МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению курсовой работы для студентов специальности
1–54 01 01–04 «Метрология, стандартизация и сертификация
(легкая промышленность)»

Витебск
2013

УДК 658.516

Теоретическая метрология : методические указания к выполнению курсовой работы для студентов специальности 1–54 01 01–04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)».

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2013.

Составители: доц., к.т.н. Петюль И.А.
доц., к.т.н. Махонь А.Н.

В методических указаниях к выполнению курсовой работы изложены требования к структуре, содержанию работы и порядку ее выполнения. Представлены теоретические сведения из области теории измерений, необходимые для выполнения расчетной части по оценке погрешностей результатов многократных измерений, изложены основные положения концепции оценки неопределенности результата измерений, которые применимы к методикам проведения испытаний при контроле и оценке качества продукции легкой промышленности. Методические указания предназначены для студентов специальности 1–54 01 01–04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)» очной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой «Стандартизация» 1 февраля 2013 г., протокол № 7.

Рецензент: д.т.н., доц. Кузнецов А.А.
Редактор: к.т.н., доц. Шевцова М.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» «___»_____________ 2013 г., протокол № ____

Ответственный за выпуск: Лапырева О.К.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати ________ Формат _________ Уч.- изд. лист. _________
Печать ризографическая. Тираж ________ экз. Заказ № _______ Цена ________

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Лицензия № 02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский пр–т, 72.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Измерения – один из важнейших путей познания природы, объединяющий теорию с практической деятельностью человека. Измерения являются основой научных знаний, служат для учета материальных ресурсов и планирования, обеспечения требуемого качества продукции, взаимозаменяемости деталей и узлов, совершенствования технологии, автоматизации производства, стандартизации, охраны здоровья и обеспечения безопасности труда и для многих других отраслей человеческой деятельности. Они количественно характеризуют окружающий материальный мир, раскрывая действующие в природе закономерности.

Измерение является сложным процессом, включающим в себя взаимодействие ряда структурных элементов – измерительной задачи, объекта измерения, принципов, методов и средств измерения, его модели, условий измерения, наблюдателя, результата и погрешности измерения. Сам процесс измерения состоит из ряда последовательных этапов, включающих в себя постановку измерительной задачи, планирование измерительного эксперимента, непосредственно измерительный эксперимент, обработку экспериментальных данных, завершаемую анализом и интерпретацией полученных результатов, а также записью результата в соответствии с установленной формой представления. Грамотное и сознательное выполнение всех этапов измерения является залогом сведения к минимуму ошибочных выводов, сделанных по результатам измерений, и принятия решений, не приводящих к материальным и моральным потерям [1].

В практической деятельности качество результата измерения оценивается как систематической, так и случайной составляющими погрешности. При грубых измерениях чаще всего ограничиваются систематическими составляющими, которые могут быть учтены с помощью поправок. А в тех случаях, когда требуется получение высокоточных измерений, необходимо применять не только прецизионные средства измерений, но и учитывать все факторы, влияющие на качество результата измерения, включая и случайные, которые невозможно определить без априорной информации или применения статистической обработки.

Появление влияющей на качество результата измерения случайной составляющей связано с проблемой измерения параметров реальных процессов или явлений в реальных условиях. Именно реальность условий и процессов вызывают появление огромного количества объективных и субъективных факторов, оказывающих влияние на качество результата измерения. Изменение температуры, напряжения питания при многократном измерении одной и той же физической величины, сравнительная оценка технологических процессов по их точности, производительности, экономичности и т. д. – все эти, а также множество других явлений, оказывающих влияние на качество результата измерения, носят случайный характер. Соответственно математические модели (в первую очередь, законы распределения вероятности) случайных составляющих, влияющих на качество результата измерения, не являются теоретической абстракцией, а описывают реально существующие физические явления. Так, например, равномерным законом описывается неточность от округления при расчетах, неточность, вызванная трением в стрелочных приборах с креплением подвижной части на кернах и подпятниках; арксинусоидальному закону распределения вероятности подчиняется неточность средств измерения электрических и неэлектрических величин, вызванная влиянием напряжения силовых цепей с частотой 50 и 400 Гц; влияние температуры на качество измерений приборами, работающими в течение всего года на открытом воздухе, имеют двухмодальное распределение и т. д. [2, 3].

Необходимо учитывать, что вид закона распределения вероятности, определяющего качество результата измерения, имеет и экономическую составляющую многократных измерений (а это важно в современных условиях), так как от него зависит рассеяние всех оценок (стандартного отклонения, асимметрии, эксцесса и т. д.). То есть для обеспечения одного и того же качества измерения при одном законе распределения можно ограничиться достаточно малым количеством экспериментальных данных, тогда как при другом − количество исходных данных должно быть значительно больше. Необходимо знание закона распределения вероятности, определяющего качество результата измерения, и при определении одних параметров закона распределения по его другим параметрам. Так, например, квантильные оценки, то есть оценки, регламентирующие заданное значение доверительной вероятности, без вида закона распределения вероятности не могут быть выражены через стандартное отклонение.

При измерениях, к результатам которых предъявляются высокие требования (особенно если ошибка в прогнозе получаемого результата может повлечь за собой большие экономические или человеческие потери), необходимо при анализе качества результата измерения определять не только оценку характеристики положения закона распределения вероятности (среднего арифметического, медианы, моды и т. д.), но и закон распределения этой оценки, а также трансформацию во времени закона распределения оценки характеристики положения, вызванную влиянием различных факторов с различными статистическими характеристиками. Это, в первую очередь, связано с тем, что при одной и той же доверительной вероятности от закона распределения, характеризующего качество результата измерения, зависят размеры доверительного интервала, который в общем случае определяет возможные границы изменения оценок характеристик положения. И статистическая обработка полученных при измерении экспериментальных данных должна показать, в каких пределах и с какой вероятностью может находиться оценка характеристики положения закона распределения вероятности, с которой идентифицируется значение измеряемой физической величины.

Поэтому первая и вторая части работы направлены на изучение широко применяемых в легкой промышленности средств измерения, получение практических навыков по статистической обработке результатов многократных измерений, практическое освоение методов суммирования неисключенных систематических погрешностей и случайных погрешностей.

Новой концепцией, содержащей подход к оценке точности результата измерения, является концепция оценки неопределенности результата измерения. В настоящий момент для решения многих метрологических задач неопределенность претендует на звание «единой характеристики точности» результата измерения [4]. Учитывая это направление развития современной метрологии, третья часть курсовой работы направлена на изучение основных положений концепции неопределенности, получение практических навыков оценивания неопределенности результата при испытаниях продукции легкой промышленности.

Таким образом, целью курсовой работы является изучение различных подходов к оценке точности результатов измерений, получение практических навыков статистической обработки результатов многократных измерений, закрепление знаний по основным разделам курса «Теоретическая метрология».

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Курсовая работа состоит из трех самостоятельных разделов и выполняется в соответствии с приведенными ниже указаниями по индивидуально полученным у преподавателя данным.

Тема работы: «Обработка результатов многократных измерений».

Задание является общим для всех вариантов и формулируется для каждого раздела в следующем виде:

1. Изучить конструкцию средства измерения, физический принцип, положенный в ее основу, технические и метрологические характеристики средства измерения.

<u>Исходные данные для выполнения первой части работы:</u> объект измерения, измеряемая физическая величина (ФВ), средство измерения (СИ).

2. Определить результат многократного измерения физической величины, указанной в задании к выполнению раздела 1, представив его оценку с указанием доверительных границ погрешности результата измерения.

<u>Исходные данные для выполнения второй части работы:</u> массив результатов измерений физической величины, указанной в задании к разделу 1. Данные получены при прямых многократных измерениях заданного параметра.

3. Разработать алгоритм оценивания неопределенности и определить границы расширенной неопределенности результата испытания продукции легкой промышленности, полученного по стандартной методике, указанной в индивидуальном задании.

<u>Исходные данные:</u> стандартная методика определения показателя качества, паспорта на применяемое оборудование и средства измерений, результаты измерений.

Расчетно-пояснительная записка выполняется на белой бумаге формата А4 на одной стороне листа. Записка выполняется аккуратно, в соответствии с требованиями к оформлению по ГОСТ 7.32. По тексту работы приводятся все расчетные формулы и промежуточные вычисления, необходимые графики и таблицы. Допускается написание формул рукописным способом. В конце работы приводится перечень использованной литературы.

Пример оформления титульного листа приведен в приложении 1.

Структура расчетно-пояснительной записки в обязательном порядке должна включать:

задание;

содержание;

введение, с указанием целей и задач работы;

изучение конструкции средства измерения (с указанием конкретного средства измерения в соответствии с индивидуальным заданием);

обработка результатов прямых многократных измерений физической величины (с указанием конкретной физической величины в соответствии с индивидуальным заданием);

оценивание неопределенности результата измерения (с указанием конкретного параметра в соответствии с индивидуальным заданием);

выводы по работе;

список использованных источников.

Для удобства выполнения и проверки работы допускается разбивать разделы на подразделы, которые необходимо включать в содержание.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

2.1 ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

При выполнении данного раздела следует с применением рекомендованной литературы [5–11], ресурсов сети интернет, каталогов средств измерений, технической документации на средства измерений, изучить конструкцию и физический принцип, положенный в основу конструкции указанного в индивидуальном задании средства измерения. Следует привести принципиальную схему СИ и сделать ее краткое описание. Выбрать конкретный тип, марку СИ, учитывая, что с его помощью получены результаты измерения, представленные в индивидуальном задании для выполнения второго раздела работы. Изучить технические и метрологические характеристики СИ. Обратить особое внимание на такие метрологические характеристики, как диапазон измерений и разрешающая способность, в обязательном порядке указать характерные виды погрешности и их нормируемые значения. Провести анализ источников погрешностей измерений. Описать возможные причины появления элементарных составляющих погрешностей, дать оценку предполагаемого характера изменения каждой из составляющих погрешностей (систематическая или случайная).

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА МНОГОКРАТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение. Для вычисления доверительных границ интервала необходимо вычислить доверительные границы случайной погрешности и границы неисключенной систематической погрешности результата измерения.

Результат многократного измерения, являясь случайной величиной, представляется в виде некоторой оценки характеристики положения закона распределения вероятности (ЗРВ), значение которой определено в доверительных интервалах с заданной вероятностью. А так как размеры доверительных интервалов зависят от закона распределения вероятности, то для повышения точности целесообразно найти закон распределения вероятности и только после этого рассчитать границы, в которых может находиться оценка характеристики положения с выбранной заданной доверительной вероятностью. С оценкой характеристики положения идентифицируется значение измеряемой величины.

Методика определения ЗРВ случайной величины, который полностью описывается плотностью распределения вероятности и (или) функцией распределения вероятности, базируется на использовании совокупности аналитических и графических методов.

Аналитические методы определения формы ЗРВ основаны на вычислении **оценок показателей формы распределения:** асимметрии, эксцесса, коэффициента формы кривой распределения, контрэксцесса, энтропийного коэффициента. При этом найденные оценки сравниваются с известными табличными значениями показателей, рассчитанными для различных теоретических функций распределения. Опыт показывает, что определить с высокой достоверностью ЗРВ по оценкам показателей формы кривой сложно, так как очень часто одинаковые значения оценок могут принадлежать различным ЗРВ. По этой причине определение возможных форм ЗРВ по оценкам показателей формы кривой следует рассматривать в качестве предварительной оценки формы ЗРВ (одной или нескольких возможных вариантов).

Гипотезу о форме ЗРВ, которую следует подвергнуть дальнейшему анализу, можно выдвинуть после построения гистограммы. Необходимо отметить, что форма гистограммы очень часто зависит от количества интервалов, на которые разбивается весь массив выборки, от расположения интервалов относительно характеристики положения (среднего арифметического, медианы и т. д.). Поэтому целесообразно привести в работе не менее двух гистограмм, которые отличаются друг от друга количеством интервалов или (и) другими параметрами. При выполнении работы необходимо обосновать необходимость дальнейшего анализа нескольких гистограмм или возможность определения результата измерения по одной гистограмме.

Окончательный вывод о том, какая гипотеза о форме ЗРВ должна быть подвергнута дальнейшему анализу, может быть сделан после сравнения формы ЗРВ, полученной по гистограмме, с возможными формами, определенными по оценкам показателей формы распределения (асимметрия, эксцесс, коэффициент формы кривой распределения, контрэксцесс, энтропийный коэффициент).

Если предварительный вывод о возможных формах ЗРВ, полученный по оценкам показателей формы, соответствует выводу о форме ЗРВ, полученному на основании построенной гистограммы, то можно гипотезу о форме ЗРВ принять к дальнейшему анализу. Если же этого соответствия не получается, то необходимо внести изменения в параметры гистограммы (изменить длину интервалов, их количество, сдвинуть середину интервалов), построить новую гистограмму и выдвинуть по ней другую гипотезу о форме ЗРВ. Провести очередное сравнение и добиться соответствия формы гистограммы выводу, сделанному на основании сравнения оценок показателей формы распределения с показателями формы известных теоретических ЗРВ (табличных).

После того как гипотеза о форме ЗРВ будет выдвинута, с помощью гистограммы определяются аналитическое выражение ЗРВ и числовые значения параметров, входящих в аналитическое выражение ЗРВ. Целесообразно гистограммы, функции плотности и функции распределения вероятности (аппроксимирующие функции) строить в линейном масштабе.

Рассчитанные числовые значения параметров, входящих в аналитические выражения аппроксимирующих функций ЗРВ, могут не соответствовать действительному ЗРВ, так как числовые значения, входящие в аналитические выражения, тоже случайны. Поэтому для определения соответствия аналитического выражения ЗРВ экспериментальным данным применяются критерии согласия, которые в общем случае позволяют оценить степень расхождения экспериментальных функций и аппроксимирующих. Следует учесть, что ни один из критериев согласия не дает абсолютно достоверный вывод о степени соответствия экспериментальных и аппроксимирующих функций, описывающих конкретный ЗРВ. Для повышения достоверности при проверке соответствия экспериментальных и аппроксимирующих функций необходимо применить как минимум два критерия согласия и только после этого сделать вывод о ЗРВ.

Степень расхождения экспериментальных и аппроксимирующих функций ЗРВ определяется с использованием критериев согласия Пирсона (χ^2), А.Н. Коломогорова (λ), Мозеса (ω^2), при небольшом числе измерений – составного критерия d. В работе студенты могут использовать другие критерии, методики расчета которых описаны в литературе.

После определения ЗРВ необходимо с заданной вероятностью рассчитать доверительные границы случайной погрешности. Для выполнения расчетов рекомендуется принять уровень доверительной вероятности $P = 0{,}95$.

