

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовых проектов
для студентов специальности 1-53 01 01-05 Автоматизация технологических
процессов и производств (легкая промышленность),
раздел: ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ТОЧНОСТИ СИСТЕМ

Витебск
2008

УДК 681.5

Теория автоматического управления методические указания к выполнению курсовых проектов для студентов специальности 1-53 01 01-05 Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность), раздел: Проектирование оптимальных по точности систем.

Витебск: Министерство образования РБ, УО «ВГТУ», 2008.

Составители: доцент, к.т.н. Иванова Л.В.
ассистент Леонов В.В.
студентка Шелепова Н.Л.

Методические указания содержат теоретические аспекты повышения точности и использование теории инвариантности при проектировании оптимальных по точности систем. Приведен пример проектирования системы с комбинированным управлением, ее моделирование. Рассмотрены вопросы точности стохастических систем и определения оптимальной частотной функции замкнутой системы при наличии помех, структуры оптимальных по точности и быстродействию систем, синтезированных с использованием принципа максимума.

Методические указания составлены в соответствии с программой курса ТАУ, изучаемого студентами специальности 1-53 01 01-05 и могут использоваться для курсового проектирования не только по курсу ТАУ, но и по курсам АЭПО, АТПО и др., а также для подготовки к госэкзаменам и дипломном проектировании. Одобрено кафедрой АТПП УО «ВГТУ» 11 декабря 2007 г., протокол № 5.

Рецензент: ст. преподаватель Ринейский К.Н.

Редактор: доцент, к.т.н. Смелков Д.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» «___» _____ 200__ г., протокол № ___

Ответственный за выпуск Букин Ю.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати _____ Формат _____ . Уч.изд.л. _____

Печать ризографическая. Тираж _____ экз. Заказ № _____. Цена _____ р.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Лицензия № 02330/0133005 от 1 апреля 2004 г.

210035, Витебск, Московский проспект, 72

СОДЕРЖАНИЕ

1. Содержание	3
2. 1. Анализ задачи проектирования САУ.....	4
3. 2. Точность линейных непрерывных САУ при детерминированных и случайных сигналах. Общие способы повышения точности.....	10
4. 2.1 Определение понятия точность.....	10
5. 2.2 Статическая ошибка.....	11
6. 2.3 Динамическая ошибка.....	12
7. 2.4 Повышение точности (методы).....	14
8. 2.5 Инвариантность и условия обеспечения инвариантности...	25
9. 3 Синтез линейных систем с комбинированным управлением..	29
10. 3.1 Аналитический расчет и использование ЛАЧХ.....	29
11. 3.2 Пример расчета САУ с комбинированным управлением....	35
12. 3.2.1 Анализ исходной системы.....	36
13. 3.2.2 Синтез замкнутого контура регулирования без учета требований к точности.....	39
14. 3.2.3 Расчет коэффициентов ошибок без учета компенсирующей цепи.....	43
15. 3.2.4 Выбор структуры компенсирующей цепи и определение условий компенсации ошибок по скорости и ускорению.....	45
16. 3.2.5 Расчет и построение частотных характеристик желаемой системы с учетом компенсирующей цепи.....	48
17. 3.2.6 Реализация компенсирующей цепи.....	52
18. 3.2.7 Моделирование системы	54
19. 4 Точность стохастических систем.....	63
20. 5 Оптимальные по быстродействию системы.....	76
21. Выводы.....	83
22. Список использованной литературы.....	85

1 АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ САУ

Система автоматического управления включает в себя объект управления (ОУ) и управляющее устройство (УУ). Состояние ОУ в процессе управления можно характеризовать функциями времени $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, которые называются переменными (координатами) состояния. Будем рассматривать эти переменные как компоненты n -мерного вектора состояния ОУ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Информация о состоянии ОУ содержится в контролируемых выходных величинах, называемых управляемыми величинами или выходными координатами ОУ. Совокупность управляемых величин охарактеризуем вектором $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, где $m \leq n$. Отдельные координаты векторов X и Y могут совпадать, но в общем случае они связаны какой-либо функциональной зависимостью. Управляемые величины определяют качественные показатели процесса в ОУ.

В реальных условиях работы ОУ, как правило, подвергается воздействию внутренних и внешних возмущения (помех) $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, которые вызывают нежелательные отклонения управляемых величин, т.е. ухудшают качество процесса управления.

Для достижения желаемого качества процессов в ОУ к ним прикладываются специально организованные управляющие воздействия $U = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$, которые устранят влияние помех и обеспечат изменение управляемых величин в соответствии с их желаемыми (заданными) значениями $Y_{ж} = \{y_{1ж}, y_{2ж}, \dots, y_{mj}\}$. Информация о желаемом ходе процесса управления содержится в задающих воздействиях $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$.

Управляющие воздействия формирует УУ, задающие воздействия в САУ, представляют собой «уставки» регуляторов, а в САУ формируются самой системой на основании критерия оптимизации.

Функциональная схема САУ приведена на рисунке 1.

Она состоит из ОУ; датчиков D, D' , выдающих информацию об управляемых величинах и возмущениях; усилительно-преобразовательных элементов (УП), которые преобразуют сигналы датчиков в сигналы, удобные для обработки; вычислительного устройства (ВУ), перерабатывающего эти сигналы в задающее воздействие G ; исполнительных устройств (сервоприводов) (ИУ), преобразующих сигналы ошибки $\varepsilon = g - u$ в управляющие воздействия U с достаточно высоким уровнем мощности.

Основное назначение САУ заключается в формировании таких управляющих воздействий $U(t)$, которые обеспечат выполнение цели управления – обеспечить работу ОУ в оптимальном режиме. Цель (критерий) управления задается в виде допустимого значения некоторого функционала:

$$I = I\{x, u, f, g, t\},$$

вводимого в ВУ, где вычисляется значение функционала и сравнивается в допустимыми значением и на основании их сравнения вырабатывается вектор задающих воздействий.

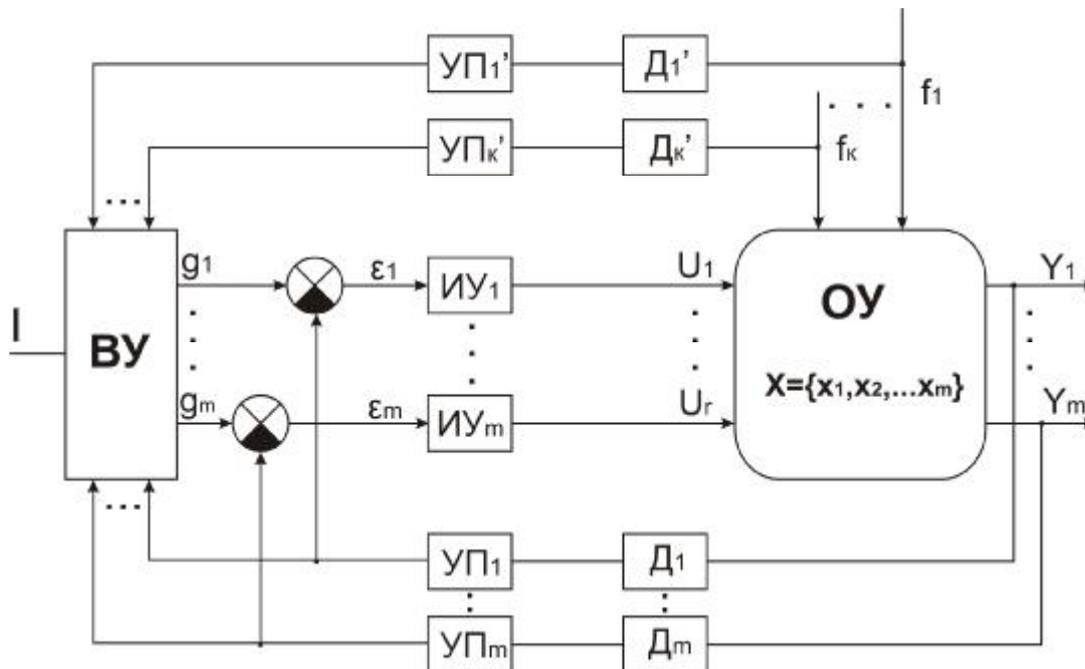


Рисунок 1 - Функциональная схема САУ

Если ставится задача поддержания экстремума этого функционала $I=I_{\text{экстр}}$, то САУ называют оптимальной. При формировании управляющих воздействий следует учитывать факторы, связанные, например, с ограниченной мощностью, скоростью и свободой перемещения регулирующего органа или другими ограничениями.

Таким образом, решение задачи управления состоит в нахождении и реализации алгоритма управления, т.е. функционала связи:

$$U=U(x,f,g,t),$$

обеспечивающего с учетом ограничений заданное (экстремальное) значение функционала.

Вектор управления $U_0(t)$, при котором $I=I_{\text{экстр}}$, называют оптимальным вектором управления, а функциональную зависимость $U_0=U_0(x,f,g,t)$ – оптимальным алгоритмом управления. При неполной информации о состоянии ОУ и возмущениях неизбежно появление ошибок управления.

Решение проблемы управления состоит из двух этапов: первый этап – выработка задающих воздействий $g_i(t)$, второй этап – их отработка, т.е. преобразование их в управляющие воздействия $u_i(t)$. Систему, выполняющую второй этап, называют системой автоматического регулирования (САР). САР может быть не только составной частью САУ, но и решать самостоятельную задачу (стабилизации выходной координаты ОУ), т.е. быть автономной.

