. – Витебск, 1999. – 106 с.

6. Локтионов, А. В. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ: учебное пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений / А. В. Локтионов, Л. Г. Крыгина ; Витебск, 1998. – 189 с.

7. Локтионов, А. В. Теоретическая механика. Статика и кинематика : учебное пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений / А. В. Локтионов, Л. Г. Крыгина. – Витебск, 2005. – 171 с.

8. Локтионов, А. В. Теоретическая механика : тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» : учеб. пособие. Ч. 1 / А. В. Локтионов ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2007. – 227 с.

9. Локтионов, А. В. Теоретическая механика : тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» : учеб. пособие. Ч. 2. / А. В. Локтионов ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2005. – 205 с.

10. Локтионов, А. В. Теоретическая механика. Динамика : учеб. пособие / А. В. Локтионов, Л. Г. Крыгина ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2004. – 171 с.