Используя результаты анализа возможных погрешностей, привносимых в результат применяемым средством измерения, методом измерения или вызванные другими источниками, выполненного в первом разделе работы, приступают к расчету доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерения, которая может включать несколько составляющих.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

На заключительном этапе расчета анализируют соотношение границ неисключенной систематической погрешности и случайной составляющей, после чего принимают решение о способе вычисления доверительных границ погрешности результата многократных измерений.

2.2.1 Определение точечных оценок закона распределения результатов измерения

На этом этапе определяем среднее арифметическое значение массива экспериментальных данных $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (1)$$

где n – количество отсчетов в массиве экспериментальных данных.

В качестве оценки центра распределения среднее арифметическое значение применяется для класса распределений, близких к нормальным. Но для симметричных экспоненциальных островершинных распределений наиболее эффективной является оценка медианы. Медиана — это такое значение признака, которое разделяет ранжированный ряд распределения на две равные по числу результатов измерения части. Для нахождения медианы нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда

$$x_{мед} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \text{ при четном } n,$$

$$x_{мед} = x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ при нечетном } n.$$

Для равномерного, трапецеидального распределений целесообразно определять оценку центра размаха

$$x_p = (x_1 + x_n) / 2.$$

С целью оценки рассеяния массива экспериментальных данных относительно среднего арифметического определяем несмещенную оценку дисперсии S_x^2 и среднее квадратическое отклонение (СКО) S_x:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad (2)$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \ . \qquad (3)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины и выражает как бы мощность рассеяния относительно постоянной составляющей. СКО имеет размерность случайной величины и является действующим значением рассеяния этой величины.

Оценка СКО среднего арифметического значения:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \ . \qquad (4)$$

Чтобы оценить асимметрию ЗРВ, определяется оценка третьего центрального момента $\bar{\mu}_3$, характеризующая несимметричность распределения (то есть скошенность распределения: когда один спад – крутой, а другой – пологий):

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3. \qquad (5)$$

Третий центральный момент и его оценка имеют размерность куба случайной величины, поэтому для относительной характеристики асимметрии применяют безразмерный коэффициент асимметрии *A*:

$$A = \frac{\bar{\mu}_3}{S_x^3}. \qquad (6)$$

Для симметричных распределений ЗРВ относительно математического ожидания $\mu_3 = 0$. Однако в реальности может быть определена только оценка третьего центрального момента $\bar{\mu}_3$, которая, являясь случайной величиной, может приближаться к нулю, но не быть равной ему. Достоверность оценки величины асимметрии может быть определена с помощью параметра, характеризующего его рассеяние

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}. \qquad (7)$$

Если выполняется условие $|A| \le 1{,}5\sigma_A$, то можно считать, что ЗРВ симметричный, если же $|A| \ge 1{,}5\sigma_A$, то несимметричность ЗРВ нужно учесть.

Чтобы оценить протяженность ЗРВ, определяется оценка четвертого центрального момента $\bar{\mu}_4$:

$$\bar{\mu}_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4. \qquad (8)$$

Четвертый центральный момент имеет размерность четвертой степени случайной величины, поэтому для удобства чаще применяют относительную величину, которая называется эксцессом *E* и определяется по формуле

$$E = \frac{\bar{\mu}_4}{S_x^4}. \qquad (9)$$

Эксцесс распределения для разных законов может иметь значение от 1 (для дискретного двухзначного) до ∞ (для распределения Коши).

Для классификации распределений по их форме удобнее использовать оценку контрэксцесса $\bar{k}$, изменяющуюся от 0 до 1 и определяемую по формуле

$$\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{E}}. \qquad (10)$$

В таблице 1 приведены числовые значения эксцесса и контрэксцесса для некоторых ЗРВ [2, с. 63, 66, 68].

Полученные в результате расчета значения эксцесса и контрэксцесса целесообразно сравнить со значениями, приведенными в таблице 1, и сделать предположение о ЗРВ физической величины.

Таблица 1 – Числовые значения эксцесса и контрэксцесса для некоторых законов распределения вероятности

Распределение	Эксцесс, E	Контрэксцесс, k	Энтропийный коэффициент
1	2	3	4
Прямоугольное (отношение верхнего основания к нижнему b / a = 1)	1,8	0,745	1,73
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему b /a = 2/3)	1,9	0,728	1,83
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему b / a = 1/2)	2,016	0,704	1,94
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему b / a = 1 / 3)	2,184	0,677	2.00
Треугольное (b / a = 0)	2,4	0,645	2,02
Лапласа (α = 1)	6	0,408	1,92
Нормальное (Гаусса) (α = 2)	3	0,577	2,07
Экспоненциальное			
α = 1 / 4	458	0,0467	0,085
α = 1 / 3	107,25	0,0966	0,424
α = 1 / 2	25,2	0,199	1,35
α = 3 / 4	10	0,32	
α = 1½	3,85	0,51	
Коши	0	∞	
Арксинусоидальное	1,5	0,816	1,11

2.2.2 Исключение грубых погрешностей

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, то есть является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность, и его исключают.

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью q (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений.

Если число измерений меньше 20, то применяют ***критерий Романовского*** [12, с. 175].

Критерий "трех сигм" применяется для результатов измерений (n > 20…50), распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью $q \le 0{,}003$, маловероятен и его можно считать промахом, если

$$|\bar{x} - x_i| > 3S_x\ , \tag{11}$$

где S_x – оценка СКО измерений.

Сначала проверке подвергают максимальное и минимальное значения ряда измерений. Величины $\bar{x}$ и S_x вычисляют без учета экстремальных значений x_i .

Для распределений, отличающихся от нормального, использование критерия "трех сигм" неправомерно. Так, если для нормального распределения при n = 100 появление $| x_i | > 3S_x$ можно считать промахом, то для равномерного распределения промахом является $| x_i | = 1{,}8S_x$, в то время как для экспоненциального распределения Лапласа $| x_i | > 3S_x$ есть, безусловно, отсчет, принадлежащий данной выборке.

Таким образом, границы цензурирования $t_{гр} \cdot S_x$ выборки зависят не только от объема n, но и от вида распределения. Назначая ту или иную границу, необходимо оценить уровень значимости $q=1 - P$, то есть вероятность исключения какой-либо части отсчетов, принадлежащих обрабатываемой выборке. Если поставить условие, что границы цензурирования должны в среднем отсекать менее одной точки выборки, то $P = n / (n+1)$ и $q = 1 - P = 1 / (n+1)$. Это соотношение и определяет выбор границ цензурирования в функции от объема выборки n.

В [2, с. 158] приводится выражение для приближенного расчета коэффициента $t_{гр}$ при уровне значимости $q < 1/ (n + 1)$

$$t_{гр} = 1{,}55 + 0{,}8\sqrt{E-1}\, lg(n/10), \tag{12}$$

где E – эксцесс распределения;

n – число результатов наблюдений.

Данное выражение применимо для:

- экспоненциальных распределений с E = 1,5...6;
- кругловершинных двухмодальных распределений с E = 1,5...3, являющихся композицией дискретного двузначного и нормального распределений;
- островершинных двухмодальных распределений с E =1,5...6, являющихся композицией дискретного двузначного распределения и распределения Лапласа;
- композиций равномерного и экспоненциальных распределений с показателем степени α = 1 / 2 при E = 1,8...6.

Для более точных расчетов границ цензурирования классов экспоненциальных и трапецеидальных распределений, а также распределений Стьюдента при $n > 8$ (в качестве конкретных моделей, соответствующих области реально встречающихся распределений погрешностей, могут быть приняты распределение Лапласа (E = 6, k = 0,4), нормальное (E = 3, k = 0,577), трапецеидальное с отношением верхнего и нижнего оснований 1:2 (E = 2, k = 0,7) и равномерное (E = 1,8, k = 0,745)) можно использовать выражение

$$t_{гр} = 1,62\ [3,8\ (E\text{-}1,6)^{2/3}]^{\lg \lg [1/(1\text{-}P)]}. \tag{13}$$

После расчета параметра $t_{гр}$ для выбранной доверительной вероятности верхняя и нижняя граница предельных значений отсчетов определяются выражениями

$$x_{min} = \bar{x} - t_{гр} S_x\ , \quad x_{max} = \bar{x} + t_{гр} S_x\,. \tag{14}$$

Отсчеты, не попадающие в рассчитанный интервал, считаются промахами и должны быть исключены из массива данных. После их исключения необходимо пересчитать точечные оценки ЗРВ.

2.2.3 Определение закона распределения вероятности результатов измерений

Определив оценки основных начальных и центральных моментов и показателей формы, можно предварительно определить характер кривой плотности распределения вероятности.

Так, например, если **оценка асимметрии** не близка к нулю (не выполняется неравенство $|A| \leq 1{,}5\sigma_A$), то кривую плотности распределения вероятности нельзя считать симметричной, при этом если $A > 0$, то более крутая часть кривой находится слева, если $A < 0$, то более крутая часть кривой находится справа. Степень несимметричности кривой распределения плотности вероятности можно оценивать и по тому, каким образом массив экспериментальных данных накрывается интервалом, рассчитанным по формуле (14): если значительная часть левой или правой половины этого интервала накрывает участок значений, экспериментальные данные в котором отсутствуют, то это указывает на наличие существенной несимметричности кривой распределения вероятности. И еще одним показателем несимметричности кривой может быть отличие среднего арифметического от медианы. Чем больше они отличаются друг от друга, тем большая несимметричность кривой распределения вероятности.

По величине **оценки эксцесса** можно оценить степень заостренности кривой распределения плотности вероятности. Если $E = \dfrac{\bar{\mu}_4}{S_x^4} \approx 3$, то можно считать, что закон распределения плотности вероятности близок к нормальному. При $E = \frac{\overline{\mu}_4}{S_x^4} > 3$ кривая имеет более узкую, острую и высокую вершину, чем у нормального закона, при $E = \frac{\overline{\mu}_4}{S_x^4} < 3 -$ более широкую, плоскую и низкую.

Наличие **моды** (или нескольких мод) может быть оценено по анализу частостей тех или иных значений экспериментальных данных. Если экспериментальные данные имеют тенденцию группироваться в какой-либо области значений (или областях значений), то можно говорить о возможности наличия моды (или нескольких мод). Однако следует учитывать, что без построения гистограммы оценить значение той или иной моды невозможно.

После анализа возможного характера кривой плотности распределения вероятности и сравнения полученных оценок показателей формы ЗРВ со значениями показателей, приведенными в таблице 1, делается предварительный вывод о возможных формах ЗРВ.

Построение гистограммы

Для уточнения формы ЗРВ прибегают к построению гистограмм. Осуществлять построение можно вручную, но предпочтительнее использовать любые программные средства, позволяющие осуществлять как статистическую обработку, так и графическое построение.

Гистограмма представляет собой ступенчатый график, состоящий из прямоугольников, у которых основаниями служат частные интервалы Δx_i на оси абсцисс, а площади равны частотам (или частостям) вариантов, попадающих в эти интервалы.

Для построения гистограммы необходимо выбрать оптимальное число интервалов группирования экспериментальных данных. Необходимость оптимизации числа интервалов связана, в первую очередь, с требованием построения гистограммы, наиболее близкой к действительной кривой плотности распределения вероятности, и исключения промахов при определении закона распределения вероятности экспериментальных данных.

Если число интервалов, на которые разбивается вся совокупность экспериментальных данных, будет велико, а интервалы соответственно будут малыми, то гистограмма будет отличаться от плавной кривой своей изрезанностью, многими всплесками и впадинами, а некоторые интервалы могут быть пустыми. Такие гистограммы иногда называют гребенчатыми. Если число интервалов будет мало, то могут быть потеряны характерные особенности действительного закона распределения вероятности. Так, например, если сделать один интервал, равный размаху экспериментальных данных, то любое распределение вероятности будет сведено к равномерному закону.Для выполнения задания предлагается два варианта выбора числа интервалов группирования экспериментальных данных:

1) значение числа интервалов находится между минимальным и максимальным числами, которые могут быть определены по формулам [2, с.180]

$$m_{min} = 0{,}55\ n^{0,4} \quad \text{и} \quad m_{max} = 1{,}25\ n^{0,4}, \tag{15}$$

где n – число отсчетов.

2) число интервалов может быть выбрано из таблицы 2 [13, с. 149].

Таблица 2 − Рекомендуемое число интервалов для построения гистограмм в зависимости от числа отсчетов

Число отсчетов	Рекомендуемое число интервалов
40 − 100	7 − 9
101 − 500	8 − 12
501 − 1000	10 − 16
1001 − 10000	12 − 22

При выборе конкретного числа интервалов группирования рекомендуется учитывать следующее:

1) если предполагается, что закон распределения плотности вероятности симметричный, с явно выраженной модой, то желательно, чтобы количество интервалов m было нечетным (так как при четном m и островершинном или двухмодальном симметричном распределении в центре гистограммы оказываются два равных по высоте столбца и середина кривой распределения плотности вероятности принудительно делается более плоской), если же несимметричный закон распределения плотности вероятности, то требования к нечетности количества интервалов не предъявляются;

2) интервалы должны быть равной длины (исключением могут быть первый и последний);

3) центральный интервал (при нечетном количестве интервалов) желательно располагать в середине размаха экспериментальных данных симметрично относительно середины;

4) если гистограмма оказывается явно двухмодальной, число интервалов может быть увеличено в 1,5 − 2 раза таким образом, чтобы на каждую моду приходилось бы примерно m интервалов;

5) в каждом интервале должно быть не менее 5 отсчетов (выполнение этого требования обязательно при проверке соответствия ЗРВ экспериментальным данным по критерию согласия К. Пирсона);

6) для получения гистограммы, наиболее близкой к реальному закону распределения вероятности, целесообразно построить несколько гистограмм, которые отличались бы друг от друга количеством интервалов (при этом варьирование количества интервалов должно быть в пределах рекомендуемых).

Из построенных таким образом гистограмм выбирается для дальнейшего анализа гистограмма, которая отвечает максимальному числу признаков, установленных в результате предварительного анализа;

7) если какое-либо значение отсчета попадает на границу интервала группирования, то рекомендуется разделить количество этих отсчетов пополам на два соседних интервала.

При построении вручную можно придерживаться следующей последовательности.

По формулам (15) определить количество рекомендуемых интервалов для построения гистограммы.

Определить длину интервала Δx по формуле

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}, \qquad (16)$$

где m – число интервалов гистограммы.

Установить граничные значения интервалов. Наименьшее граничное значение для первого интервала будет равно $x_{min.}$ Найти вторую границу интервала, прибавляя длину интервала Δx. Составить таблицу для подсчета частот соответствующих интервалов.

Определить количество значений, попавших в каждый интервал, и подсчитать частоты.