Промышленные САУ имеют ряд существенных особенностей, которые необходимо учесть при проектировании.

1. Реальные промышленные объекты в процессе их нормальной эксплуатации могут находиться под влиянием большого числа контролируемых и неконтролируемых случайных воздействий, действующих по различным каналам. Поэтому для расчета даже простейших одноконтурных систем необходимо иметь столько передаточных функций $W(p)$, сколько возмущений действует на ОУ. Расчет должен быть ориентирован на выполнение в системе условия наибольшей динамической точности при расчетном (эквивалентном) возмущении.

2. Хотя действующие на ОУ возмущения являются нестационарными случайными функциями, но изменение во времени регулируемой величины представляет собой случайный процесс с постоянным математическим ожиданием. Поэтому можно считать, что нестационарная составляющая случайного процесса подавляется регулятором, и считать возмущения стационарными случайными процессами. Таким образом, промышленные ОУ при работе в контуре регулирования можно рассматривать как стационарные динамические системы, находящиеся под воздействием стационарных случайных возмущений.

3. Специфическая особенность промышленных САУ состоит в том, что при их синтезе главное значение приобретает не задача выбора алгоритмов функционирования управляющего устройства (регулятора) – они predeterminedены серийно выпускаемой аппаратурой, а задача обеспечения УУ наиболее своевременной (с наименьшим запаздыванием) информацией о состоянии ОУ. Повысить качество управления можно введением дополнительных информационных каналов связи ОУ с управляющим устройством (многоконтурное и комбинированное управление).

4. Переходные характеристики промышленных ОУ по управляющему воздействию обычно представляют собой монотонные функции времени, а сами САУ настраиваются так, чтобы их переходные процессы имели слабоколебательный характер. Это позволяет аппроксимировать ОУ передаточными функциями в виде дробно-рациональных функций, а ступенчатое возмущение принимать в качестве наиболее тяжелого для системы расчетного воздействия. ОУ чаще всего представляют передаточными функциями.

Статические ОУ

$$W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{k_0 \cdot e^{-p \cdot t}}{T_0 \cdot p + 1} \text{ или } W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{k_0 \cdot e^{-p \cdot t}}{(T_{01} \cdot p + 1)(T_{02} \cdot p + 1)}.$$

Астатические ОУ

$$W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{k_0 \cdot e^{-p \cdot t}}{p \cdot (T_0 \cdot p + 1)} \text{ или } W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{k_0}{p(T_0 \cdot p + 1)}.$$

5. При проектировании САУ важно соблюдать системный подход к построению математических моделей элементов системы, т.е. выбираемые модели элементов должны хорошо отражать реальные физические процессы, не столько в отдельно взятом элементе, сколько во всей системе в целом.

6. В САУ объекты управления обладают обычно гораздо большими постоянными времени (инерционностью), чем УУ. Кроме того, в каналах передачи воздействия промышленных объектов часто наблюдается транспортное запаздывание, это необходимо учитывать при расчете динамики и выборе места подключения добавочных информационных каналов в многоконтурных и комбинированных САУ.

7. Методика проектирования промышленных САУ зависит от схемного решения задачи управления. В простейших случаях используют одноконтурную схему (рисунок 2).

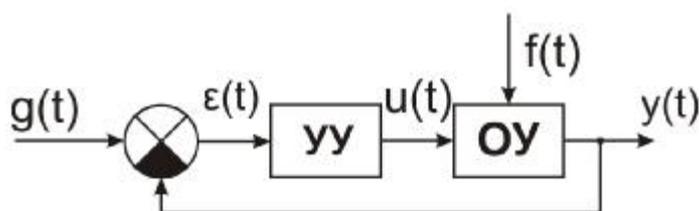


Рисунок 2 – Одноконтурная схема

УУ (регулятор) подает на ОУ управляющее воздействие $U(t)$ с целью поддержания управляемой величины $Y(t)$ в заданном режиме, информация о котором содержится в $g(t)$ – задающем воздействии. Управляющее воздействие является функцией ошибки $U(t)=f(\epsilon(t))$, которая вычисляется в УУ.

Гораздо чаще на практике встречаются многоконтурные САУ, которые используют добавочные информационные каналы связи объекта управления с устройством управления или комплексом регуляторов. Добавочные информационные каналы вводят чаще всего по положению регулирующего органа, что создает в устройстве управления замкнутый контур слежения за положением регулирующего органа. Большинство современных сервоприводов без проблем позволяет вводить ОС как по положению РО, так и скорости исполнительного привода.

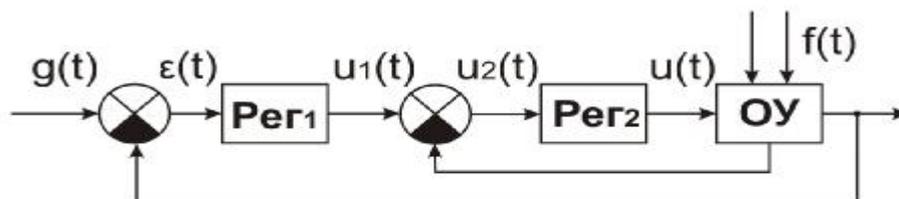
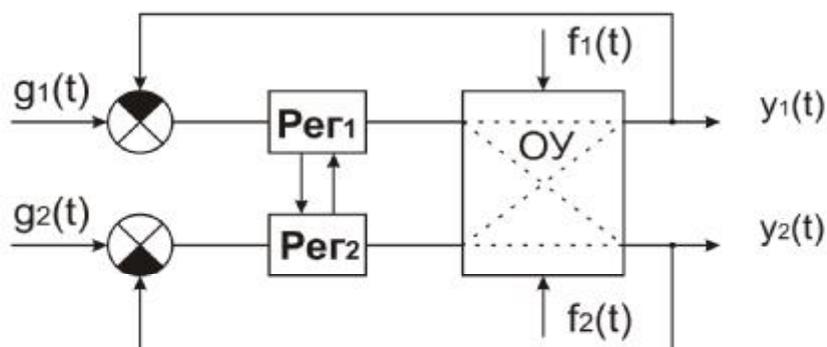


Рисунок 3 – Система с подчиненным регулированием

У сложных промышленных ОУ необходимо регулировать несколько величин (многомерные ОУ), и в этом случае приходится иметь дело с системами взаимосвязанного регулирования (рис. 4).

а)



б)

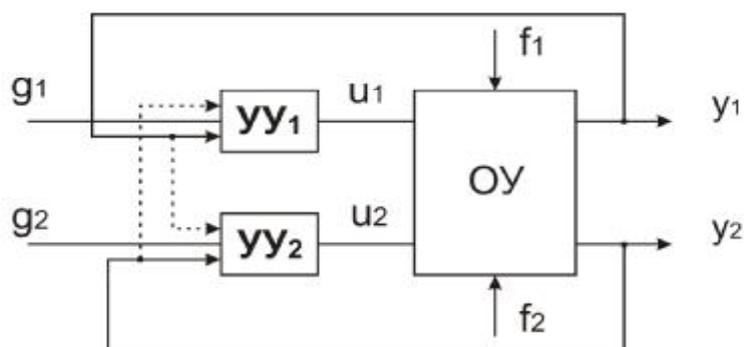


Рисунок 4 – Системы связного регулирования

Два контура управления в такой САУ описываются следующими уравнениями:

$$D_1(p) \cdot Y_1(p) = B_{11}(p) \cdot F_1(p) + C_{12}(p) \cdot Y_2(p);$$

$$D_2(p) \cdot Y_2(p) = B_{22}(p) \cdot F_2(p) + C_{21}(p) \cdot Y_1(p);$$

Полином $C_{21}(p)$ учитывает влияние на $Y_1(t)$ изменения $Y_2(t)$, которое воспринимается первой переменной $Y_1(t)$ как возмущение. Аналогично полином $C_{12}(p)$ учитывает влияние изменения $Y_1(t)$ на $Y_2(t)$.

$D_1(p)$ и $D_2(p)$ - характеристические полиномы системы.

$B_{11}(p)$ и $B_{22}(p)$ – полиномы возмущающих воздействий.

Самый простой случай многомерных систем, когда переменные Y_1 и Y_2 не связаны друг с другом, тогда система состоит из одномерных (в уравнении отсутствуют вторые члены в правой части) автономных и САУ.

Неавтономная САУ (с взаимозависимыми выходами) может быть сведена к многомерной автономной САУ применением принципа инвариантности к каждой из выходных переменных системы относительно остальных переменных с помощью введения компенсирующих связей между ними. Применительно к двухмерной системе для получения автономности надо ввести дополнительные корректирующие воздействия по Y_2 в первое управляющее устройство и по Y_1 – во второе УУ. При этом уравнения примут вид

$$\begin{aligned} D_1(p) \cdot Y_1(p) &= B_{11}(p) \cdot F_1(p) + Y_2(p) \cdot [C_{12}(p) + C_{K1}(p)]; \\ D_2(p) \cdot Y_2(p) &= B_{22}(p) \cdot F_2(p) + Y_1(p) \cdot [C_{21}(p) + C_{K2}(p)]. \end{aligned}$$

$C_{K1}(p)$ и $C_{K2}(p)$ - полиномы, определяющие корректирующие связи между контурами.