Таблица 3 – Подсчет частоты интервалов гистограммы

№ интер-вала	Границы интервала	Середина интервала	Подсчет частот	Частота, N
1	2	3	4	5

Построить гистограмму распределения, нанося по оси абсцисс границы интервалов, а по оси ординат — шкалу для частот. Для каждого класса строят прямоугольник с основанием, равным ширине интервала, и с высотой, соответствующей частоте попадания данных в этот интервал или частости (относительному количеству отсчетов, приходящихся на данный интервал), определяемой по отношению

$$\frac{N_i}{n \cdot \Delta x},$$

где N_i – частота (количество отсчетов, попавших в данный интервал);
n – количество отсчетов в исходном массиве;
Δx – длина интервала.

Таким образом, в гистограмме *площадь прямоугольника равна вероятности попадания отсчета в интервал*, который является основанием прямоугольника.

Вид гистограммы не всегда правильно отражает характер закона распределения вероятности. Поэтому в курсовой работе необходимо построение хотя бы двух гистограмм с числом интервалов в рассчитанных пределах. Покажем на примерах необходимость построения хотя бы двух гистограмм.

Пример 1

Построим гистограмму для результатов измерений $n = 100$, представленных в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты измерений физической величины x

5,11	8,32	7,23	5,89	8,35	6,69	8,90	6,68	8,28	7,26
7,22	8,92	5,73	9,45	5,12	9,50	5,15	9,56	5,72	5,87
7,30	6,57	8,37	9,91	7,39	6,65	8,97	6,72	9,73	8,30
6,62	5,47	9,22	6,64	9,59	9,76	6,75	8,45	5,88	8,99
5,90	7,84	8,47	9,05	7,16	5,23	5,02	7,19	8,57	7,45
6,52	7,85	6,05	5,74	9,68	9,62	8,48	7,85	7,49	5,75
5,42	6,64	7,34	9,12	5,43	6,39	5,23	6,85	7,94	8,52
7,15	5,12	8,04	5,17	9,80	7,20	9,26	7,52	6,10	7,17
8,32	8,40	7,21	9,29	9,79	6,64	7,58	8,79	8,11	8,72
6,61	6,66	9,19	7,62	8,88	8,17	6,55	9,23	7,77	6,08

Таблица 5 – Данные для построения гистограммы при $m = 9$

Границы интервалов	Частота, N_i	$\dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$
1	2	3
5,00...5,56	11	0,196
5,56...6,12	11	0,196
6,12...6,68	12	0,214
6,68...7,24	12	0,214
7,24...7,80	10	0,179
7,80...8,36	12	0,214
8,36...8,92	12	0,214
8,92...9,48	10	0,179
9,48...10,04	10	0,179

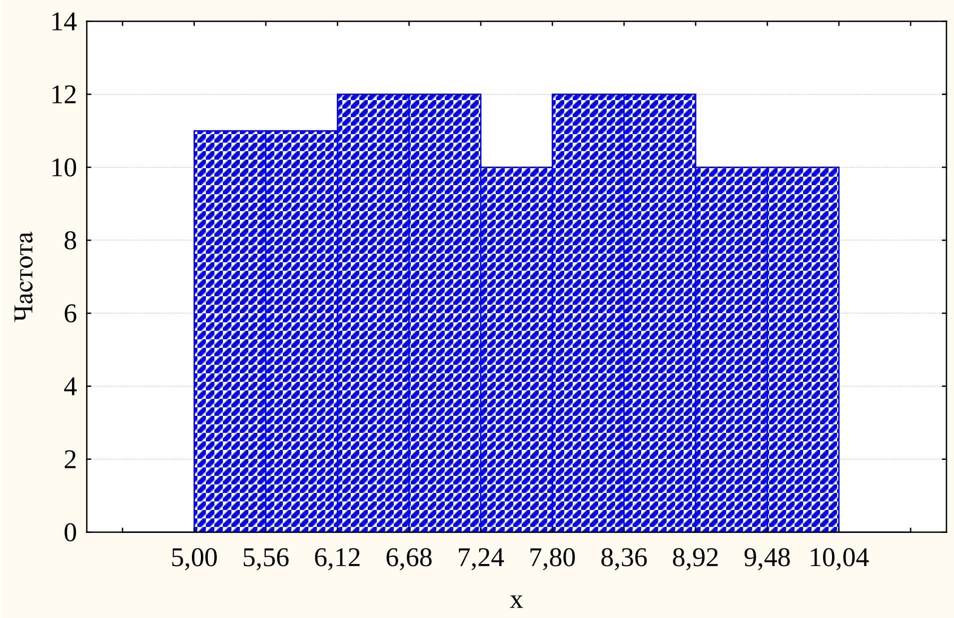


Рисунок 1 – Гистограмма, построенная по данным таблицы 5 (m = 9)

Таблица 6 – Данные для построения гистограммы при m = 7

Границы интервалов	Частота, N_i	$\dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$
5,00...5,72	12	0,17
5,72...6,44	11	0,15
6,44...7,16	16	0,22
7,16...7,88	20	0,28
7,88...8,60	16	0,22
8,60...9,32	14	0,19
9,32...10,04	11	0,15

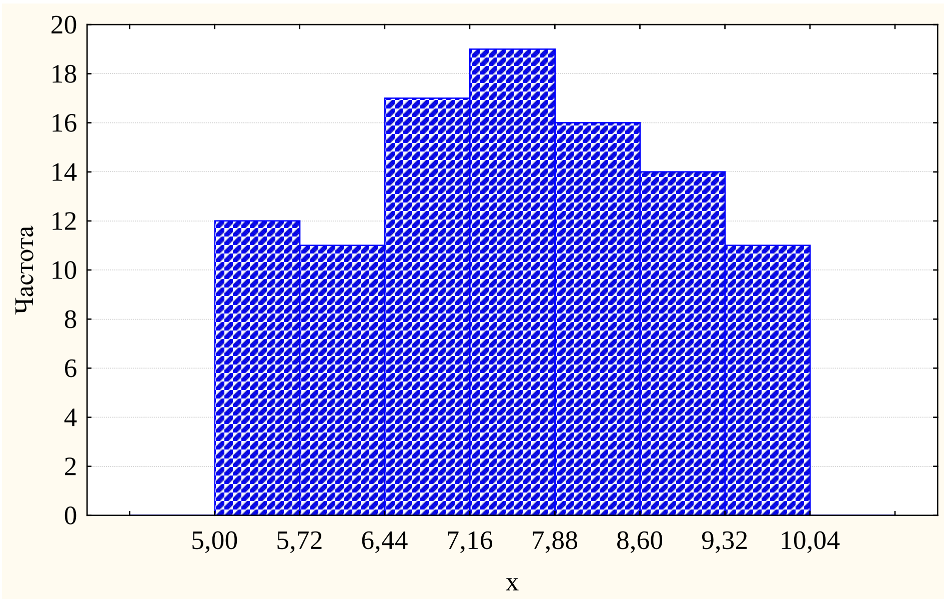


Рисунок 2 – Гистограмма, построенная по данным таблицы 6 (m = 7)

На рисунке 1, соответствующем таблице 5, ось абсцисс разбита на 9 интервалов длиной Δx = 0,56, а на рисунке 2, соответствующем таблице 6, – на 7 интервалов: Δx = 0,72. По виду гистограммы на рисунке 5 можно предположить, что результат измерения подчиняется равномерному закону распределения вероятности, а по гистограмме на рисунке 2 – одномодальному.

Пример 2

В качестве второго примера в таблице 7 приведен массив числовых значений результата измерения, который представлен гистограммами на рисунках 3 и 4.

Таблица 7 – Результаты измерений физической величины *x*

60,3	60,5	61,1	60,7	61,3	60,4	61,4	61,4	61,5	61,6
60,7	61,5	61,3	61,5	60,6	60,7	61,3	60,5	60,4	62,0
60,0	61,3	61,7	60,5	60,7	61,6	61,6	61,4	61,5	61,5
60,9	60,3	60,6	60,7	60,7	61,9	61,7	60,7	61,5	61,9
61,1	61,6	60,1	61,3	61,5	60,5	60,5	60,8	61,8	60,4
60,5	60,7	61,4	61,6	60,9	61,3	61,5	60,6	60,6	61,9
61,3	60,9	60,7	60,6	60,8	60,6	60,1	61,0	61,6	61,5
61,4	61,6	60,6	61,0	60,5	60,7	61,5	60,8	61,7	60,5
60,7	61,7	60,8	60,8	61,2	61,3	60,3	60,6	60,5	62,0
60,9	61,4	61,5	60,3	61,4	60,6	61,5	60,8	60,5	61,6

На рисунке 3, соответствующем таблице 8, ось абсцисс разбита на 10 интервалов шириной Δx = 0,2 каждый, а на рисунке 4, соответствующем таблице 9, – на 4 интервала шириной Δx = 0,5. По виду гистограммы на рисунке 3 можно предположить, что результат измерения подчиняется двухмодальному закону распределения вероятности, а по гистограмме на рисунке 4 – одномодальному.

Таблица 8 – Данные для построения гистограммы при m = 10

Границы интервалов	Частота, N_i	$\frac{N_i}{n \cdot \Delta x}$
60,0...60,2	3	0,15
60,2...60,4	7	0,35
60,4...60,6	19	0,95
60,6...60,8	17	0,85
60,8...61,0	6	0,3
61,0..61,2	3	0,15
61,2...61,4	15	0,75

Окончание таблицы 8

61,4...61,6	20	1,00
61,6...61,8	5	0,25
61,8...62,0	5	0,25

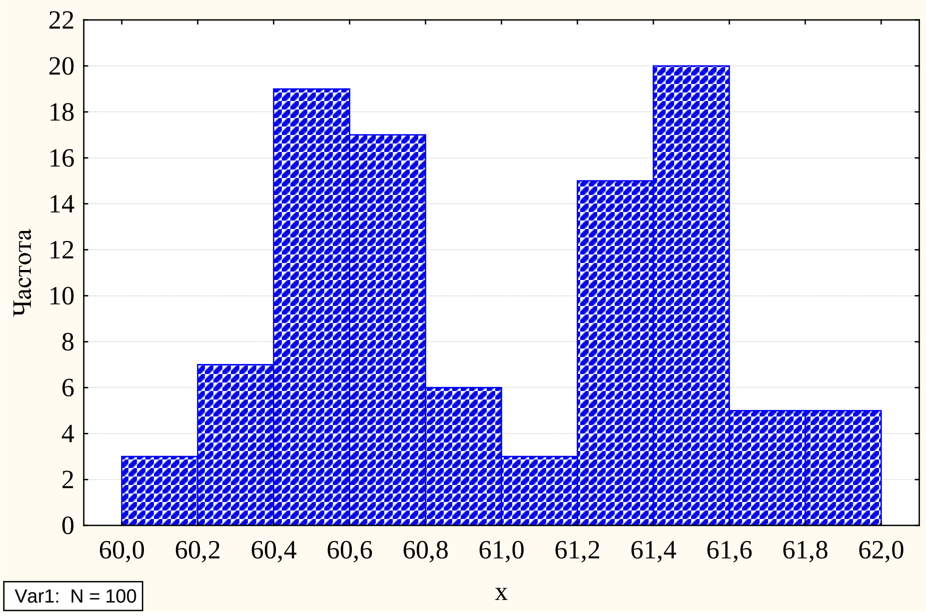


Рисунок 3 – Гистограмма, построенная по данным таблицы 8

Таблица 9 – Данные для построения гистограммы при m = 4

Границы интервалов	Частота, N_i	$\dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$
60,0...60,5	20	0,40
60,5...61,0	32	0,64
61,0...61,5	30	0,60
61,5...62,0	18	0,36

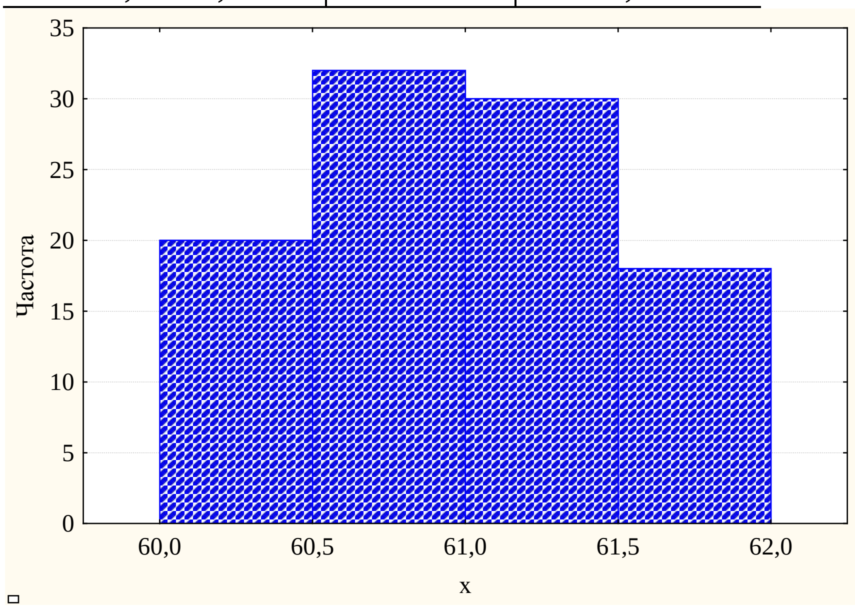


Рисунок 4 – Гистограмма, построенная по данным таблицы 9

После построения гистограммы необходимо построить полигон, который более наглядно, чем гистограмма, отражает форму распределения. Построение осуществляется путем соединения прямыми середин верхних оснований каждого столбца гистограммы. За пределами гистограммы, как слева, так и справа следуют пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс. Все эти точки при построении полигона и соединяются между собой отрезками прямых линий, образуя совместно с осью x замкнутую фигуру, площадь которой в соответствии с правилом нормирования равна единице.

Аппроксимация гистограммы и полигона распределения аналитической функцией плотности вероятности

Случайная величина не имеет более полного описания, чем аналитическая кривая плотности распределения. Поэтому идентификация формы распределения сводится к выбору аналитической модели, которая не противоречит данной выборке экспериментальных данных.

Для подбора аналитического выражения аппроксимирующей функции плотности распределения вероятности должно быть выдвинуто предположение о ее виде. После чего необходимо сгладить полученный на основе гистограммы полигон распределений, представив его в виде более плавной кривой, и сравнить полученную экспериментальную кривую с теоретической кривой плотности распределения вероятности. Ряд ЗРВ приведен в приложении 2.

После выбора аналитического выражения аппроксимирующей функции плотности вероятности необходимо определить параметры функции (то есть. коэффициенты, входящие в аналитическое выражение), если вычисленных моментов недостаточно. Параметры некоторых функций (например, равномерное распределение вероятности, треугольное, трапецеидальное и т. д.) определяются легко с помощью полученной экспериментальной кривой. Такие распределения как нормальное, распределение Максвелла, Релея не требуют дополнительных вычислений, так как полученных значений среднего арифметического и стандартного отклонения достаточно для определения всех констант, входящих в аналитическое выражение функции плотности вероятности. Однако есть более сложные выражения аналитических функций плотности вероятности (например, распределения Накагами, Пирсона, Стъюдента и т. д.), которые требуют нахождения определенного параметра, и вид функции зависит от значения этого параметра. В этом случае может быть рекомендована только процедура вычисления аппроксимирующей функции при различных значениях неизвестного параметра с последующим ее наложением на гистограмму.