Условие автономности:

$$C_{K1}(p) = -C_{12}(p) \text{ и } C_{K2}(p) = -C_{21}(p).$$

В технике часто «связывают» механически либо угловые перемещения регулирующих органов взаимозависимых координат, либо задающие устройства.

8. При использовании цифровых УУ (регуляторов) удастся получить высокую точность и повышенную помехозащищенность САУ. Алгоритм работы УУ можно получить, используя стандартные методы синтеза САУ с заданными качественными показателями, с помощью псевдочастотных характеристик. Алгоритм работы цифрового устройства управления может в общем виде быть представлен Z-передаточной функцией.

$$W_{ЭВМ}(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \cdot z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot z^{-i}}.$$

Схема цифровой автоматической системы управления представлена на рис. 5, где АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь.

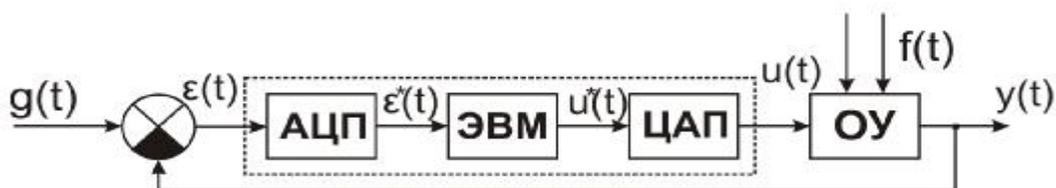


Рисунок 5 – Схема цифровой САУ

2 ТОЧНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛАХ. ОБЩИЕ СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ

2.1. Определение понятия точность

Замкнутая система автоматического регулирования с передаточной функцией $W(p)$ может находиться под воздействием управляющего сигнала (задающего воздействия) $g(t)$ и возмущения $f(t)$, приложенного в произвольной точке системы (рис. 6).

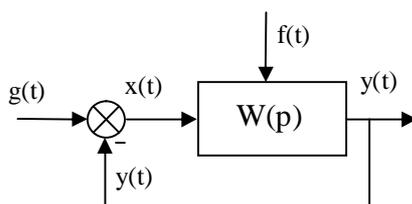


Рисунок 6 – Эквивалентная структурная схема

Точность системы автоматического управления - одна из важнейших характеристик систем автоматического управления, определяющая степень приближения реального управляемого процесса к требуемому.

Точность системы оценивается после завершения переходного процесса, т. е. в установившемся состоянии. Различают два вида установившегося состояния: статический установившийся режим (для систем стабилизации) и динамический установившийся режим (для систем программного управления и следящих систем). В динамическом установившемся режиме система находится в установившемся вынужденном движении. Оценкой точности в установившемся режиме является величина ошибки. Ошибка представляет собой разность между требуемым и действительным значениями регулируемой величины:

$$e(t) = g(t) - y(t). \quad (1)$$

Ошибка в системе складывается из ошибки воспроизведения задающего воздействия $e_g(t)$, ошибки из-за действия возмущений $e_f(t)$ и ошибки из-за неточности измерения управляемой переменной $e_{ч.э.}$ (ошибка чувствительного элемента).

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t) + e_{ч.э.} \quad (2)$$

Ошибка чувствительного элемента зависит от физической природы и конструктивных особенностей датчика. Эта ошибка может быть уменьшена за счет высокоточного первичного преобразователя.

2.2 Статическая ошибка

Точность САУ при обработке ступенчатого сигнала $g_0 \cdot 1(t)$ оценивается статической ошибкой.

Статическая ошибка характерна для статического установившегося режима. Величину ошибки после завершения переходного процесса можно вычислить по изображению ошибки или по переходной функции, используя теорему о предельных переходах.

$$e_{cm} = e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{1}{1 + k} \cdot g_0 = C_0 \cdot g_0, \quad (3)$$

где C_0 – коэффициент статической ошибки,
 $W_{раз}(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы,
 g_0 – величина задающего воздействия,
 k – общий коэффициент усиления системы.

Если на элементы системы или объект управления действует и возмущение, то появляется составляющая ошибки от возмущения (рис. 7).

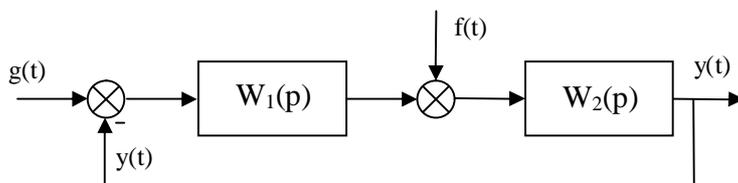


Рисунок 7 – Структурная схема системы с двумя входами

$$W_{fy}(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} = \frac{Y(p)}{F(p)}. \quad (4)$$

$W_{fy}(p)$ – передаточная функция, связывающая возмущающее воздействие и выход.

Используя передаточную функцию (4) системы можно написать выражение для вычисления статической ошибки от возмущающего воздействия:

$$e_{fcm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[F(p) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \right]. \quad (5)$$

Подставляя $p=0$, получим

$$e_f(t) = \frac{k_f}{1 + k} \cdot f(t), \quad (6)$$

где k_f - коэффициент передачи звеньев от выхода до точки приложения возмущения,

$f(t) = f_0 \cdot 1(t)$ - меняется скачком, то суммарная ошибка.

$$e_{cm}^{сис} = e_{cm}^g + e_f = \frac{1}{1 + k} (g_0 + k_f \cdot f_0).$$

2.3. Динамическая ошибка

Точность установившегося движения систем оценивается динамической ошибкой.

Динамическая ошибка возникает в системе при произвольно меняющемся задающем воздействии. Чтобы определить динамическую ошибку в системе, обычно изображение ошибки раскладывают в ряд с коэффициентами, которые могут вычисляться по передаточной функции САУ по ошибке.

Изображение ошибки по задающему воздействию:

$$E_g(p) = G(p) \cdot \frac{1}{1 + W_{раз}(p)} = \left[c_0 + c_1 \cdot p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + \dots + \frac{c_n}{n!} p^n \right] \cdot G(p), \quad (7)$$

$c_0, c_1, c_2 \dots c_n$ – коэффициенты ошибок по задающему воздействию.

Эти коэффициенты можно вычислить по передаточной функции системы по ошибке:

$$c_0 = W_{eg}(p) \Big|_{p=0}, \quad c_1 = \frac{dW_{eg}(p)}{dp} \Big|_{p=0}, \quad c_2 = \frac{d^2W_{eg}(p)}{dp^2} \cdot \frac{1}{2} \Big|_{p=0} \dots \quad (8)$$

$$\dots c_n = \frac{d^n W_{eg}(p)}{dp^n} \cdot \frac{1}{n!} \Big|_{p=0}.$$

Изображение ошибки по возмущающему воздействию:

$$W_{yf}(p) = F(p) \cdot \frac{W_f(p)}{1 + W_{раз}(p)}, \quad (9)$$

$$E_f(p) = F(p) \cdot \left[c'_0 + c'_1 \cdot p + \frac{c'_2}{2!} p^2 + \frac{c'_3}{3!} p^3 + \dots + \frac{c'_n}{n!} p^n \right]. \quad (10)$$

$c'_0, c'_1, c'_2 \dots c'_n$ – коэффициенты ошибок по возмущению.

От изображений можно перейти к временным функциям

Ошибка по задающему воздействию:

$$e_g(t) = g(t) \left[c_0 + c_1 \cdot \frac{d}{dt} + \frac{c_2}{2!} \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \frac{c_3}{3!} \cdot \frac{d^3}{dt^3} + \dots + \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \right] = \quad (11)$$

$$c_0 \cdot g(t) + c_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \cdot \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \frac{c_3}{3!} \cdot \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + \dots + \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^n g(t)}{dt^n}.$$

Ошибка по возмущающему воздействию:

$$e_f(t) = f(t) \left[c'_0 + c'_1 \cdot \frac{d}{dt} + \frac{c'_2}{2!} \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \frac{c'_3}{3!} \cdot \frac{d^3}{dt^3} + \dots + \frac{c'_n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \right] = \quad (12)$$

$$c'_0 \cdot f(t) + c'_1 \cdot \frac{df(t)}{dt} + \frac{c'_2}{2!} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{c'_3}{3!} \cdot \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + \dots + \frac{c'_n}{n!} \cdot \frac{d^n f(t)}{dt^n}.$$

В основу классификации систем по точности установившегося движения положены коэффициенты ошибок, признаком классификации служит порядок астатизма n .

Система с нулевым порядком астатизма ($n = 0$) называется статической, и все коэффициенты ошибок не равны нулю.

В системе с астатизмом первого порядка ($n = 1$) вынужденная погрешность при отработке постоянного воздействия равна нулю, т.е. $c_0 = 0$, а при отработке сигнала, линейно изменяющегося во времени $g(t) = g_0 + g_1 \cdot t$, постоянна и пропорциональна скорости изменения воздействия, т.е. $c_1 \neq 0$.

Системой с астатизмом n -го порядка называется система управления, вынужденная погрешность которой при отработке воздействия, выражаемого в виде полинома степени n по t , постоянна и пропорциональна значению $g_0^{(n)}$.

$$g(t) = g_0 + g_1 \cdot t + \dots + \frac{g_0^{(n)}}{n!} \cdot t^n.$$

Следовательно, $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$.