При выборе параметров необходимо учитывать, что интеграл от аналитического выражения функции плотности вероятности в бесконечных пределах (или в пределах изменения значений экспериментальных данных) должен быть равен единице или близок к ней. Это условие может быть основным и при подборе параметров выражения аппроксимирующей функции.

В связи с тем, что некоторые распределения по внешнему виду похожи друг на друга, целесообразно для дальнейшего анализа выбрать не одну аппроксимирующую функцию, а две.

Пример 1

В приведенном выше примере по данным таблиц 4 и 5 построена гистограмма, представленная на рисунке 1. По внешнему виду гистограммы можно считать, что закон распределения вероятности близок к равномерному.

Подберем для данной гистограммы аппроксимирующую кривую в виде равномерного ЗРВ.

Значения экспериментальной плотности вероятности $P_{экс}(x)$ попадания отсчета в m интервал в зависимости от x определяются величиной $\dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$. Полученные результаты относятся к середине интервала.

Значения теоретической плотности распределения вероятности $P_{теор}(x)$ получаются по теоретической зависимости, которая должна быть близка по форме к экспериментально полученному полигону и описываться аппроксимирующим аналитическим выражением.

Представим аналитическое выражение аппроксимирующей функции в следующем виде:

$$P_{теор}(x)=\begin{cases} 0, & при \quad -\infty \le x \le x_1 \\ a, & при \quad x_1 \le x \le x_2 \\ 0, & при \quad x_2 \le x \le +\infty \end{cases}$$

Параметр a определим как среднее арифметическое экспериментального полигона распределения вероятности в серединах интервалов. Эта величина приблизительно равна a = 0,198.

Проверку правильности расчетов целесообразно провести исходя из двух условий:

1) средние арифметические значения экспериментальной и аппроксимирующей кривых должны быть равны;

2) площадь под аппроксимирующей кривой должна быть близка к единице.

Значения теоретической и экспериментальной плотности распределения вероятности записаны в таблице 10 и представлены на рисунке 5.

Среднее арифметическое значение экспериментальной функции, рассчитанное по массиву результатов измерений $\bar{x}_{экс}$ = 7,502.

Среднее арифметическое значение аппроксимирующей функции вычисляется как

$$\bar{x}_{теор} = P_{теор}(x) \cdot \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i = 0{,}198 \cdot 0{,}56 \cdot 67{,}68 = 7{,}504.$$

Таблица 10

№ интервала	Середина интервала, x_i	Экспериментальная плотность распределения вероятности, $P_{экс}(x) = \dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$	Теоретическая плотность распределения вероятности, $P_{теор}(x) = a$	$P_{теор}(x) * \Delta x$
1	5,28	0,196	0,198	0,11088
2	5,84	0,196	0,198	0,11088
3	6,4	0,214	0,198	0,11088
4	6,96	0,214	0,198	0,11088
5	7,52	0,179	0,198	0,11088
6	8,08	0,214	0,198	0,11088
7	8,64	0,214	0,198	0,11088
8	9,2	0,179	0,198	0,11088
9	9,76	0,179	0,198	0,11088
				Σ=0,99792

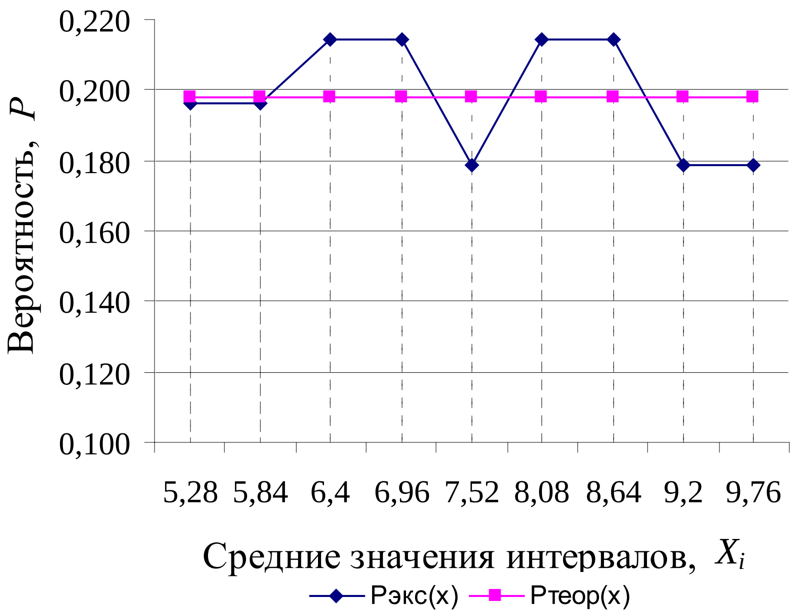


Рисунок 5 – Экспериментальный полигон распределения и аппроксимирующая функция плотности (для гистограммы на рисунке 1)

Таким образом, и первое и второе условие выполняются, следовательно, в качестве аппроксимирующей функции можно принять рассмотренное аналитическое выражение.

Пример 2

В таблице 11 представлены исходные данные для построения гистограммы, показанной на рисунке 6, отражающей распределение погрешности результатов измерения.

Таблица 11

Границы интервалов	Середина интервала	Частота, N_i	$\dfrac{N_i}{n \cdot \Delta x}$
-28…-16	-22	3	0,0066
-16…-4	-10	7	0,0154
-4…8	2	18	0,0395
8…20	14	7	0,0154
20…32	26	3	0,0066

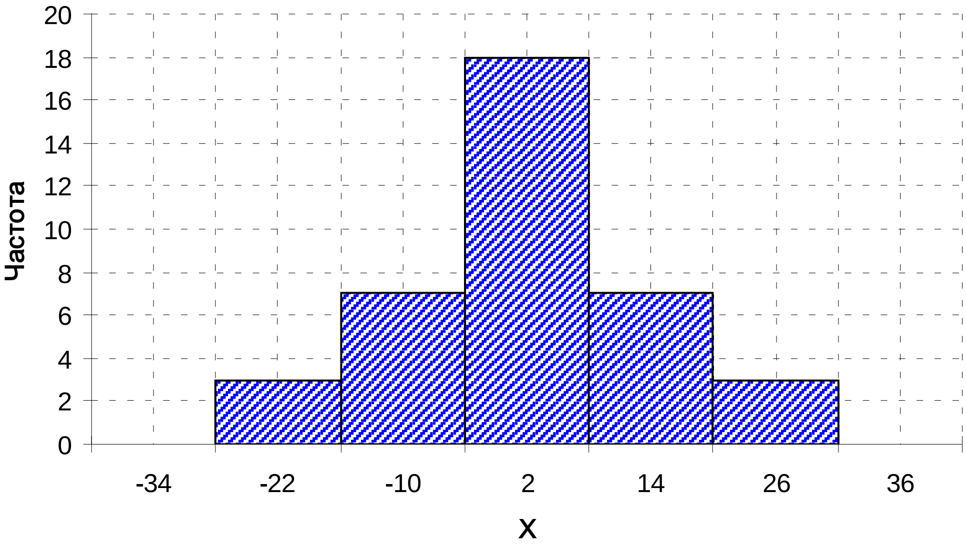


Рисунок 6 – Гистограмма распределения результатов измерений погрешности

Так как известно, что более 50 % распределений погрешностей относятся к классу экспоненциальных, описываемых уравнением плотности распределения вида

$$p(x) = A\ exp(-|x/(\lambda\sigma)|^{\alpha}), \tag{17}$$

то предположим, что полигон гистограммы на рисунке 6 может быть аппроксимирован функцией данного вида. Тогда задача сводится к нахождению параметров A, α и $\lambda\sigma = X_0$ в этом выражении. Коэффициент A при любом $X_0 \neq 0$ просто равен значению функции $p(x)$ при $x = 0$. Вывод формул для определения указанных параметров подробно изложен в [2, с.187], а окончательный вид представлен ниже:

$$\alpha = \frac{\Delta lg\left[-lg\dfrac{p(x)}{A}\right]}{\Delta lg\ x}. \tag{18}$$

Расчет координат для построения графика полигона гистограммы, представленной на рисунке 6, сведем в таблицу 12. Так как распределение погрешностей симметрично относительно нуля, то расчет производим от точки, погрешность в которой равна нулю ($x = 0$) с последующим прибавлением длины интервала (в данном примере $\Delta x = 12$).

Таблица 12 – Расчет координат для построения графика полигона

x_i	$lg\, x_i$	N_i	$\frac{p(x)}{A}=\frac{N_i}{A}$	$lg\left[-lg\frac{p(x)}{A}\right]$	$lg\left[-ln\frac{p(x)}{A}\right]$
0	-	18	1	-	-
12	1,079	7	0,3889	-0,387	-0,025
24	1,380	3	0,1667	-0,109	0,253
Δ	**0,301**	-	-	**0,278**	**0,278**

Из данных таблицы следует, что показатель степени для полигона гистограммы равен α = 0,278 / 0,301 = 0,92.

Интеграл функции (17) аналитически выражается только для α = 1, 1/2, 1/3, 1/4, поэтому эти значения являются предпочтительными и полученный в примере результат целесообразно для упрощения округлить до α = 1.

За величину $A = p(x)_{max}$, являющуюся эквивалентом $N_{i\ max}$, может быть взята высота центрального столбца гистограммы, следовательно в нашем случае $A = 18$.

Значение X_0 определяется по формуле

$$X_0=\frac{x}{\left[-ln\frac{p(x)}{A}\right]^{1/\alpha}}=\frac{12}{-ln\,0{,}3889}=12{,}7\approx 13.$$

После определения всех параметров получено аппроксимирующее выражение функции плотности распределения вида

$$p(x)=18\ exp(-\left|x/13\right|).$$

Использование критериев согласия при идентификации формы распределения результатов измерения

В качестве способа оценки близости распределения выборки экспериментальных данных к принятой аналитической модели закона распределения обычно рекомендуется использование так называемых критериев согласия.

Критерии согласия позволяют оценить вероятность того, что полученная выборка не противоречит сделанному предположению о виде закона распределения рассматриваемой случайной величины. Для этого выбирается некоторая величина u, являющаяся мерой расхождения статистического и теоретического законов распределения, и определяется такое ее значение u_α, чтобы $P(u \geq u_\alpha) = \alpha$, где α - достаточно малая величина (уровень значимости), значение которой устанавливается в соответствии с существом задачи. Если значение меры расхождения u_q полученное на опыте, больше u_α, то отклонение от теоретического закона распределения считается значимым и предположение о виде закона распределения должно быть отвергнуто (вероятность отвергнуть правильное предположение о виде закона распределения в этом случае не больше α). Если значение $u_q \le u_\alpha$, то отклонение считается не значимым, то есть. данные опыта не противоречат сделанному предположению о виде закона распределения.

Проверку гипотезы о характере распределения с помощью критерия согласия можно вести и в другой последовательности: по значению u_q определить вероятность $\alpha_q = P\ (u \ge u_q)$. Если полученное, значение $\alpha_q < \alpha$, то отклонения значимые; если $\alpha_q \ge \alpha$, то отклонения незначимые. Значения α_q, весьма близкие к 1 (очень хорошее согласие), могут указывать на недоброкачественность выборки (например, из первоначальной выборки без основания выброшены элементы, дающие большие отклонения от среднего).

В различных критериях согласия в качестве меры расхождения статистического и теоретического законов распределения принимаются различные величины.

Рассмотрим алгоритм вычисления критерия Пирсона (χ^2) и критерия Колмогорова (λ). Студент в курсовой работе вправе использовать другие известные ему критерии согласия.

В **критерии согласия К.Пирсона** (критерий χ^2) за меру расхождения принимается величина χ^2, опытное (расчетное) значение χ^2_q которой определяется формулой

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(N_i - nP_i\right)^2}{nP_i}, \qquad (19)$$

где m — число сравниваемых частот (число интервалов, на которые разбиты все результаты измерений величины x).

N_i – частота (количество отсчетов, попавших в i-тый интервал);

n – количество отсчетов в исходном массиве результатов измерений;

P_i – вероятность попадания случайной величины x в i-й интервал.

При $n \to \infty$ закон распределения χ^2_q независимо от вида закона распределения случайной величины x стремится к закону χ^2-распределения с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где r − число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по данной выборке (r = 2 для нормального и равномерного распределения).

Теоретические значения интегральной функции χ^2 распределения Пирсона для различных k и P представлены в приложении 3.

Для применения критерия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы объем выборки n и количество разрядов m_i были достаточно велики (практически считается достаточным, чтобы было $n \ge 50 \div 60$, $m_i \ge 5 \div 8$).

Критерий согласия К. Пирсона χ^2 позволяет провести сравнение двух моделей и в том случае, когда для них используется разное число столбцов.

Критерий согласия Колмогорова применим в том случае, когда параметры теоретического закона распределения определяются не по данным исследуемой выборки. За меру расхождения экспериментального (статистического) и теоретического законов распределения принимается наибольшее значение D абсолютной величины разности экспериментальной и теоретической функций распределения. Опытное значение величины D определяется формулой

$$D = max\,|\tilde{F}\,(x) — F\,(x)|, \qquad (20)$$

где $\tilde{F}$— экспериментальная (статистическая), а F — теоретическая функции распределения.

А.Н. Колмогоров ввел в рассмотрение другую случайную величину λ, тесно связанную с D:

$$\lambda = \sqrt{n}\,D. \qquad (21)$$

При $n\to\infty$ закон распределения величины $\lambda = \sqrt{n}\square D$независимо от вида закона распределения случайной величины x стремится к закону распределения Колмогорова. Выражение $P(\lambda)$ является интегральной функцией (законом) распределения случайной величины λ. Для $P(\lambda)$ составлены таблицы значений (приложение 4).

Из таблицы приложения 4 видно, что чем меньше λ, а следовательно и D, тем больше $P(\lambda)$, то есть, тем вероятнее, что полученное расхождение между эмпирическим и выбранным теоретическим законами распределения при условии нулевой гипотезы является случайным. Наоборот, большему значению λ и, следовательно, большему d соответствует малая вероятность $P(\lambda)$ этого расхождения.

Если уровень значимости q принять равным 5 %, то критической областью критерия Колмогорова явится область тех значений λ, для которых $P(\lambda) \leq 0{,}05$. Согласно таблице приложения 4, это будут значения $\lambda > 1{,}40$. Соответственно при уровне значимости 0,3 % критической областью критерия Колмогорова станут значения λ, для которого $P(\lambda) \leq 0{,}003$, то есть $\lambda > 1{,}80$.