Таким образом, порядок астатизма системы равен номеру первого, не равного нулю коэффициента ошибки по рассматриваемому воздействию. Он определяется числом интегрирующих звеньев в контуре управления для задающего воздействия, для возмущающего воздействия – числом интегрирующих звеньев, включенных до точки приложения возмущения.

2.4. Методы повышения точности

Для повышения точности системы необходимо уменьшить коэффициенты ошибок по задающему и возмущающему воздействию.

Наиболее универсальным и эффективным методом повышения точности является увеличение общего коэффициента усиления разомкнутой цепи. Увеличить общий коэффициент усиления можно за счет введения в систему усилителей или за счет повышения коэффициента передачи отдельных звеньев. Увеличение общего коэффициента усиления благоприятно сказывается в смысле уменьшения ошибок практически во всех типовых режимах. Это получается из-за того, что общий коэффициент усиления разомкнутой цепи входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок. Однако увеличение общего коэффициента ограничивается устойчивостью системы регулирования. При повышении коэффициента усиления, как правило, система приближается к колебательной границе устойчивости. При некотором предельном его значении в системе возникают незатухающие колебания. Поэтому повышение коэффициента усиления до значения, при котором обеспечивается выполнение требований к

точности, не всегда является возможным. Однако существуют другие способы повышения точности системы.

К числу общих методов повышения точности систем автоматического регулирования относятся:

- повышение порядка астатизма;
- масштабирование входного сигнала;
- использование фильтров входных сигналов;
- использование неединичных главных обратных связей (ГОС).

Повышение порядка астатизма

Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы. Физически повышение порядка астатизма осуществляется за счет введения в канал регулирования системы интегрирующих звеньев (рисунок 8).

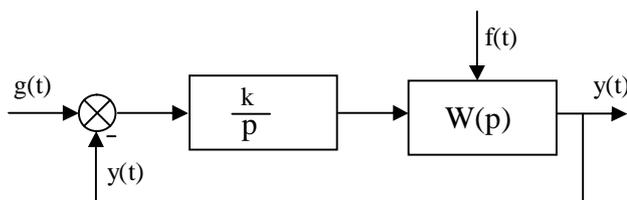


Рисунок 8 – Структура астатической САУ

Передаточная функция интегрирующего звена $W_u(p) = k/p$. $W(p)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы регулирования до введения интегрирующего звена.

Однако введение интегрирующего звена смещает фазовую частотную характеристику (ФЧХ) на угол -90° . Это приводит к уменьшению частоты среза, а следовательно, уменьшает быстродействие системы и приводит к ухудшению динамики. Поэтому, чтобы обеспечить точность повышением астатизма, в систему лучше вводить изодромное звено. Передаточная функция изодромного звена имеет вид

$$W_{изод}(p) = \frac{k(T_u p + 1)}{T_u p}, \quad (13)$$

где T_u – время изодрома.

Если время изодрома T_u взять большое, то при введении такого звена запас устойчивости по фазе может быть сохранен, следовательно, и динамика не будет ухудшена.

Изодромное звено можно представить как совокупность двух включенных параллельно звеньев - идеального интегрирующего с коэффициентом передачи k и безынерционного звена с коэффициентом передачи k_1 (рис. 9):

$$W_{изод}(p) = \frac{k(T_u p + 1)}{T_u p} = \frac{k}{p} + k_1. \quad (14)$$

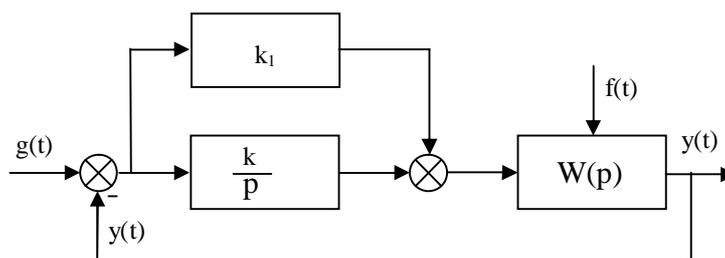


Рисунок 9 – Структура САУ с изодромным устройством

Для иллюстрации действия этого способа повышения точности рассмотрим систему автоматического управления (рис. 10):

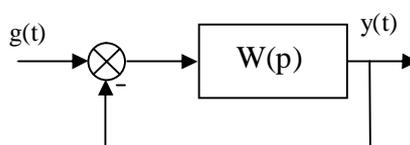


Рисунок 10 – Эквивалентная структурная схема

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}. \quad (15)$$

Изображение ошибки системы по задающему воздействию:

$$E_g(p) = G(p) \cdot \frac{1}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n)}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)} =$$

$$= \left[c_0 + c_1 \cdot p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + \frac{c_n}{n!} p^n \right] \cdot G(p),$$
(16)

где $c_0, c_1, c_2 \dots c_n$ – коэффициенты ошибок по задающему воздействию, которые находятся по формуле (16).

Теперь введем интегрирующее звено в прямую цепь (рис. 11):

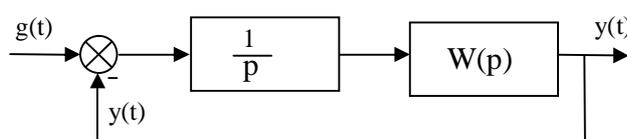


Рисунок 11 – Структура астатической системы

Передаточная функция разомкнутой системы теперь имеет вид

$$W_{раз}(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{A(p)}{B(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p}. \quad (17)$$

Передаточная функция системы по ошибке:

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}. \quad (18)$$

Используя теорему о пределах, получим

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p \cdot G(p)}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)} \cdot G(p).$$

При $g(t) = g_0$ - система стабилизации.

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 \cdot g_0}{p} \cdot \frac{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n)}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)} = 0.$$

А для систем программного управления и следящих

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot G(p) \cdot \frac{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) \cdot p + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)},$$

$$\text{при } g(t) = g_0 \cdot t \rightarrow G(p) = \frac{g_0}{p^2},$$

где g_0 – скорость изменения задающего воздействия.

$$e(t = \infty) = \frac{1}{k} \cdot g_0 = c_1 \cdot g_0.$$

Сравнивая коэффициенты ошибок исходной и скорректированной систем, можно заметить, что вследствие введения интегрирующего звена получено условие $c_0 = 0$, и, следовательно, будет равна нулю ошибка по положению. Если повысить порядок астатизма еще на один, то будет достигнуто условие $c_0 = c_1 = 0$, следовательно, будут равны нулю ошибка по положению и скорость составляющая ошибки и так далее.

Если $\frac{1}{p}$ введено до точки приложения $f(t)$, система астатическая по задающему и возмущающему воздействию.

Масштабирование входного сигнала

Это способ повышения точности систем автоматического регулирования, при котором уменьшение ошибки системы происходит из-за уничтожения статической ошибки от задающего воздействия. Физически это осуществляется включением на входе системы масштабирующего устройства (рис. 12):

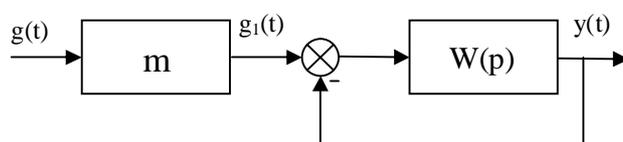


Рисунок 12 – Система с масштабированием задающего воздействия

Задающее воздействие $G_1(p)$ на входе системы

$$G_1(p) = m \cdot G(p), \tag{19}$$

где m – коэффициент масштабирования.

$$Y(p) = G_1(p) \cdot W_{зам}(p) = G_1(p) \cdot \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (20)$$

В установившемся режиме при статическом регулировании $W_{раз}(p)|_{p=0} = k$.

Поэтому для установившегося режима

$$Y(p) = G_1(p) \cdot \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = G_1(p) \cdot \frac{k}{1 + k}. \quad (21)$$

Переходя во временные функции, получаем

$$y(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{k}{1 + k} \cdot g_1(t) = \frac{k}{1 + k} \cdot g_{ex}(t) \cdot m. \quad (22)$$

Для того чтобы статическая ошибка от задающего воздействия равнялась нулю, необходимо выполнение следующего условия:

$$y(t)|_{t \rightarrow \infty} = g_{ex}(t). \quad (23)$$

Этого можно достичь, если в качестве масштабирующего устройства использовать безынерционный элемент с коэффициентом передачи, равным

$$1 = \frac{k \cdot m}{1 + k} \rightarrow m = \frac{1 + k}{k}. \quad (24)$$

Такое масштабирование используется практически во всех статических системах автоматического регулирования, что позволяет рассматривать их по отношению к задающему воздействию как астатические и считать для них коэффициент ошибки $c_0 = 0$. Однако равенство нулю первого коэффициента ошибки в статических системах может быть достигнуто только при выполнении условия $k = const$. Если общий коэффициент усиления нестабилен, то в системе обязательно появится статическая ошибка.

Использование фильтров входных сигналов

В этом способе повышение точности систем автоматического регулирования происходит за счет непосредственной коррекции входного задающего

воздействия. Физически это осуществляется путем включения на входе системы фильтра, передаточная функция которого $W_{\phi}(p)$ (рис. 13).

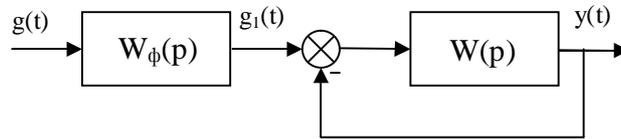


Рисунок 13 – Структура с фильтром

В этом случае задающее воздействие проходит через предварительный корректирующий элемент.

$$G_1(p) = W_{\phi}(p) \cdot G(p). \quad (25)$$

Ошибка системы в этом случае равна

$$\begin{aligned} E(p) &= G(p) - Y(p) = G(p) - \frac{W_{\text{раз}}(p) \cdot W_{\phi}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \cdot G(p) = G(p) \cdot \left(1 - \frac{W_{\text{раз}}(p) \cdot W_{\phi}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \right) = \\ &= G(p) \cdot \left(\frac{1 + W_{\text{раз}}(p) - W_{\text{раз}}(p) \cdot W_{\phi}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \right) = G(p) \cdot \left(\frac{1 + W_{\text{раз}}(p) \cdot (1 - W_{\phi}(p))}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Следовательно, передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия равна

$$W_{\text{eg}}(p) = \frac{1 + W_{\text{раз}}(p) \cdot (1 - W_{\phi}(p))}{1 + W_{\text{раз}}(p)}. \quad (27)$$

Если $W_{\text{eg}}(p) = 0$, тогда $W_{\phi}(p) = \frac{1 + W_{\text{раз}}(p)}{W_{\text{раз}}(p)}$.

В качестве фильтрующего элемента на входе системы применяют форсирующие звенья. Это может быть идеально дифференцирующее звено, передаточная функция которого равна

$$W_{\phi}(p) = k \cdot p, \quad (28)$$

или инерционно-форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_{\phi}(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}, \text{ при } T_1 > T_2. \quad (29)$$

Фильтры целесообразно применять для повышения точности астатических систем. Для иллюстрации действия этого метода повышения точности рассмотрим астатическую систему регулирования.

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n} = \frac{k \cdot A(p)}{p \cdot B'(p)}. \quad (30)$$

Если в качестве фильтра использовать инерционно-форсирующее звено, то передаточная функция ошибки примет вид

$$\begin{aligned} W_{\text{ог}}(p) &= \frac{1 + W_{\text{раз}}(p) \cdot (1 - W_{\phi}(p))}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{1 + \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n} \cdot \left(1 - \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}\right)}{1 + \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}} = \\ &= \frac{(b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m) \cdot \frac{(T_2 p + 1 - (T_1 p + 1))}{T_2 p + 1}}{(b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)} = \quad (31) \\ &= \frac{(b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot p (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m) \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{T_2 p + 1}}{(b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)} = \\ &= \frac{p \cdot [(b_1 + b_2 p + \dots + b_n p^{n-1}) \cdot (T_2 p + 1) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m) \cdot (T_2 - T_1)]}{[(b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) + k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)] \cdot (T_2 p + 1)}, \end{aligned}$$

Следовательно, $c_0 = 0$. Чтобы коэффициент c_1 был равен нулю, необходимо, чтобы свободный коэффициент полинома числителя, стоящего в квадратных скобках, был равен нулю, т.е. $b_1 + k(T_2 - T_1) = 0$.

Следовательно:

$$T_1 - T_2 = \frac{b_1}{k}. \quad (32)$$

При выполнении этого условия достигается равенство нулю коэффициента c_1 , следовательно, скоростная ошибка на выходе системы будет равна нулю.

Использование форсирующих звеньев на входе системы позволяет уменьшить ошибку на выходе и эквивалентно введению интегрирующего звена в прямую цепь. Следовательно, происходит косвенное повышение астатизма.

Использование неединичных ГОС

Неединичные обратные связи применяются для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе регулирования.

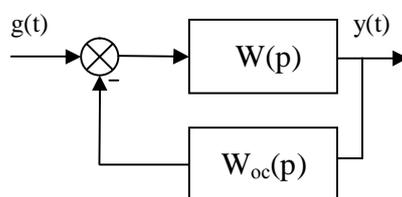


Рисунок 14 – Структура с корректирующей ОС

В этом случае регулируемая величина будет определяться выражением:

$$Y(p) = W_{зам}(p) \cdot G(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p) \cdot W_{oc}(p)} \cdot G(p). \quad (33)$$

Для того, чтобы ошибка по задающему воздействию была равна нулю, необходимо выполнение условия

$$y(t) = g(t), \quad (34)$$

а следовательно:

$$W_{зам}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p) \cdot W_{oc}(p)} = 1. \quad (35)$$

При выполнении этого условия ошибка будет равняться нулю. Отсюда можно найти требуемую передаточную функцию главной обратной связи:

$$W_{oc}(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}. \quad (36)$$

При разложении этого выражения в степенной ряд получаем

$$W_{oc}(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)} = 1 - \frac{1}{W(p)} = 1 - (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n) \frac{1}{k_{н.ц.}} = k_{н.ц.} - (a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n). \quad (37)$$

Проанализируем это выражение. Допустим, что исходная система астатическая $a_0 = 0$. Тогда главная обратная связь должна быть единичной. Если система статическая, то коэффициент передачи главной обратной связи должен быть отличным от единицы и дополнительно должны быть введены обратные связи по производным от регулируемой величины (по скорости, по ускорению и т.д.) (рис. 15).

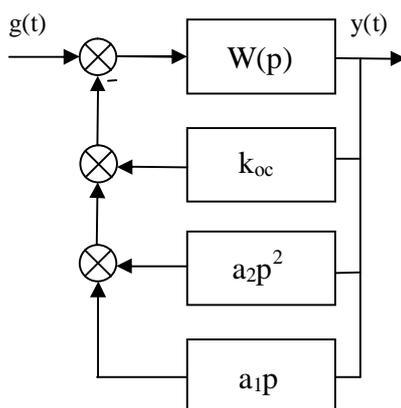


Рисунок 15 – Структура с корректирующими ОС

Реализация условия

$$W_{oc}(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}, \quad (38)$$

а следовательно, и условия полной независимости ошибки от задающего воздействия практически не возможна. Это определяется, во-первых, невозможностью точного введения высших производных ($a_1 p, a_2 p^2, a_3 p^3, a_3 p^3, \dots, a_n p^n$), а, во-вторых, тем, что при выполнении этого условия система будет находиться на границе устойчивости. Поэтому неединичные обратные связи используются лишь как средство повышения точности систем стабилизации.

Наиболее эффективным действие неединичной обратной связи оказывается в статической системе. Здесь простым изменением коэффициента передачи жесткой главной обратной связи можно получить эффект астатизма относительно задающего воздействия.

Для того чтобы показать это, рассмотрим систему автоматического регулирования, схема которой изображена на рисунке 11:

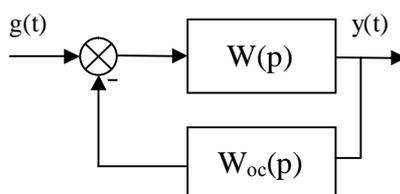


Рисунок 16 – Структура с жесткой ОС

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{ny}(p) = \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_m p^m)}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \dots + b_n p^n}. \quad (39)$$

Главная обратная связь жесткая, т. е. $W_{oc}(p) = k_{oc}$. Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$\begin{aligned} W_{зам}(p) &= \frac{W_{ny}(p)}{1 + W_{ny}(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{\frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_m p^m)}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \dots + b_n p^n}}{1 + k_{oc} \cdot \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_m p^m)}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \dots + b_n p^n}} = \\ &= \frac{k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_m p^m)}{(1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \dots + b_n p^n) + k_{oc} \cdot k \cdot (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_m p^m)}. \end{aligned} \quad (40)$$

По теореме о предельном переходе передаточная функция замкнутой системы после завершения переходного процесса будет равна

$$W_{зам}(p) = W_{зам}(p)|_{p=0} = \frac{k}{1 + k_{oc} \cdot k}. \quad (41)$$

Для того, чтобы ошибка была равна нулю, необходимо, чтобы

$$W_{зам}(p) = 1, \quad (42)$$

следовательно:

$$\frac{k}{1 + k_{oc} \cdot k} = 1. \quad (43)$$

Из полученного условия находим коэффициент усиления обратной связи:

$$k_{oc} = \frac{k - 1}{k}. \quad (44)$$

При наличии возмущений необходимо вводить управление по возмущению, если оно доступно измерению, т.е. проектировать комбинированную систему управления, обеспечивая инвариантности. Особенно это важно для следящих систем.

2.5. Инвариантность и условия обеспечения инвариантности

Одним из наиболее эффективных способов повышения точности следящих систем является применение методов теории инвариантности, т. е. применение различных компенсирующих цепей, предназначенных для компенсации ошибок, обусловленных изменяющимся входным сигналом и возмущениями. В общем случае инвариантность системы по какому-либо воздействию – это независимость выходной переменной системы от этого воздействия. В таких системах управление осуществляется как сигналом ошибки, так и компенсирующими сигналами, которые формируются из задающего воздействия и возмущений.

Контур управления по возмущению компенсирует основное измеряемое возмущение, а контур управления по ошибке ликвидирует остаточные отклонения, вызванные некомпенсированными возмущениями и изменяющимся задающим воздействием. Следящие системы, в которых реализуется этот принцип управления, называются системами с комбинированным управлением. Структурные схемы следящих систем с таким управлением приведены на рис. 17.