На основании сказанного можно так сформулировать <u>правило применения критерия Колмогорова</u>.

Если найденное по формуле (21) значение λ окажется меньше 1,40, то с риском ошибки в 5 % можно утверждать, что выбранный теоретический закон распределения не противоречит экспериментальным данным. Если же $\lambda > 1{,}40$, то с риском ошибки в 5 % можно утверждать, что теоретический закон не соответствует данным и надо находить другой закон.

Для применимости критерия Колмогорова n должно быть достаточно велико, практически должно быть $n > 40\div50$.

При небольшом числе наблюдений (n < 50) проверка гипотезы о принадлежности результатов наблюдений к нормальному распределению проводится **по составному критерию** (по ГОСТ 8.207−76).

Первоначально вычисляют отношение $\bar{d}$ *(<u>критерий 1</u>)*

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n\, S_x^*}, \qquad (22)$$

где S_x^* – смещенная оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \qquad (23)$$

Результаты наблюдений группы можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q_1/2} \le \bar{d} \le d_{q_1/2},$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ – квантили распределения, получаемые из таблицы приложения 5, причем q_1 – заранее выбранный уровень значимости критерия.

Затем продолжают проверку по <u>*критерию 2*</u>. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более m разностей $|x_i - \bar{x}|$ превзошли значение $z_{p/2} \cdot S_x$, где S_x – оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле (3), $z_{p/2}$ — верхняя квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающая вероятности Р / 2.

Значения P определяются из таблицы приложения 6 по выбранному уровню значимости q_2 и числу результатов наблюдений n. При уровне значимости, отличном от предусмотренных в таблице приложения 6, значение P находят путем линейной интерполяции.

В случае, если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считают, что распределение результатов наблюдений группы не соответствует нормальному.

Пример

В качестве исходных данных рассмотрим массив результатов измерений, содержащий 100 значений (n = 100), приведенных в таблице 13. Необходимо проверить гипотезу о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения.

Для построения гистограммы распределения частот указанного массива были определены верхние и нижние границы интервалов и подсчитаны соответствующие частоты. Данные занесены в столбцы 2 и 3 таблицы 14. При назначении границ интервалов было учтено, что при использовании критерия Пирсона в каждом интервале должно быть не меньше пяти независимых значений результата измерений. Гистограмма распределения частот представлена на рисунке 7.

Таблица 13

8,3	8,35	8,35	8,4	8,4	8,4	8,45	8,45	8,45	8,45
8,45	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,55
8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,6
8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6
8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,65	8,65	8,65
8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65
8,65	8,65	8,65	8,65	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7
8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,75	8,75	8,75	8,75
8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8
8,8	8,8	8,85	8,85	8,85	8,85	8,85	8,85	8,95	8,4

Проверим гипотезу о принадлежности результатов измерения к нормальному распределению ***по критерию К. Пирсона***. В таблице 14 представлены промежуточные вычисления по алгоритму, изложенному в [13 с. 151].

Таблица 14 – Расчет критерия Пирсона

i	Интервал $[x_{i-1}; x_i]$	Частота, N_i	Нормированное отклонение от среднего арифметического, t_i	Значения функции Лапласа, $\Phi(t_i)$	Вероятность попадания значения в i-й интервал, P_i	$N_i - nP_i$	$(N_i - nP_i)^2/nP_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	[-∞; 8,425]	7	-1,58	-0,4429	0,0571	1,29	0,291
2	[8,425; 8,475]	5	-1,19	-0,3830	0,0599	-0,99	0,164
3	[8,475; 8,525]	8	-0,81	-0,2910	0,0920	-1,20	0,157
4	[8,525; 8,575]	10	-0,42	-0,1628	0,1282	-2,82	0,620
5	[8,575; 8,625]	18	-0,04	-0,0160	0,1468	3,32	0,751
6	[8,625; 8,675]	17	0,35	0,1368	0,1528	1,72	0,194
7	[8,675; 8,725]	12	0,73	0,2673	0,1305	-1,05	0,084
8	[8,725; 8,775]	9	1,12	0,3686	0,1013	-1,13	0,126
9	[8,775; 8,825]	7	1,50	0,4332	0,0646	0,54	0,045
10	[8,825; +∞]	7	+∞	0,5000	0,0668	0,32	0,015
							Σ=2,447

Вероятность значений x, лежащих в окрестности среднего значения [$\overline{x}$, x_i] при нормальном законе распределения вероятности, равна функции Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \qquad (24)$$

от аргумента $t_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S_x}$. При $t_i = 0$ эта функция равна 0, а при увеличении t_i стремится к 0,5, становясь практически неотличимой от этого значения уже при $t_i \geq 3$.

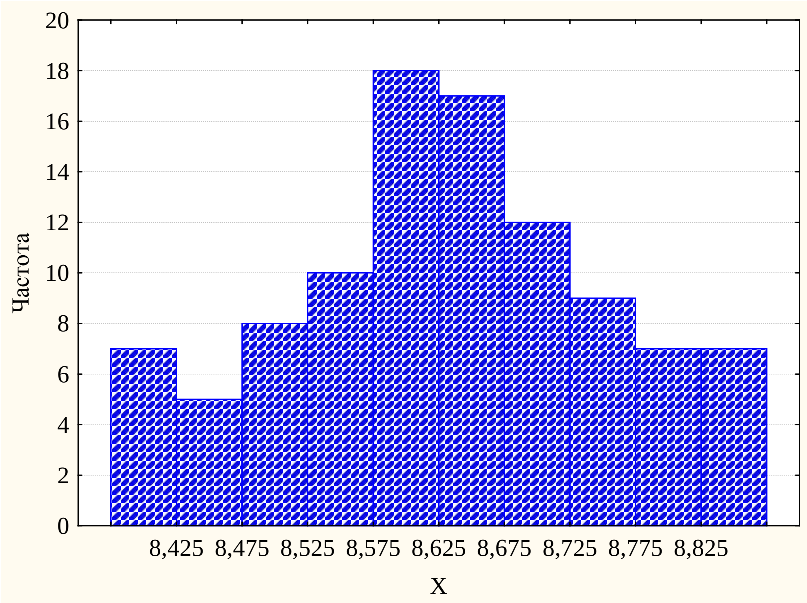


Рисунок 7 – Гистограмма распределения частот для данных, представленных в таблице 10

Определим, на сколько S_X и в каком направлении отстоит от среднего арифметического правая граница x_i каждого интервала:

$$t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S_x} = \frac{x_i - 8{,}63}{0{,}13}.$$

Полученные значения параметра t_i внесем в четвертую графу таблицы 10.

По значению t_i можно определить, с какой вероятностью отдельное значение результата измерения, подчиняющегося нормальному закону распределения вероятности, попадает в интервал $[\overline{x} - t_iS_X; \ \overline{x} + t_iS_X]$. С вероятностью в 2 раза меньшей оно попадает в левую или правую половину этого интервала. Эта вероятность представляет собой функцию Лапласа $\Phi(t_i)$, значения которой для различных аргументов представлены в таблице приложения 7. Полученные из этой таблицы значения $\Phi(t_i)$ занесены в пятую графу таблицы. 10.

Теоретическая вероятность P_i попадания в i-й интервал отдельного значения результата измерения, подчиняющегося нормальному закону, определяется как

$$P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}). \qquad (25)$$

Принимая во внимание, что $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, а $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, поместим рассчитанные значения P_i в шестую графу таблицы 10.

В седьмую и восьмую графу внесены результаты остальных вспомогательных вычислений. Суммирование чисел в восьмой графе дает χ_q^2 = 2,528.

Если рассчитанное значение $\chi_q^2 < \chi^2$, которое выбирается по таблице приложения 3 в зависимости от числа степеней свободы *k* и уровня доверительной вероятности *P* (в данном случае χ^2 = 14,067 при *k* = 10 - 2 - 1 = 7 и *P* = 0,95), то можно принять гипотезу о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

В литературном источнике [14] предлагается несколько иной алгоритм вычислений критерия Пирсона, промежуточные вычисления в соответствии с которым представлены в таблице 15.

Плотность нормированного распределения $p(t_i)$ (графа 5) в зависимости от значения аргумента может быть определена по таблице приложения 8.

В этом случае получено другое значение критерия Пирсона χ_q^2 = 9,223, которое, однако, также позволяет заключить, что гипотеза о нормальном законе распределения может быть принята.

Таблица 15 – Расчет критерия Пирсона

i	Середина интервала x_i	Частота, N_i	Нормированное отклонение от среднего арифметического, t_i	Плотность нормированного распределения $p(t_i)$	Плотность в серединах интервалов $p(x_i) = p(t_i) / S_x$	Теоретическая частота $nP_i = n\Delta x\ p(x_i)$	$(N_i - nP_i)^2/nP_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	8,40	7	-1,58	-0,1145	-0,8808	4,404	1,530
2	8,45	5	-1,19	-0,1965	-1,5115	7,5575	0,865
3	8,50	8	-0,81	-0,2874	-2,2108	11,054	0,844
4	8,55	10	-0,42	-0,3653	-2,8100	14,050	1,167
5	8,60	18	-0,04	-0,3986	-3,0662	15,331	0,465
6	8,65	17	0,35	0,3752	2,8862	14,431	0,457
7	8,70	12	0,73	0,3056	2,3508	11,754	0,005
8	8,75	9	1,12	0,2131	1,6392	8,196	0,079
9	8,80	7	1,50	0,1295	0,9962	4,981	0,818
10	8,85	7	1,69	0,0957	0,7362	3,681	2,993
							Σ=9,223

Для убедительности проверим эту же гипотезу по ***критерию Колмогорова***. Рассчитываем значения экспериментальной $(\tilde{F}x)$ и предполагаемой теоретической *F(x)* функции распределения и определяем максимум модуля разности между ними.

Теоретическая функция нормального распределения *F(x)* определяется через функцию Лапласа $\Phi(x_i - \overline{x})$ выражением

$$F(x)=0,5+\Phi(x_i - \overline{x}). \qquad (26)$$

Значения функции Лапласа представлены в таблице приложения 7.

Статистическая функция может быть вычислена по формуле

$$\tilde{F}(x_k)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1} N_i + 0{,}5N_k\right). \qquad (27)$$

В соответствии с данной формулой в рассматриваемом примере значение статистической функции для каждого интервала вычисляется следующим образом:

$$\tilde{F}(x_1)=\frac{1}{100}0{,}5N_1,$$

$$\tilde{F}(x_2)=\frac{1}{100}\left(N_1 + 0{,}5N_2\right),$$

$$\tilde{F}(x_3)=\frac{1}{100}\left(N_1 + N_2 + 0{,}5N_3\right) \text{ и т. д.}$$

Представим промежуточные вычисления в виде таблицы.

Таблица 16 – Расчет критерия Колмогорова

i	Середина интервала, x_i	Частота, N_i	$x_i - \overline{x}$	Интегральная функция нормированного норм. распред. $F(x)$	$\tilde{F}(x_k)$	$\lvert\tilde{F}(x)-F(x)\rvert$
1	2	3	4	5	6	7
1	8,40	7	-0,23	0,4090	0,035	0,374
2	8,45	5	-0,18	0,4286	0,095	0,3336
3	8,50	8	-0,13	0,4483	0,16	0,2883
4	8,55	10	-0,08	0,4681	0,25	0,2181
5	8,60	18	-0,03	0,4880	0,39	0,098
6	8,65	17	0,02	0,5080	0,565	0,057
7	8,70	12	0,07	0,5279	0,71	0,1821
8	8,75	9	0,12	0,5478	0,815	0,2672
9	8,80	7	0,17	0,5675	0,895	0,3275
10	8,85	7	0,22	0,5871	0,965	**0,3779**

Определяем $\lambda_q = \sqrt{n}\,D = 10\cdot 0{,}3779 = 3{,}779$

Так как $\lambda_q > 1{,}40$, то с риском ошибки в 5 % можно утверждать, что экспериментальные данные не соответствуют нормальному закону распределения вероятности и надо находить другой закон.

2.2.4 Определение доверительных границ случайной погрешности результата измерения

Точечные оценки параметров распределения дают оценку в виде числа, наиболее близкого к значению неизвестного параметра. Такие оценки используют только при большом числе измерений. Чем меньше объем выборки, тем легче допустить ошибку при выборе параметра. Для практики важно не только получить точечную оценку, но и определить интервал, называемый *доверительным,* между границами которого с заданной *доверительной вероятностью* $P\ \{x_н < x < x_в\} = 1 - q$ находится истинное значение оцениваемого параметра (q – уровень значимости; $x_н$, $x_в$ – нижняя и верхняя границы интервала).

Смысл оценки параметров с помощью интервалов заключается в нахождении интервалов, называемых доверительными, между границами которых с определенными вероятностями (доверительными) находятся истинные значения оцениваемых параметров.

Для получения интервальной оценки **нормально распределенной** случайной величины необходимо:

- определить точечную оценку математического ожидания $\bar{x}$ и *СКО* S_x случайной величины;
- выбрать доверительную вероятность P;
- найти верхнюю $x_в$ и нижнюю $x_в$ границы в соответствии с уравнениями

$$F(x_н) = q / 2 = 1- P / 2$$
$$F(x_в) = 1 - q / 2 = 1 + P / 2$$

Значения $x_в$ и $x_н$ определяются из таблиц значений интегральной функции распределения $F(t)$ или функции Лапласа $\Phi(t)$.

Полученный доверительный интервал удовлетворяет условию

$$P\{\bar{x} - z_p S_x / \sqrt{n} < x < \bar{x} + z_p S_x / \sqrt{n}\} = 2F(z_p)\ , \qquad (28)$$

где n – число измеренных значений;

z_p – аргумент функции Лапласа $\Phi(t)$, отвечающей вероятности P / 2.

В данном случае z_p называется квантильным множителем. Половина длины доверительного интервала $D_P = z_p S_x / \sqrt{n}$ называется доверительной границей погрешности результата измерений.

Рассмотренный способ нахождения доверительных интервалов справедлив для достаточно большого числа наблюдений n, когда $\sigma = S_x$. Следует помнить, что вычисляемая оценка СКО S_x является лишь некоторым приближением к истинному значению σ. Определение доверительного интервала при заданной вероятности оказывается тем менее надежным, чем меньше число наблюдений. Нельзя пользоваться формулами нормального распределения при малом числе наблюдений, если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточно большим числом наблюдений определить СКО.