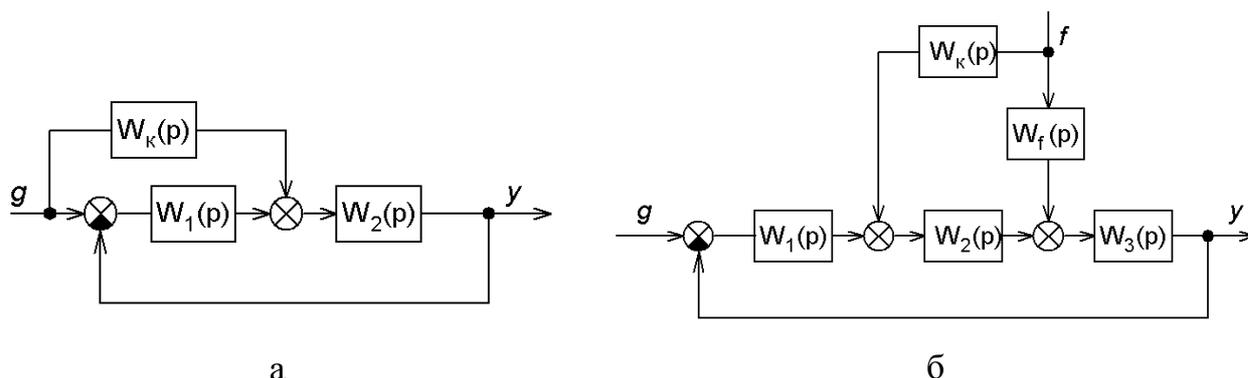


Рисунок 17 – Структуры инвариантных систем

Теоретически может быть рассчитана такая передаточная функция компенсирующей цепи $W_k(p)$, при введении которой можно получить абсолютную инвариантность системы как по входному сигналу, так и по возмущению, т. е. абсолютно точную систему, в которой ошибка равна нулю и не зависит от величины входного сигнала и возмущения.

Например, в следящей системе с комбинированным управлением по входному сигналу (рис.17 а) передаточная функция по ошибке

$$W_{eg}(p) = 1 - W_{зам}(p) = 1 - \frac{W_2(p) \cdot W_1(p) + W_2(p) \cdot W_k(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)} = \frac{1 - W_2(p) \cdot W_k(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)}.$$

При выполнении условия

$$W_k(p) = \frac{1}{W_2(p)} \quad (45)$$

передаточная функция по ошибке обращается в нуль, а передаточная функция замкнутой системы $W_{yg}(p)$ будет тождественно равна единице:

$$W_{yg}(p) = \frac{W_2(p) \cdot W_1(p) + W_2(p) \cdot W_k(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)} = 1.$$

Условие (45) является условием абсолютной (полной) инвариантности следящей системы по входному сигналу.

В следящей системе с комбинированным управлением по возмущению (рис. 17 б) передаточная функция системы

$$W_{yf}(p) = \frac{W_3(p)[W_f(p) - W_2(p) \cdot W_K(p)]}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)}.$$

При выполнении условия

$$W_K(p) = \frac{W_f(p)}{W_2(p)} \quad (46)$$

передаточная функция $W_{yf}(p)$ обращается в нуль, т. е. условие (46) является условием абсолютной инвариантности системы по возмущению.

В схеме, приведенной на рис. 16 б, при выполнении условия $W_f(p) = W_K(p) \cdot W_2(p)$ сигналы на выходе $W_f(p)$ и $W_2(p)$, обусловленные возмущением, будут равны, а их разность (на входе $W_3(p)$) равна нулю, т. е. действия возмущения по цепям $W_f(p)$ и $W_K(p) \cdot W_2(p)$ взаимно компенсируются.

Особенностью следящих систем с комбинированным управлением является то, что компенсирующие цепи при выполнении условий (45) и (46) не изменяют характеристическое уравнение замкнутой системы, а следовательно, не влияют на устойчивость.

Реализация принципа комбинированного управления позволяет компенсировать ошибки, обусловленные действием входного сигнала и возмущения, но не устраняет переходную составляющую ошибки, обусловленную ненулевыми начальными условиями.

Условия абсолютной инвариантности (45) и (46) получить на практике в большинстве случаев не удастся из-за физической нереализуемости требуемых передаточных функций компенсирующих цепей, представляющих собой дроби, у которых порядок числителя больше порядка знаменателя. Приближенная реализация условий (45) и (46) позволяет получить частичную инвариантность (инвариантность до ε). При этом повышается порядок астатизма системы и она становится инвариантной (не имеет ошибки) к определенным типам воздействий.

Рассмотрим возможность компенсации ошибки на примере системы с комбинированным управлением по входному сигналу (рис. 16а). Предположим, что передаточная функция $W_2(p)$ части содержит интегратор и несколько инерционных звеньев:

$$W_2(p) = \frac{k_2}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)\dots} = \frac{k_2}{b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + \dots},$$

где $b_1 = 1$; $b_2 = \sum T_i$; $b_3 = \sum T_i T_j$.

Для выполнения условия инвариантности (46) передаточная функция компенсирующей цепи

$$W_K(p) = \frac{1}{W_2(p)} = a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots, \quad (47)$$

где $a_1 = \frac{1}{k_2}$; $a_2 = \frac{b_2}{k_2} = \frac{\sum T}{k_2}$; $a_3 = \frac{b_3}{k_2} = \frac{\sum T_i T_j}{k_2}$; ...

На выходе компенсирующей цепи формируется сигнал, пропорциональный производным входного сигнала, число которых определяется порядком знаменателя $W_2(p)$.

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию

$$W_{eg}(p) = \frac{1 - W_2(p) \cdot W_K(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)} = \frac{(b_1 - k_2 a_1)p + (b_2 - k_2 a_2)p^2 + (b_3 - k_2 a_3)p^3 + \dots}{1 + W_2(p) \cdot W_1(p)} \quad (48)$$

Приравняв нулю коэффициенты числителя выражения (48), получим условия повышения порядка астатизма. Астатизм системы повысится на единицу, если

$$b_1 - k_2 \cdot a_1 = 0 \text{ и } W_K(p) = a_1 p,$$

где $a_1 = \frac{1}{k_2}$.

Для повышения астатизма на два порядка компенсирующая цепь должна формировать сигнал, пропорциональный первой и второй производным:

$$W_K(p) = a_1 p + a_2 p^2 \text{ при } a_1 = \frac{1}{k_2}; a_2 = \frac{b_2}{k_2} = \frac{\sum T}{k_2}. \quad (49)$$

Астатизм системы повысится на три порядка при условии

$$W_K(p) = a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3, \quad (50)$$

где $a_1 = \frac{1}{k_2}$; $a_2 = \frac{b_2}{k_2}$; $a_3 = \frac{b_3}{k_2}$.

Реализовать компенсирующую цепь с передаточной функцией вида (50) практически не удастся. Если первую производную входного сигнала (угла поворота командной оси) сравнительно легко получить, например, с помощью тахогенератора, то остальные производные получают путем дифференцирования

выходного напряжения тахогенератора и реализуют только приближенно. При этом практически реализуемая передаточная функция компенсирующей цепи получается в виде

$$W_K(p) = a_1 p + \frac{a_2 p^2}{1 + T_{\Pi} p} + \frac{a_3 p^3}{(1 + T_{\Pi} p)^2} + \dots$$

Наличие паразитной постоянной времени T_{Π} в передаточной функции $W_K(p)$ влияет на условия компенсации ошибки и повышения порядка астатизма (50), (49), а также на характеристическое уравнение замкнутой системы.

На практике обычно ограничиваются двумя-тремя производными из-за сложности реализации и настройки компенсирующей цепи. Хотя полная инвариантность при этом не достигается, но повышается астатизм системы на два-три порядка, причем без заметного ухудшения устойчивости.

3 СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОМБИНИРОВАННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

3.1. Аналитический расчет и использование ЛАЧХ

При синтезе следящих систем с комбинированным управлением решаются две задачи: определение параметров и необходимых корректирующих средств замкнутого контура следящей системы и определение структуры и параметров компенсирующей цепи.

Так как компенсирующая цепь влияет на точность системы и не оказывает существенного влияния на устойчивость, задача синтеза может быть решена по частям. На первом этапе производится синтез замкнутого контура регулирования из условия обеспечения устойчивости и качества регулирования в переходном процессе без предъявления особых требований к точности, на втором этапе — синтез компенсирующей цепи из условия обеспечения заданной точности. При этом определяются вид передаточной функции компенсирующей цепи (сколько производных сигнала необходимо вводить) и ее параметры.

Синтез параметров может быть осуществлен как аналитически, так и с помощью эквивалентных логарифмических частотных характеристик.

Аналитический расчет следящей системы с комбинированным управлением обычно производят в такой последовательности:

- 1) по заданным требованиям к качеству регулирования и параметрам исходной системы определяют коэффициент передачи, обеспечивающий требуемое качество переходного процесса;
- 2) определяют коэффициенты ошибок системы при рассчитанном коэффициенте передачи без учета компенсирующей цепи и рассчитывают составляющие ошибки по скорости, ускорению и высшим производным;

3) сравнивая составляющие ошибки с допустимой, определяют, какие из них необходимо компенсировать, т. е. сколько дифференциаторов должна содержать компенсирующая цепь;

4) определяют практически реализуемую передаточную функцию компенсирующей цепи;

5) находят передаточную функцию системы по ошибке с учетом реализуемой компенсирующей цепи;

б) приравняв нулю коэффициенты передаточной функции по ошибке, определяют условия компенсации тех составляющих ошибки, которые превышают допустимую; по полученным условиям рассчитывают параметры компенсирующей цепи;

7) находят схему компенсирующей цепи и рассчитывают номиналы ее элементов.

В качестве желаемых ЛАЧХ замкнутого контура систем с комбинированным управлением используют ЛАЧХ несимметричного вида, у которых с повышением частоты наклоны увеличиваются (-1 -2 -3...). При таких ЛАЧХ проще получить большие значения добротностей по ускорению и высшим производным, что облегчает реализацию компенсирующей цепи.

Для расчета следящих систем с использованием регулирования как по ошибке, так и по задающему воздействию широко применяется метод эквивалентных частотных характеристик. Следящая система с таким управлением (рис.18, а) заменяется эквивалентной ей системой с единичной обратной связью (рис. 18 б), работающей по отклонению, передаточная функция которой в замкнутом состоянии равна передаточной функции системы с использованием регулирования как по ошибке, так и по задающему воздействию.

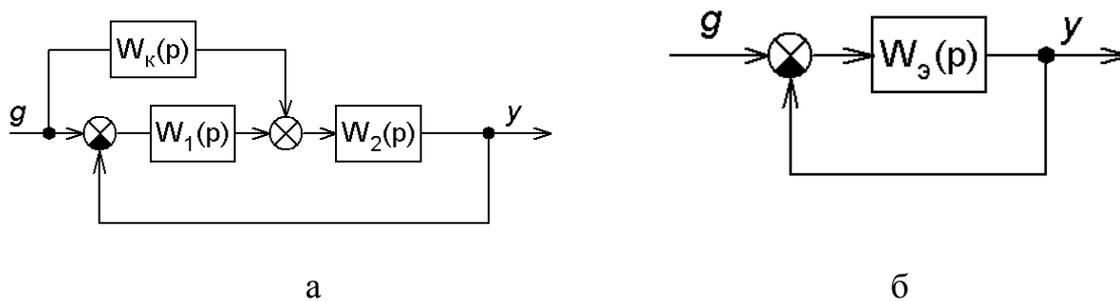


Рисунок 18 – Структура системы с комбинированным управлением

Найдем эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы.

$$W_{yg}(p) = \frac{[W_1(p) + W_K(p)] \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} = W_{зам}(p)$$

$$W_{\exists}(p) = \frac{W_{yg}(p)}{1 - W_{yg}(p)} = \frac{[W_1(p) + W_K(p)] \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) - [W_1(p) + W_K(p)] \cdot W_2(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \left[1 + \frac{W_K(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - W_K(p) \cdot W_2(p)} =$$

$$= \frac{W_0(p) \cdot \left[1 + \frac{W_K(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - W_K(p) \cdot W_2(p)},$$

$$W_{\exists}(p) = \frac{W_0(p) \cdot \left[1 + \frac{W_K(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - W_K(p) \cdot W_2(p)}, \quad (50)$$

где $W_0(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$ - передаточная функция системы без введения производных в канал передачи задающего воздействия в разомкнутом состоянии.

Цепь, содержащая производные от задающего воздействия, как было показано выше, влияет на точность системы, т. е. она изменяет низкочастотную часть ЛАЧХ, не оказывая существенного влияния на среднечастотную область.

В области низких частот передаточная функция исходной системы с астатизмом первого порядка может быть представлена в виде

$$W_0(p) = \frac{k}{p(1 + T_1 p)} \quad (51)$$

или

$$W_0(p) = \frac{k}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}. \quad (52)$$

Определим эквивалентную передаточную функцию в низкочастотной области для системы, описываемой выражением (51), при введении контура управления по первой производной $W_K(p) = a_1 p$. Согласно выражению (50), получим

$$W_{\exists}(p) = \frac{\frac{k}{p(1 + T_1 p)} \left(1 + \frac{a_1 p}{k_1} \right)}{1 - a_1 p \frac{k_2}{p(1 + T_1 p)}} = \frac{k \left(1 + \frac{a_1}{k_1} p \right)}{p + T_1 p^2 - a_1 k_2 p}.$$

При выполнении условия компенсации скоростной ошибки $a_1 = \frac{1}{k_2}$

$$W_{\ominus}(p) = \frac{k/T_1}{p^2} \left(1 + \frac{1}{k} p \right) = \frac{D_a(1+T_1'p)}{p^2},$$

где

$D_a = \frac{k}{T_1}$ - добротность по ускорению эквивалентной системы;

$T_1' = \frac{1}{k}$ - постоянная времени эквивалентной системы.

Построим ЛАЧХ эквивалентной системы (рис. 19). Поскольку эквивалентная система с астатизмом второго порядка, то первая асимптота эквивалентной ЛАЧХ будет иметь наклон -40дб/дек и проходить через точку, соответствующую базовой частоте $w_0 = \sqrt{D_a} = \sqrt{\frac{k}{T_1}}$. После частоты $w = \frac{1}{T_1'} = k$ ЛАЧХ эквивалентной системы будет иметь наклон -20дб/дек, т.к. множитель $(1+T_1'p)$ стоит в числителе передаточной функции. Низкочастотная асимптота эквивалентной ЛАЧХ $\frac{k/T_1}{p^2}$ является продолжением второй асимптоты исходной ЛАЧХ в области низких частот. Логарифмические характеристики исходной системы L_0 и эквивалентной L_{\ominus} приведены на рис. 19. По ЛАЧХ видно, что динамика эквивалентной системы по сравнению с исходной не ухудшилась: увеличилось быстродействие системы, т.к. частота среза сместилась вправо.

Аналогично могут быть получены выражения эквивалентных частотных характеристик при введении компенсирующего сигнала по первой и второй производным, а также для других типов передаточных функций исходной системы. Они приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Передаточные функции компенсирующих цепей

Передаточная функция		Выражение низкочастотной асимптоты эквивалентной ЛАЧХ	Условие компенсации ошибки
Исходной системы	Компенсирующей цепи		
$\frac{k}{p(1+T_1p)}$	a_1p	$\frac{k}{T_1w^2}$	$a_1 = \frac{1}{k_2}$
	$\frac{a_1p + a_2p^2}{1+T_{II}p}$	$\frac{k}{T_1T_{II}w^3}$	$a_1 = \frac{1}{k_2}$ $a_2 = \frac{T_1 + T_{II}}{k_2}$

Окончание таблицы

	$a_1 p$	$\frac{k}{(T_1 + T_2) w^2}$	$a_1 = \frac{1}{k_2}$
$\frac{k}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$	$\frac{a_1 p + a_2 p^2}{1+T_{II} p}$	$\frac{k}{(T_1 T_2 + T_1 T_{II} + T_2 T_{II}) w^3}$	$a_1 = \frac{1}{k_2}$ $a_2 = \frac{T_1 + T_2 + T_{II}}{k_2}$