Расчет доверительных интервалов для случая, **когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна**, то есть **при малом числе наблюдений *n*, возможно выполнить с использованием распределения Стьюдента *S(t, k)*.** Оно описывает плотность распределения отношения (дроби Стьюдента):

$$t = \frac{\bar{x} - M[x]}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - Q}{S_{\bar{x}}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - Q}{S_x},$$

где Q – истинное значение измеряемой величины. Величины $\bar{x}$, S_x и $S_{\bar{x}}$ вычисляются на основании опытных данных и представляют собой точечные оценки МО, СКО результатов измерений и СКО среднего арифметического значения.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $(-t_p;\ +t_p)$

$$P\left\{-t_p < \frac{\bar{x} - Q}{S_{\bar{x}}} < +t_p\right\} = P\left\{\left|\bar{x} - Q\right| < \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}\right\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t,k)\,dt = 2\int_{0}^{t_p} S(t,k)\,dt, \qquad (29)$$

где $к$ – число степеней свободы, равное $(n$ - 1).

Величины t_p (называемые в данном случае *коэффициентами Стьюдента),* рассчитанные с помощью двух последних формул для различных значений доверительной вероятности и числа измерений, табулированы и представлены в приложении 6. Следовательно, с помощью распределения Стьюдента можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины , обусловленное влиянием случайных факторов, находится в доверительных границах ε (без учета знака):

$$\varepsilon = t_p S_{\bar{x}} = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}} \qquad (30)$$

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной. Распределение Стьюдента применяют при числе измерений n < 30, поскольку уже при n = 20...30 оно переходит в нормальное и вместо уравнения (29) можно использовать уравнение (28). Результат измерения записывается в виде:

$$X = \bar{x} \pm \frac{t\ S_x}{\sqrt{n}},\ P = P_{\text{д}}$$

где $P_д$ — конкретное значение доверительной вероятности.

Множитель *t* при большом числе измерений *n* равен квантильному множителю z_p. При малом *n* он равен коэффициенту Стьюдента.

Полученный результат измерения не является одним конкретным числом, а представляет собой интервал, внутри которого с некоторой вероятностью $P_д$ находится истинное значение измеряемой величины.

2.2.5 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерения

Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности метода, средств измерений, а также вызванные другими источниками.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешности средств измерении каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные.

Границы неисключенной систематической погрешности Θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \tag{31}$$

где Θ_i − граница i-й неисключенной систематической погрешности;

k − коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью.

Коэффициент k принимают равным 1,1 при доверительной вероятности P = 0,95. При доверительной вероятности P = 0,99 коэффициент k принимают равным 1,4, если число суммируемых неисключенных систематических погрешностей более четырех ($m > 4$). Если же число суммируемых погрешностей равно четырем или менее четырех ($m \leq 4$), то коэффициент k определяют по графику зависимости (рисунок 8).

При трех или четырех слагаемых в качестве Θ_1 принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве Θ_2 следует принять ближайшую к Θ_1 составляющую.

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

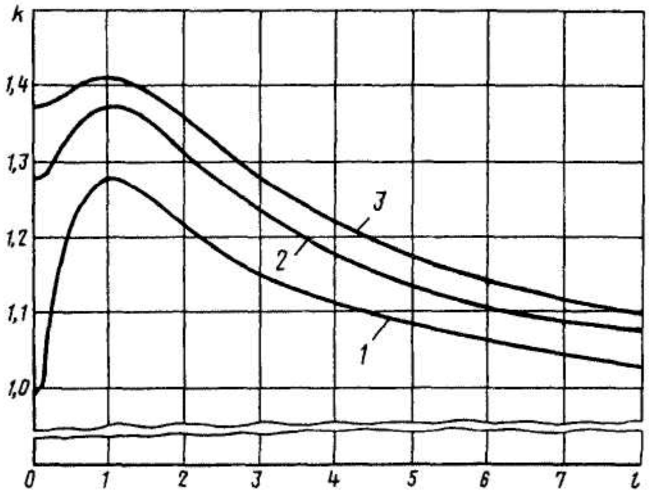


Рисунок 8 − График зависимости $k = f(m, l)$,

где m − число суммируемых погрешностей;

$l = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$; кривая 1 - $m = 2$; кривая 2 - $m = 3$; кривая 3 - $m = 4$

2.2.6 Определение границ погрешности результата измерения

В случае, если отношение $\frac{\Theta}{S_x} < 0{,}8$, то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \varepsilon$.

Если $\frac{\Theta}{S_x} > 8$, то случайной погрешностью по сравнению с систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \Theta$.

В случае, если указанные неравенства не выполняются, то границу погрешности результата измерения следует вычислить по формуле

$$\Delta = K\,S_\Sigma, \tag{32}$$

где K − коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей;

S_Σ − оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^{\ 2}}\,. \tag{33}$$

Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{S_{\bar{x}}^{\ 2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3}}}. \qquad (34)$$

Пример

В задании к разделу 1 указано, что многократные (n = 100) измерения падения напряжения на участке электрической цепи осуществляются вольтметром в рабочем диапазоне от 0 до 10. После изучения средств измерения напряжения выбран вольтметр типа ВК7-10АЛ. На основе изучения справочной литературы установлено, что основная погрешность вольтметра вычисляется по формуле

$$\Theta_0 = \pm\,(0{,}1\%\ \bar{U} + 0{,}001).$$

Дополнительная погрешность за счет временной нестабильности характеристик прибора за один час работы равна:

$$\Theta_1 = \pm\ 0{,}001\ \text{В}.$$

Дополнительная погрешность, вызванная изменением напряжения питания сети на 10 % равна:

$$\Theta_2 = \pm\ 0{,}005\ \text{В}.$$

Необходимо оценить погрешность измерения и записать окончательный результат в принятой форме при вероятности P = 0,95.

После обработки массива результатов измерений в соответствии с п. 2.2.1 получены следующие результаты:

$\bar{x} = 1{,}2125\ B$; $S_x = \pm\ 1{,}21 \times 10^{-3}\ B$.

Граничные значения случайной составляющей погрешности измерения (в соответствии с формулой 30):

$\varepsilon = \pm\ t\ S_x = \pm 2{,}58 \times 0{,}00121 = \pm 3{,}12 \times 10^{-3}$ В.

Вычислим значение основной погрешности вольтметра:

$\Theta_0 = \pm\ (\frac{0{,}1 * 1{,}2125}{100} + 0{,}001) = \pm\ 2{,}21 \times 10^{-3}$ В.

Вычислив отношение l = 0,005/0,00221 = 2,3, по графику или (рисунок 8), находим коэффициент k = 1,3.

Оценим границы неисключенной систематической составляющей погрешности измерения (по формуле 31)

$\Theta = k \sqrt{\Theta_0^2 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2} = 1{,}3 \sqrt{0{,}00221^2 + 0{,}001^2 + 0{,}005^2} = \pm 7{,}22 \times 10^{-3}$ В.

Границы погрешности результата измерения следует вычислять по формуле

$\Delta = К \times S_{\Sigma} = \pm 2{,}34 \times 0{,}00342 = \pm 8{,}00 \times 10^{-3}$ В, где

$$K = \frac{0{,}00312 + 0{,}00722}{0{,}00121 + 10^{-3}\sqrt{\frac{30{,}8}{3}}} = 2{,}34\text{ В}.$$

$$S_{\Sigma} = 10^{-3}\sqrt{\frac{30{,}8}{3} + 1{,}46} = \pm 3{,}42 \times 10^{-3}\text{ В}.$$

Окончательный результат измерения падения напряжения на участке электрической цепи может быть представлен в виде:

$$U = (1{,}213 \pm 0{,}008)\text{ В}; \quad P = 0{,}95.$$

2.3 ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

2.3.1 Сущность концепции неопределенности

В результате работы семи международных организаций, направленной на разработку единой концепции по выражению точности измерений, гармонизацию стандартов и других нормативных документов в области метрологии, был издан документ «Руководство по выражению неопределенности измерения».

Целью документа являлось следующее:

– обеспечить полную информацию по составлению отчетов о неопределенностях измерений;

– предоставить основу для международного сличения результатов измерений;

– предоставить универсальный метод для выражения и оценивания неопределенности результата измерения, применимый ко всем видам измерений и всем типам данных, используемых при измерениях.

Руководство приобрело статус неформального международного стандарта.

Отечественные нормативные документы практически не используют понятие «неопределенность измерения». Для оценки точности в стандартах и технических условиях, содержащих технические требования к средствам измерений, методам поверки, методикам выполнения измерений, методам испытаний используются в основном характеристики погрешности. Таким образом, существует противоречие между Руководством и системой отечественных нормативных документов.

Концепция, изложенная в Руководстве предполагает отказ от использования понятий «погрешность» и «истинное значение измеряемой величины» в пользу понятий «неопределенность» и «оцененное значение измеряемой величины», а также переход от классификации погрешностей по природе из проявления на случайные и систематические к другому делению –

по способу оценивания неопределенностей измерений (по типу А – методами математической статистики и по типу В – другими методами).

Идейной основой замены термина «погрешность» на «неопределенность» является философская предпосылка агностицизма о том, что «истинное значение» непознаваемо и погрешность, как базирующаяся на использовании истинного значения измеряемой величины, теряет смысл. Поскольку Руководство имеет сугубо практическую направленность, то отказ от использования понятия «погрешность результата измерений» мотивируется тем, что оно опирается на понятие истинного значения, которое принципиально не может быть получено.

Основным понятием, используемым в Руководстве, является понятие «неопределенность измерения». Неопределенность измерения трактуется в двух смыслах – широком и узком. В широком смысле «неопределенность» трактуется как «сомнение», например: «…когда все известные или предполагаемые составляющие погрешности оценены и внесены соответствующие поправки, все еще остается неопределенность относительно истинности указанного результата, то есть сомнение в том, насколько точно результат измерения представляет значение измеряемой величины».

В узком смысле «неопределенность измерения есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине». Последняя трактовка соответствует определению неопределенности измерения, приводимому в международном словаре VIM. В качестве этого параметра в Руководстве используют стандартную неопределенность, суммарную неопределенность и расширенную неопределенность.

Основным количественным выражением неопределенности измерений является стандартная неопределенность u.

Основным количественным выражением неопределенности измерений, при котором результат определяют через значения других величин, является суммарная стандартная неопределенность u_c.

В тех случаях, когда это необходимо, вычисляют расширенную неопределенность U по формуле

$$U = k \cdot u_{\text{c}}, \tag{35}$$

где k – коэффициент охвата (числовой коэффициент, используемый как множитель при суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности).

В Руководстве измеряемую величину Y определяют как [4]

$$Y = f\,(X_1, \dots, X_m)\,, \tag{36}$$

где $X_1, \dots, X_m$ − входные величины (непосредственно измеряемые или другие величины, влияющие на результат измерения);

m − число этих величин;

f − вид функциональной зависимости.

При постановке измерительной задачи необходимо дать краткое описание того, как определяется измеряемая величина Y, включая:

- метод и/или методику измерения;
- схему или план измерения;
- используемое оборудование;
- условия измерения.

Функция f должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которые могут внести значительные составляющие в неопределенность измеряемой величины.

Оценку измеряемой величины y вычисляют как функцию оценок входных величин x_1, ... , x_m после внесения поправок на все известные источники неопределенности, имеющие систематический характер:

$$y = f(x_1, \dots , x_m). \tag{37}$$

Затем вычисляют стандартные неопределенности входных величин $u(x_i)$ (i = 1, ... , m) и возможные коэффициенты корреляции $r(x_i , x_j)$ оценок i-й и j-й входных величин (j = 1, . . . , m).

Различают два типа вычисления стандартной неопределенности:

вычисление по типу А (u_A) – путем статистического анализа результатов многократных измерений;

вычисление по типу В (u_B) – с использованием других способов.

Исходными данными для вычисления u_A являются результаты многократных измерений.

Стандартную неопределенность единичного измерения i-й входной величины $u_{A,i}$ вычисляют по формуле

$$u_{A,i} = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1}\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \bar{x}_i)^2}\ , \tag{38}$$

где $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}$ - среднее арифметическое результатов измерений i-й входной величины.

Стандартную неопределенность $u_A(x_i)$ измерений i-й входной величины, при которых результат определяют как среднее арифметическое, вычисляют по формуле

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)}\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \bar{x}_i)^2}\ . \tag{39}$$

В качестве исходных данных для вычисления u_B используют:

- данные предшествовавших измерений величин, входящих в уравнение измерения; сведения о виде распределения вероятностей;
- данные, основанные на опыте исследователя или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих приборов и материалов;
- неопределенности констант и справочных данных;
- данные поверки, калибровки, сведения изготовителя о приборе и т. п.

Неопределенности этих данных обычно представляют в виде границ отклонения значения величины от ее оценки. Наиболее распространенный способ формализации неполного знания означении величины заключается в постулировании равномерного закона распределения возможных значений этой величины в указанных (нижней и верхней) границах [(b_{i-} , b_{i+}] для *i*-й входной величины. При этом стандартную неопределенность, вычисляемую по типу В − $u_B(x_i)$, определяют по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}} \qquad (40)$$

а для симметричных границ ($\pm b_i$) − по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}. \qquad (41)$$

Применение прямоугольного распределения является разумным по умолчанию при отсутствии любой другой информации. Но если известно, что значения рассматриваемой величины более вероятны у центра, чем у границ интервала, будет лучшим вариантом использование треугольного или нормального распределения.

В случае других законов распределения формулы для вычисления неопределенности по типу В будут иными (см. приложение 2).

Далее необходимо проанализировать входные величины на предмет их корреляции и рассчитать коэффициенты корреляции для всех коррелированных входных величин с указанием методов их расчета. В концепции неопределенности имеется в виду корреляция «логическая», а не математическая.

Мерой взаимной зависимости или корреляции двух случайных величин является *ковариация*. Ковариация, связанная с оценками двух входных величин X_i и X_j,, может устанавливаться равной нулю или рассматриваться как пренебрежимо малая, если:

а) обе входные величины X_i и X_j являются независимыми друг от друга, например, если они в различных, независимых один от другого экспериментах многократно, но не одновременно наблюдались или если они представляют (описывают) результирующую величину различных, независимых друг от друга проведенных исследований;

б) одна из входных величин X_i и X_j может рассматриваться как константа;

в) исходя из наших знаний и предположений просто не имеется никаких оснований для корреляции между входными величинами X_i и X_j.

Если две входные величины X_i и X_j являются коррелированными в определенной степени, то есть они являются зависимыми друг от друга тем или иным способом, то при оценивании суммарной стандартной неопределенности (см. п. 9) среди вкладов неопределенностей входных величин должна учитываться их ковариация, которая оценивается по следующей формуле:

$$u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j), \quad (i \neq j). \qquad (42)$$

Степень корреляции определяется с помощью коэффициента корреляции $r(x_i, x_j)$, ($i \neq j$ и $|r| \leq 1$).

В случае n пар независимых повторных наблюдений двух величин P и Q ковариация их средних арифметических значений $\bar{p}$ и $\bar{q}$ оценивается по формуле

$$u(\bar{p},\bar{q}) = s(\bar{p},\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(p_k - \bar{p}). \tag{43}$$

Оцененный коэффициент корреляции для P и Q получают из уравнения (40):

$$r(p,q) = \frac{s(\bar{p},\bar{q})}{s(\bar{p})s(\bar{q})}. \tag{44}$$

<u>Вычисление суммарной стандартной неопределенности u_c.</u>

В случае некоррелированных оценок x_1, ..., x_m суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ вычисляют по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}. \tag{45}$$

В случае коррелированных оценок x_1, x_2, ..., x_m суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)}, \tag{46}$$

где $u(x_i, x_j)$ определяется по формуле (42).

Уравнения (45) и (46) базируются на аппроксимации функции модели $Y = f(X_1,...,X_m)$ рядом Тейлора первого порядка. Это справедливо только для линейных функций.

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в уравнениях (45) и (46) называют коэффициентами чувствительности c_i. Коэффициенты чувствительности показывают, как выходная оценка y изменяется с изменением значений входных оценок x_1, x_2, ..., x_m.

Однако на практике частные производные оцениваются как:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\bigg|_{x_1, x_2, ...x_m} \tag{47}$$

С учетом формулы (47) формулы (45) и (46) преобразуются в следующие выражения:

- в случае некоррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2 u_i^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2(y)}, \tag{48}$$

- в случае коррелированных величин

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}u_i^2(y)+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}u_i(y)u_j(y)r(x_i,x_j)}\,, \qquad (49)$$

где $r(x_i, x_j)$ определяется по формуле (42),

$u_i\ (y)$ – вклад в стандартную неопределенность, связанную с оценкой y выходной величины, который получается из стандартной неопределенности, связанной с оценкой входной величины x_i, по следующей формуле:

$$u_i\ (y)=c_i\ u\ (x_i). \qquad (50)$$

В то время как стандартная неопределенность $u(x_i)$ всегда положительна, вклад неопределенности $u_i(y)$ в соответствии с равенством (50) в зависимости от знака коэффициента чувствительности может принимать положительное или отрицательное значение. В случае некоррелированных величин этот знак не играет роли, так как в соответствии с формулой (48) при расчете суммарной стандартной неопределенности вклады неопределенности $u(x_i)$ возводятся в квадрат. В случае коррелированных входных величин $u(x_i)$ знак обязательно должен приниматься во внимание. Так для суммы или разности двух коррелированных величин $(Y = X_1 \pm X_2)$, суммарная стандартная неопределенность в соответствии с (49) будет соответственно равна:

$$u^2(y)=u^2(x_1)+u^2(x_2)\pm 2u(x_1)u(x_2)r(x_1,x_2). \qquad (51)$$

Если функция модели f является суммой или разностью некоррелированных входных величин X_i, то коэффициенты чувствительности, равные множителям p_i, приводят равенство (48) к виду:

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i^2u^2(x_i)}\,. \qquad (52)$$

Если функция модели f является произведением или отношением некоррелированных входных величин X_i , то в этом случае уравнение (48) можно представить в виде:

$$\frac{u_c(y)}{y}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i\,u(x_i)}{x_i}\right]^2}\,. \qquad (53)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (48), но с суммарной стандартной неопределенностью, выраженной как относительная суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)\ /\ |y|$ $(|y|\neq 0)$ и стандартными неопределенностями входных величин $u(x_i)$, выраженных как относительные стандартные неопределенности $u(x_i)/|x_i|$ $(|x_i| \neq 0)$.

Для вычисления расширенной неопределенности U_p по формуле (35) необходимо выбрать коэффициента охвата k.

Часто на практике принимают $k = 2$ для интервала, имеющего уровень доверия 95 % и $k = 3$ для интервала, имеющего уровень доверия 99 %.

В общем случае коэффициент охвата k вычисляют в соответствии с формулой

$$k = t_p(n), \qquad (54)$$

где $t_p(n)$ - квантиль распределения Стьюдента с эффективным числом степеней свободы n и доверительной вероятностью (уровнем доверия) P. Значения коэффициента $t_p(n)$ приведены в приложении 9.

Расчет коэффициентов охвата из эффективных степеней свободы представлен в [4, приложение 3].

2.3.2 Алгоритм оценки неопределенности результата измерения

1. Постановка измерительной задачи

Для полного изложения измерительной задачи проводят изучение методики испытания. В соответствии со стандартом указывают:

– сущность метода;
– количество и размеры элементарных проб;
– климатические условия проведения испытаний;
– используемое оборудование и средства измерения (с указанием допускаемой погрешности измерения, цены деления или допускаемого отклонения от номинального значения).

2. Разработка математической модели измерения

На основании стандарта на метод испытания записывают формулу для расчета измеряемого параметра.

Перечисляют все входные величины с указанием применяемых условных обозначений и единиц измерений, в которых они будут оцениваться, в виде таблицы 17.

Таблица 17 – Перечень входных величин

Величина	Единица измерений	Определение или описание

3. Результаты измерений

Представляют в виде таблицы результаты измерений, полученные в соответствии со стандартной методикой.

Необходимо провести определение их статистических характеристик:

- среднего арифметического значения,
- среднего квадратического отклонения (стандартное отклонение),
- стандартной неопределенности.

4. Анализ и количественная оценка входных величин и их неопределенностей

Результаты анализа входных величин целесообразно представить в виде таблицы 18.

Таблица 18 – Анализ входных величин

<table>
<tr><td>Входная величина:
наименование, обозначение, единица измерения</td><td>Тип оценивания неопределенности: ______________
Вид распределения: ___________________________
Значение оценки: _____________________________
Интервал, в котором находится значение входной величины :_________________________________
Стандартная неопределенность:_________________</td></tr>
<tr><td colspan="2">Краткое описание того, откуда и на основании каких предположений и предпосылок получены вышеперечисленные данные, или указание источников получения вышеперечисленных данных (справочник, свидетельство о калибровке, технические условия, паспорт на средство измерений и т. п.)</td></tr>
</table>

5. Корреляции

Проводят анализ входных величин на предмет их корреляции и рассчитывают коэффициенты корреляции для всех коррелированных входных величин с указанием методов их расчета.

6. Коэффициенты чувствительности

Проводят расчет коэффициентов чувствительности для каждой входной величины или на основании расчета частных производных $\partial f / \partial x_i$ или экспериментально с указанием метода получения.

7. Бюджет неопределенности

Бюджет неопределенности представляют в виде таблицы 19.

Таблица 19 – Бюджет неопределенности

Величина X_i	Единица измерений	Значение оценки x_i	Интервал	Тип неопределенности	Вид распределения вероятностей	Стандартная неопределенность, $u(x_i)$	Степени свободы ν	Коэффициент чувствительности, c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$	Процентный вклад,%
X_1		x_1				$u(x_1)$		c_1	$u_1(y)$	
…		…				…		…		
X_n		x_n				$u(x_n)$		c_n	$u_n(y)$	
Y		y				$u(y)$				

8. Расширенная неопределенность

Проводят расчет расширенной неопределенности, предварительно определив коэффициент охвата на основе выбранного уровня доверительной вероятности.

9. Полный результат измерений

Представляют полный результат измерений, состоящий из оценки y измеряемой величины Y и расширенной неопределенности U в форме $Y = y \pm U$ с указанием единиц измерений для Y и y.

Оформление расчета неопределенности в соответствии с п. 4 и п. 7 должно быть представлено в виде таблиц.

Пример

Рассмотрим оценивание неопределенности при определении влажности древесноволокнистых плит.

1. Измерительная задача

Метод измерения влажности плит древесноволокнистых основан на определении массы образца до и после высушивания до постоянной массы. Влажность образца определяют по ГОСТ 19592.

Отбор плит для испытаний производят методом случайного отбора «вслепую» по ГОСТ 18321. Объем выборки определяют по числу плит максимального формата в соответствии с ГОСТ 4598.

Из каждой отобранной для испытаний плиты вырезают образцы размером 100×100 мм (по ГОСТ 19592) в количестве 3 шт. Образцы взвешивают на весах лабораторных электронных ВЛ Э134-М (класс точности высокий II по ГОСТ 24104) непосредственно после отбора, помещают в сушильный шкаф и высушивают до постоянной массы при температуре (103±2)°С. Масса образца при сушке считается постоянной, если разность между двумя последовательными взвешиваниями, проведенными через 6 ч, не превышает 0,1 % массы испытываемого образца. Результат измерения влажности каждого образца вычисляется с точностью до 0,1 %.

В данном примере рассмотрим выборку плит марки Т-СВ объемом 5 шт, взятую из партии объемом в 1000 шт. По результатам измерений влажности плит из выборки и рассчитанного значения неопределенности влажности делается заключение о приемке партии плит.

2. Математическая модель измерения

Влажность партии плит определяется с помощью математической модели:

$$W = W_{sam} + \delta w_{var} \tag{55}$$

где W_{sam} – влажность образца, %;

δw_{var} – поправка, обусловленная вариацией значений влажности образцов в пределах выборки из партии, %.

Влажность образца W_{sam} % вычисляется по ГОСТ 19592 в соответствии с выражением

$$W_{sam} = \frac{m_1 - m_0}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{m_1}{m_0} - 1 \right) \cdot 100\ \% \tag{56}$$

где m_1 – масса образца до высушивания, г;

m_0 – масса образца, высушенного до постоянной массы, г.

3. Результаты измерений

Результаты измерений масс образцов пяти плит марки Т-СВ до и после высушивания, а также полученные значения влажности для образцов и плит представлены в таблице 20.

Таблица 20 – Значения влажности образцов, полученные при испытании выборки плит из партии

№ плиты	№ образца	m_1, г	m_0, г	W_{sam}, г	Среднее значение по плите $\overline{W}$, %
1	1	29,77	28,16	5,7	5,9
	2	29,81	28,13	6,0	
	3	29,86	28,18	6,0	
2	1	27,71	26,46	4,7	5,0
	2	27,78	26,58	4,5	
	3	27,78	26,29	5,7	
3	1	29,84	28,62	4,3	4,2
	2	29,26	28,20	3,8	
	3	29,66	28,4	4,4	
4	1	32,75	31,14	5,2	5,4
	2	33,46	31,63	5,8	
	3	32,78	31,14	5,3	
5	1	32,29	30,84	4,7	4,5
	2	32,14	30,85	4,2	
	3	32,61	31,20	4,5	
Среднее Значение		30,50	29,05	5,0	
Выборочное среднее по всем образцам $\overline{\overline{W}}$,%					5,0

4. Анализ входных величин и их неопределенностей

В примере данный пункт оформлен не в табличном виде, как требуется в стандартной форме отчета по оцениванию неопределенности, а в текстовом виде для детального пояснения и приведения необходимых рассуждений.

В качестве первой величины рассмотрим **влажность образца W_{sam}**. За оценку для величины W_{sam} принимаем выборочное среднее значение влажности по всем испытанным образцам $\overline{\overline{W}}$, которое вычисляется в соответствии с ГОСТ 4598 по формуле

$$\overline{W} = \frac{\sum_{i=1}^{k=5} \overline{W_i}}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k=5} \sum_{j=1}^{n=3} W_{ij}}{kn} \tag{57}$$

где W_{ij} – влажность j-го образца i-й плиты, определяется по формуле (56), %;

$\overline{W}_i$ – влажность i-й плиты из контролируемой партии, %;

k – объем выборки (количество плит, отобранных из партии для испытания), k = 5;

n – количество образцов, вырезанных из i-й плиты, n = 3.

Неопределенность влажности образца W_{sam} в соответствии с математической моделью (56) обусловлена двумя влияющими величинами:

- масса образца до высушивания m_1;
- масса образца после высушивания m_0.

Масса образца до высушивания m_1 определялась путем взвешивания, непосредственно снятием показания со шкалы средства измерений (весы). Результаты измерения массы m_1 для образцов пяти плит, взятых из партии, представлены в таблице 1.

Неопределенность, связанная с определением массы образца до высушивания, оценивается на основании данных производителя на весы. В паспорте на весы лабораторные электронные ВЛ Э134-М указаны допустимые значения для погрешности взвешивания: ±0,02 г. Поскольку значение дано без доверительного уровня, принимаем прямоугольное распределение значений погрешности взвешивания в этих границах. Стандартная неопределенность массы образца до высушивания m_1 оценивается по типу В и составляет:

$$u(m_1) = \frac{0{,}02}{\sqrt{3}} = 0{,}0115 \text{ г}. \tag{58}$$

Масса образца после высушивания m_0 определялась путем взвешивания, непосредственно снятием показания со шкалы средства измерений (весы). Результаты измерения массы после высушивания для образцов пяти плит, взятых из партии, представлены в таблице 20.

Неопределенность массы образца после высушивания обусловлена двумя факторами: погрешностью взвешивания весов и возможными отклонениями массы образца после высушивания вследствие нечеткого определения в методе испытаний момента, в который масса образца после высушивания будет являться действительно таковой и ее значение будет постоянной величиной.

Неопределенность $u_1(m_0)$, связанная с погрешностью взвешивания, оценивается на основании данных производителя на весы и так как используются те же весы, что и для получения массы образца до высушивания, то стандартная неопределенность будет определяться так же, как и $u(m_1)$, и составит $u_1(m_0)= u_1(m_1)$=0,0115 г.

Неопределенность $u_2(m_0)$,обусловленную отклонениями массы образца после высушивания, можно определить на основании информации, представленной в ГОСТ 19592, где сказано, что масса образца после сушки считается постоянной, если разность между двумя последовательными взвешиваниями, проведенными через 6 ч, не превышает 0,1 % массы испытываемого образца. Поэтому в данной ситуации это значение можно рассматривать как максимально возможное отклонение (колебание) массы образца после высушивания. В предположении прямоугольного распределения отклонений массы образца после высушивания в границах ±0,1 % можно найти стандартную неопределенность массы образца после высушивания $u_2(m_0)$. Ее величина оценивается по типу В в соответствии с выражением:

$$u_2(m_0) = \frac{0{,}001 m_0}{\sqrt{3}}.$$

Суммарную стандартную неопределенность массы образца после высушивания $u(m_0)$находим путем суммирования квадратов стандартных неопределенностей перечисленных выше двух видов:

$$u(m_0) = \sqrt{u_1^2(m_0) + u_2^2(m_0)} = \sqrt{u^2(m_1) + u_2^2(m_0)}.$$

Стандартную неопределенность W_{sam} получаем по закону распространения неопределенностей путем суммирования квадратов произведений стандартных неопределенностей всех входящих в математическую модель (56) влияющих величин на соответствующие коэффициенты влияния:

$$u(W_{sam}) = \sqrt{C_{m_1}^2 u^2(m_1) + C_{m_0}^2 u^2(m_0)}, \tag{59}$$

где коэффициенты влияния вычисляются путем нахождения частных производных функций измеряемой величины, определяемой формулой (56), в соответствии с выражениями

$$C_{m_1} = \frac{100}{m_0}, \quad C_{m_0} = -\frac{100 m_1}{m_0^2}.$$

С учетом полученных выражений для коэффициентов влияния преобразуем выражение (59) в:

$$\begin{aligned} u(W_{sam}) &= \sqrt{\frac{100^2}{m_1^2} u(m_1) + \frac{100^2 m_1^2}{m_0^4}\left[u^2(m_1) + u_2^2(m_0)\right]} = \\ &= 100\frac{m_1}{m_0}\sqrt{\frac{u^2(m_1)}{m_1^2} + \frac{u^2(m_1)}{m_0^2} + \frac{u_2^2(m_0)}{m_0^2}} = \\ &= (W_{sam} + 100)\sqrt{\frac{u^2(m_1)}{m_1^2} + \frac{u^2(m_1)}{m_0^2} + \frac{u_2^2(m_0)}{m_0^2}}. \end{aligned} \tag{60}$$

Подставляя значения для вычисления стандартных неопределенностей входных величин $u(m_1)$ и $u(m_0)$ в (60), вычислим значение суммарной стандартной неопределенности влажности образца:

$$u(W_{sam}) = (W_{sam} + 100)\sqrt{\frac{0{,}0115^2}{m_1^2} + \frac{0{,}0115^2}{m_0^2} + \frac{0{,}01^2}{3}} =$$

$$= (5 + 100)\sqrt{\frac{0{,}0115^2}{30{,}50^2} + \frac{0{,}0115^2}{29{,}05^2} + \frac{0{,}001^2}{3}} = 0{,}083\,г,$$

где в качестве W_{sam} взято выборочное среднее по всем образцам, представленное в таблице 1 и найденное по формуле (3), W = 5,0 %, а в качестве m_1 и m_0 –средние значения масс, взятые по всем образцам (см. таблицу 21).

Второй величиной в исходной модели является **поправка, обусловленная вариацией значений влажности образцов в пределах выборки из партии** $\boldsymbol{\delta W_{var}}$. Значение оценки величины поправки δW_{var} принимается равным нулю. Стандартная неопределенность этой поправки оценивается как стандартное отклонение, вычисляемое с применением теории дисперсионного анализа. Для нашего случая, когда испытания проводят по трем образцам, вырезанным из пяти плит, отобранных из партии, применим однофакторный дисперсионный анализ. В качестве влияющего фактора рассматриваем фактор «плита». Дисперсионный анализ заключается в вычислении двух дисперсий, характеризующих два источника возможной изменчивости результатов испытаний образцов на влажность: первая $\sigma_г^2$ будет определяться рассеянием результатов внутри фактора «плита» (возможное различие значений влажности образцов, вырезанных из одной плиты), а вторая σ_F^2 – рассеянием значений между различными уровнями фактора «плита» (возможное различие влажности плит, отобранных для испытаний из контролируемой партии). Пошаговый расчет этих двух дисперсий представлен в таблице 21.

Таблица 21 – Результаты однофакторного дисперсионного анализа

Источник измен-чивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средние квадраты	Дисперсии
Между уровнями фактора «плита»	$S_1 = n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{\overline{W_i}} - \overline{\overline{W}}\right)^2 = 5{,}93$	k–1=4	$M_1 = \frac{S_1}{k-1} = 1{,}48$	$\sigma_F{}^2 = \frac{M_1 - M_2}{n} = 0{,}45$
Внутри фактора «плита»	$S_2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(W_{ji} - \overline{W_i}\right)^2 = 1{,}43$	k(n–1)=10	$M_2 = \frac{S_2}{k(n-1)} = 0{,}14$	$\sigma r^2 = M_2 = 0{,}14$

Стандартное отклонение, характеризующее суммарную вариацию значений влажности внутри фактора «плита» и между уровнями фактора «плита», находим по формуле

$$\sigma_{var} = \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_r^2} = \sqrt{0{,}45 + 0{,}14} = 0{,}77\ \%.$$

Значение стандартной неопределенности поправки, обусловленной вариацией значений влажности образцов в пределах выборки из партии $u(\delta w_{var})$, принимаем равным величине рассчитанного стандартного отклонения σ_{var}.

$$u(\delta w_{var}) = \sigma_{var} = 0{,}77\ \%.$$

5. Корреляция

Все входные величины рассматриваются как некоррелированные.

6. Оценка измеряемой величины

Оценку измеряемой величины – влажности плит в партии W − находим по формуле (1), подставляя в нее найденные в п. 4 значения для оценок входных величин. Так как значение поправки δW_{var} равно нулю, то численное значение измеряемой величины в процентах вычисляют, используя данные таблицы 1 в соответствии с выражением (3) и с округлением до 0,1 %:

$$\overline{W} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} W_{ij}}{15} = 5{,}0\,\%.$$

Стандартную неопределенность измеряемой величины W получаем по закону распространения неопределенностей путем суммирования квадратов произведений стандартных неопределенностей всех влияющих величин на соответствующие коэффициенты чувствительности:

$$u(W) = \sqrt{c_1^2 u^2(W_{sam}) + c_2^2 u^2(\delta W_{\mathrm{var}})} = \sqrt{0{,}77^2 + 0{,}083^2} = 0{,}77\ \% \approx 0{,}8\ \%, \qquad (61)$$

где коэффициенты чувствительности в данном случае равны 1($c_1 = 1$, $c_2 = 1$).

Следует отметить, что полученное значение суммарной стандартной неопределенности оказалось равным вкладу неопределенности от величины поправки, обусловленной вариацией значений влажности образцов в пределах выборки из партии, а вклад неопределенности от влажности образца оказался незначимым, и в дальнейшем при оценивании неопределенности влажности других партий плит его можно не учитывать.

Учитывая незначительное число входных величин в исходной модели, бюджет неопределенности в примере не составлен.

7. Расширенная неопределенность

Расширенную неопределенность $U(W)$ получаем умножением суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата k, равный 2 в предположении нормального закона распределения измеряемой величины и при уровне доверия 95 %.

$$U(W) = 2\cdot 0{,}8 = 1{,}6\ \%.$$

Информационные источники

1. Тюрин, Н. И. Введение в метрологию : учебное пособие / Н. И. Тюрин. – Москва : Издательство стандартов, 1985. – 248 с.
2. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Ленинград: Энергоиздат, 1985.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов. / Е. С. Вентцель – Москва: Высшая школа, 2001. – 575 с.
4. Ефремова, Н. Ю. Оценка неопределенности в измерениях : практическое пособие / Н. Ю. Ефремова. – Минск, БелГИМ, 2003. – 50 с.
5. Айзенберг, П. Г. Технологические измерения и контрольно-измерительные приборы / Л. Г. Айзенберг, А. В. Кипнис, Ю. И. Стороженко. – Москва : Легпромиздат, 1990. – 355 с.
6. Болтон, У. Карманный справочник инженера-метролога / У. Болтон. – Москва: Издательский дом «Додэка-XXI», 2002. – 384 с.
7. Карташова, А. Н. Технологические измерения и приборы в текстильной и легкой промышленности : учебник для вузов /А. Н. Каташова, И. В. Дунин-Барковский. – Москва: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 312 с.
8. Ким, К. К. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника: учебное пособие / К. К. Ким, Г. Н. Анисимов, В. Ю. Барбарович. – Санкт - Петербург : Питер, 2006. – 367 с.
9. Фарзане, Н. Г. Технологические измерения и приборы : учеб. для студ. вузов по спец. «Автоматизация технологических процессов и производств» / Н. Г. Фарзане, Л. В. Илясов, А. Ю. Азимзаде. – Москва : Высшая школа, 1989. – 456 с.
10. Цербс, М. Контрольно-измерительная техника / Москва : Цербс. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 320с.
11. Измерения в промышленности : справочник. В 3-х : пер. с нем. / под ред. П. Профоса. – Москва : Металлургия, 1990. – 492, 384, 344 с.
12. Сергеев, А. Г. Метрология : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – Москва : Логос, 2001. – 408. : ил.
13. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. 1. Общая теория измерений / И. Ф. Шишкин. – 4-е изд., перераб. и доп. − Санкт-Петербург : Питер, 2010. – 192 с.: ил.
14. Бурдун, Г. Д. Основы метрологии : уч. пособие для вузов. / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – 3-е изд., перераб. – Москва : Изд-во стандартов, 1985. – 256 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «**Теоретическая метрология**»

на тему «Обработка результатов многократных измерений»

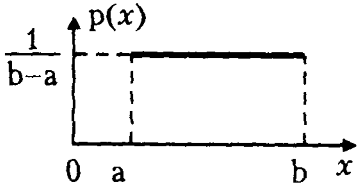
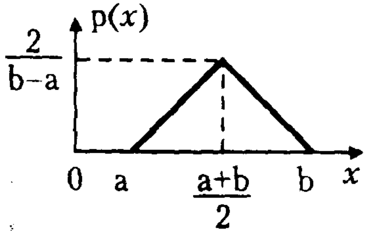
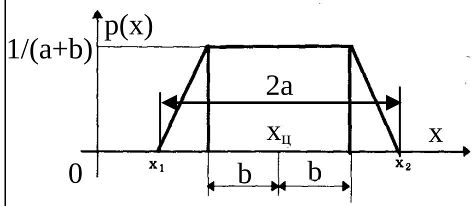
Вариант_________

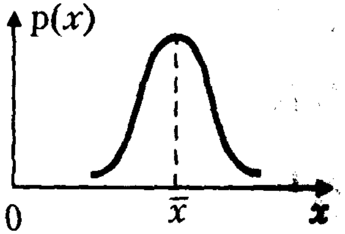
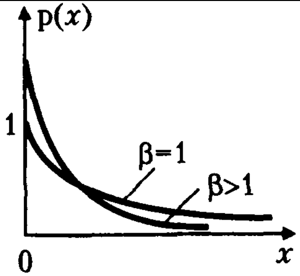
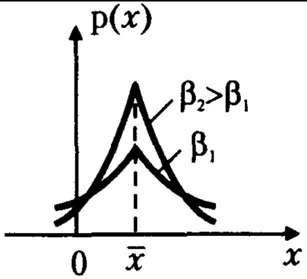
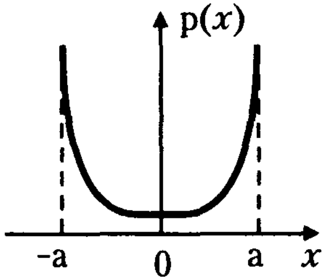
Выполнил:
студент гр.____ _______________
ф.и.о.
№ шифра зачетной книжки _____
Адрес _________________________
____
«___» ____________ 2013 г.

Проверил:
доц., к.т.н. ____________________
ф.и.о. руководителя
«___» ____________ 2013 г.

2013 г.

Некоторые теоретические законы распределения вероятности

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция	Интегральная функция
Равномерный		$p(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a<x<b$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x>a\end{cases}$
Треугольный (Симпсона)		$p(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x<\dfrac{a+b}{2}\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a,\\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a<x<a+b\\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b,\\ 1, & b<x<\infty\end{cases}$
Трапецеи-дальный		$p(x)=\begin{cases}0, x\le X_ц-a, x\ge X_ц+a\\ \dfrac{x-X_ц+a}{a^2-b^2}, X_ц-a\le x\le X_ц-b\\ \dfrac{1}{a+b}, X_ц-b\le x\le X_ц+b\\ \dfrac{X_ц+a-x}{a^2-b^2}, X_ц+b\le x\le X_ц+a\end{cases}$	

Нормальный (Гауса)		$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$F(x_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx$
Экспоненци-альный одно-сторонний		$p(x)=\beta e^{-\beta x}$	$F(x)=1- e^{-\beta x}$
Экспоненци-альный двухсторон-ний (Лапласа)		$p(x)=\frac{\beta}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}$	$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}, & -\infty\le x\le\bar{x}\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}, & \bar{x}\le x\le\infty\end{cases}$
Арксинуса		$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$	$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}$

Интегральная функция χ^2– распределения Пирсона.
Значения $\chi^2_{k;\,p}$ для различных k и p

	P												
k	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,10**	**0,20**	**0,30**	**0,50**	**0,70**	**0.80**	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
1	0,0001	0,0006	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	57	28	3	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,0201	0,0404	0,103	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,115	0,185	0,352	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,297	0,429	0,711	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,554	0,752	1,145	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	0,872	1,134	1,635	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,239	1,564	2,167	3,490	4,594	5, 527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	1,646	2,032	2,733	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,088	2,532	3,325	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	2,558	3,059	3,940	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,053	3,609	4,575	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	3,571	4,178	5,226	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,107	4,765	5,892	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
	4,660	5,368	6,571										

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значения интегральной функции распределения *P(λ)* случайной величины *λ*

λ	*P* (λ)	λ	*P* (λ)	λ	P (λ)	λ	P(λ)
0,30	1,000	0,70	0,711	1,10	0,178	1,90	0,002
0,35	1,000	0,75	0,627	1,20	0,112	2,00	0,001
0,40	0,997	0,80	0,544	1,30	0,068	2,10	0,000
0,45	0,987	0,85	0,465	1,40	0,040	2,20	0,000
0,50	0,964	0,90	0,393	1,50	0,022	2,30	0,000
0,55	0,923	0,95	0,328	1,60	0,012	2,40	0,000
0,60	0,864	1,00	0,270	1,70	0,006	2,50	0,000
0,65	0,792			1,80	0,003		

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Статистика *d* для критерия 1

n	$q_1/2$ *100%*		$(1-q_1/2)$ *100%*	
	1%	5%	95%	99%
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Значения *P* для вычисления критерия 2

n	*m*	q_2 *. 100%*		
		1%	2%	5%
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

Значения функции Лапласа

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	2535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4886
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

Функция Лапласа : $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{t^2}{2}}\,dt.$

$F(t)=0{,}5+\Phi(t),$ где $F(t)$ – интегральная функция нормированного нормального распределения.

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3935	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0338	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0219	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	000	3,9

Значения распределения Стьюдента *t*

k	При доверительной вероятности *P*		
	0,90	**0,95**	**0,99**
2	6,31	12,71	63,68
3	2,92	4,30	9,93
4	2,35	3,18	5,84
5	2,13	2,78	4,60
6	2,02	2,57	4,06
7	1,94	2,45	3,71
8	1,90	2,37	3,50
9	1,86	2,31	3,36
10	1,83	2,26	3,25
11	1,81	2,23	3,17
12	1,80	2,20	3,11
13	1,78	2,18	3,06
14	1,77	2,16	3,01
15	1,76	2,15	2,98
16	1,75	2,13	2,95
17	1,75	2,12	2,92
18	1,74	2,11	2,90
19	1,73	2,10	2,88
20	1,73	2,09	2,86
∞	1,65	1,96	2,58