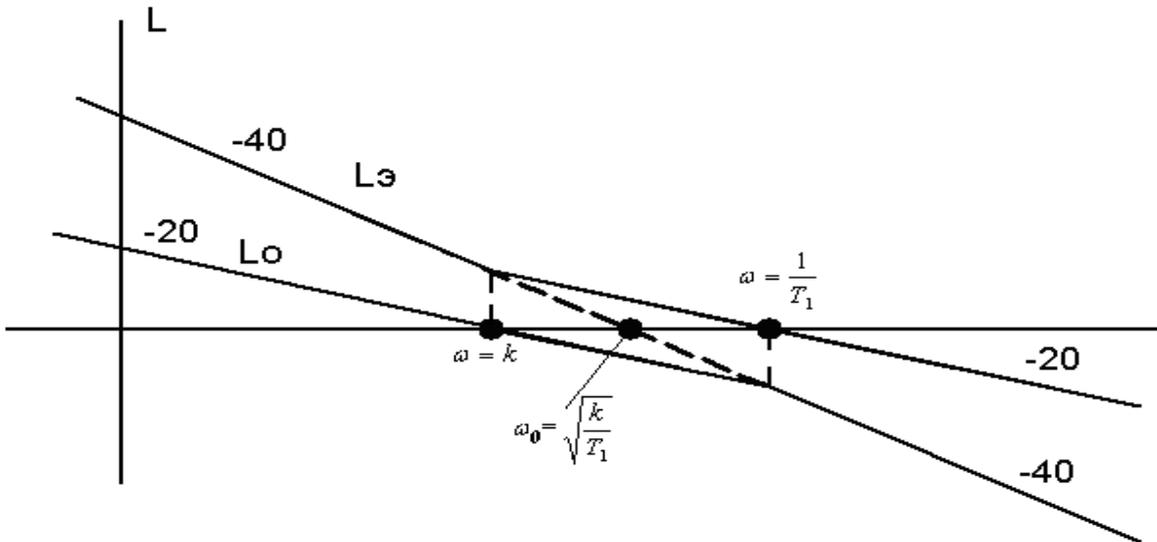


Рисунок 19 – ЛАЧХ исходной и эквивалентной систем

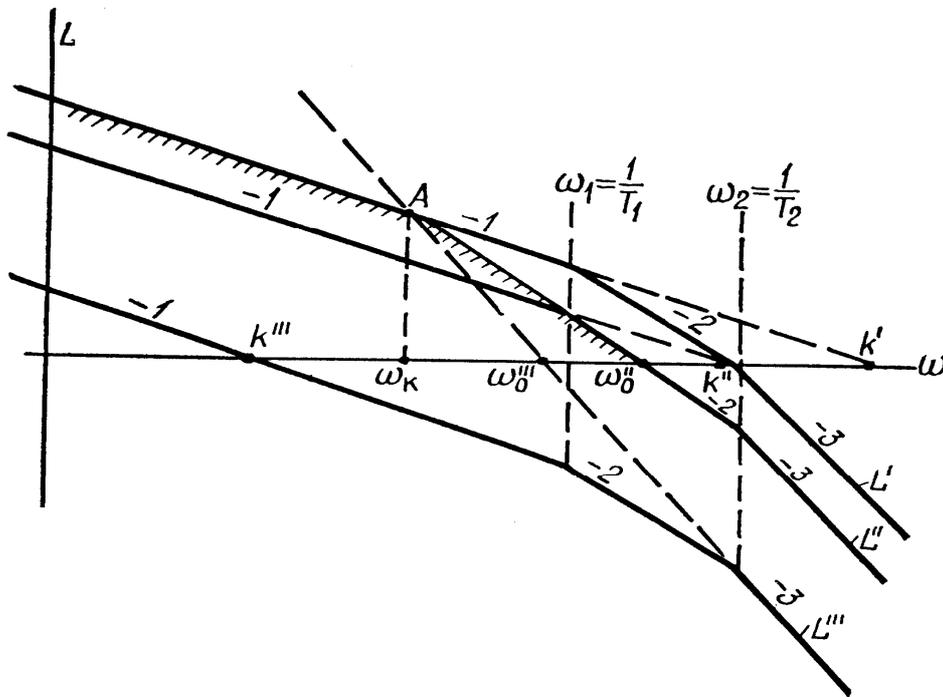


Рисунок 20 – Построение ЛАЧХ комбинированной системы

Используя эквивалентные частотные характеристики, можно достаточно просто произвести расчет следящей системы с комбинированным управлением. Рассмотрим это на примере следящей системы, имеющей передаточную функцию вида $\frac{k}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$, при обработке сложного сигнала с заданными максимальной скоростью слежения δ_{\max} и максимальным ускорением δ_{\max}'' .

Для обеспечения заданной точности ЛАЧХ системы должна проходить выше контрольной точки А (рис. 20) с координатами $w_K = \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\max}}$ и

$$L(w_K) = 20 \lg \frac{\delta_{\max}^2}{\delta_{\max} e_{\max}}$$

и не заходить в запретную область.

Если использовать следящую систему без комбинированного управления, то для обеспечения заданной точности (ЛАЧХ системы должна проходить выше запретной зоны) потребуется коэффициент передачи k' (ЛАЧХ L'). При заданных постоянных времени T_1 и T_2 система без корректирующих устройств будет неустойчивой (на частоте среза наклон ЛАЧХ составляет -60 дБ/дек).

При введении компенсирующего сигнала по первой производной (при компенсации скоростной ошибки) выше контрольной точки должна проходить первая асимптота эквивалентной ЛАЧХ $\frac{k''}{(T_1+T_2)w^2}$, которая является продолжением второй асимптоты исходной ЛАЧХ (L'').

Проведя выше запретной зоны асимптоту с наклоном -40 дБ/дек на интервале частот $\frac{1}{T_1} < w < \frac{1}{T_2}$ и низкочастотную с наклоном -20 дБ/дек на интервале частот $0 < w < \frac{1}{T_1}$ и высокочастотную асимптоты (от сопрягающей частоты $w_2 = \frac{1}{T_2}$), получим требуемую ЛАЧХ исходной системы L'' при компенсации скоростной ошибки. Как видно из ЛАЧХ, система будет более устойчивой, а требуемый коэффициент передачи $k'' = (w_0'')^2 (T_1 + T_2) < k'$.

При введении компенсирующих сигналов по первой и второй производным (компенсации ошибки по скорости и ускорению) выше контрольной точки А должна проходить низкочастотная асимптота эквивалентной ЛАЧХ $\frac{k'''}{(T_1T_2 + T_1T_{II} + T_2T_{II})w^3}$ с наклоном -60 дБ/дек, от $w_2 = \frac{1}{T_2}$.

Проведя асимптоты -40 дБ/дек $\left(\frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{T_2}\right)$ и -20 дБ/дек $0 < \omega < \frac{1}{T_2}$, получим требуемую ЛАЧХ исходной системы L'' при компенсации ошибок по скорости и ускорению. В этом случае требуемый коэффициент усиления исходной системы $k''' = (T_1 T_2 + T_1 T_{II} + T_2 T_{II})(\omega_0''')^3 < k''$. Как видно из ЛАЧХ, система устойчива. Если при этом качество переходного процесса соответствует заданным требованиям, то, реализовав цепь компенсации ошибок по скорости и ускорению, получим систему, удовлетворяющую заданным требованиям.

Передаточная функция компенсирующей цепи, согласно таблице 1,

$$W_K(p) = \frac{a_1 p + a_2 p^2}{1 + T_{II} p}.$$

Чтобы постоянная времени контура T_{II} не оказывала существенного влияния на устойчивость, ее величина должна быть как можно меньшей.

3.2. Пример расчета САУ с комбинированным управлением

Задана структурная схема САУ и ее параметры (рис. 21).

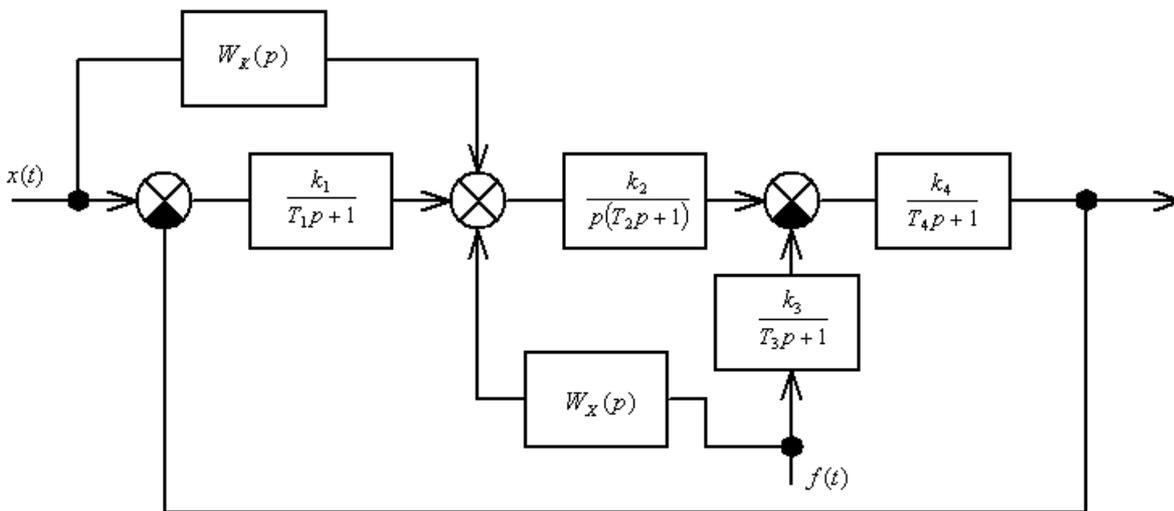


Рисунок 21 – Структура исходной системы

$$k_1 = 18; T_1 = 0,01c; k_2 = 2,5c^{-1}; T_2 = 0,5c; k_3 = 0,8; T_3 = 1c; k_4 = 1,2; T_4 = 2,5c.$$

$$x(t) = \xi(t) = \xi_{\max} = 100gp / c$$

$$\xi_{\max} = 30gp / c^2$$

$$j_{\max}(t) = 5gp / c$$

$$e_{\max} \leq 0.5gp.$$

3.2.1. Анализ исходной системы

Из структуры исходной системы определяем ее свойства.

Система замкнутая, линейная, минимально-фазовая. По задающему воздействию система астатическая с астатизмом первого порядка. По возмущению система также является астатической с астатизмом первого порядка, т.к. интегрирующее звено стоит до точки приложения возмущения.

Проведем анализ исходной системы при отсутствии компенсирующих цепей.

Запишем передаточную функцию исходной системы в разомкнутом состоянии без компенсирующих цепей

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_4}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

Определим эквивалентный коэффициент усиления системы

$$k_{\text{сис}} = k_1 k_2 k_4 = 54, \quad 20 \lg(k_{\text{сис}}) = 34,65.$$

Найдем частоты излома асимптотических ЛАЧХ

$$w_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,01} = 100c^{-1}; \quad \lg(w_1) = 2;$$

$$w_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2c^{-1}; \quad \lg(w_2) = 0,3;$$

$$w_4 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{2,5} = 0,4c^{-1}; \quad \lg(w_4) = -0,4.$$

Фазочастотная характеристика системы строится по уравнению

$$j(w) = -90^\circ - \arctg(wT_1) - \arctg(wT_2) - \arctg(wT_4).$$

ЛАЧХ и ФЧХ исходной системы представлены на рис. 22.

Данные для построения ФЧХ приведены в таблице 2.

Таблица 2– Данные для построения ФЧХ

Ω	0	0,01	0,02	0,1	0,1	0,6	1	2	6	10	20	60	100	600	1000	∞
Log ω	$-\infty$	-2	-1,7	-1,2	-1	-0,2	0	0,3	0,8	1	1,3	1,8	2	2,8	3	∞
$\varphi(\omega)$	-90	-91,7	-93,4	-100	-107	-163	-185	-215	-251	-262	-274	-299	-314	-350	-354	-360

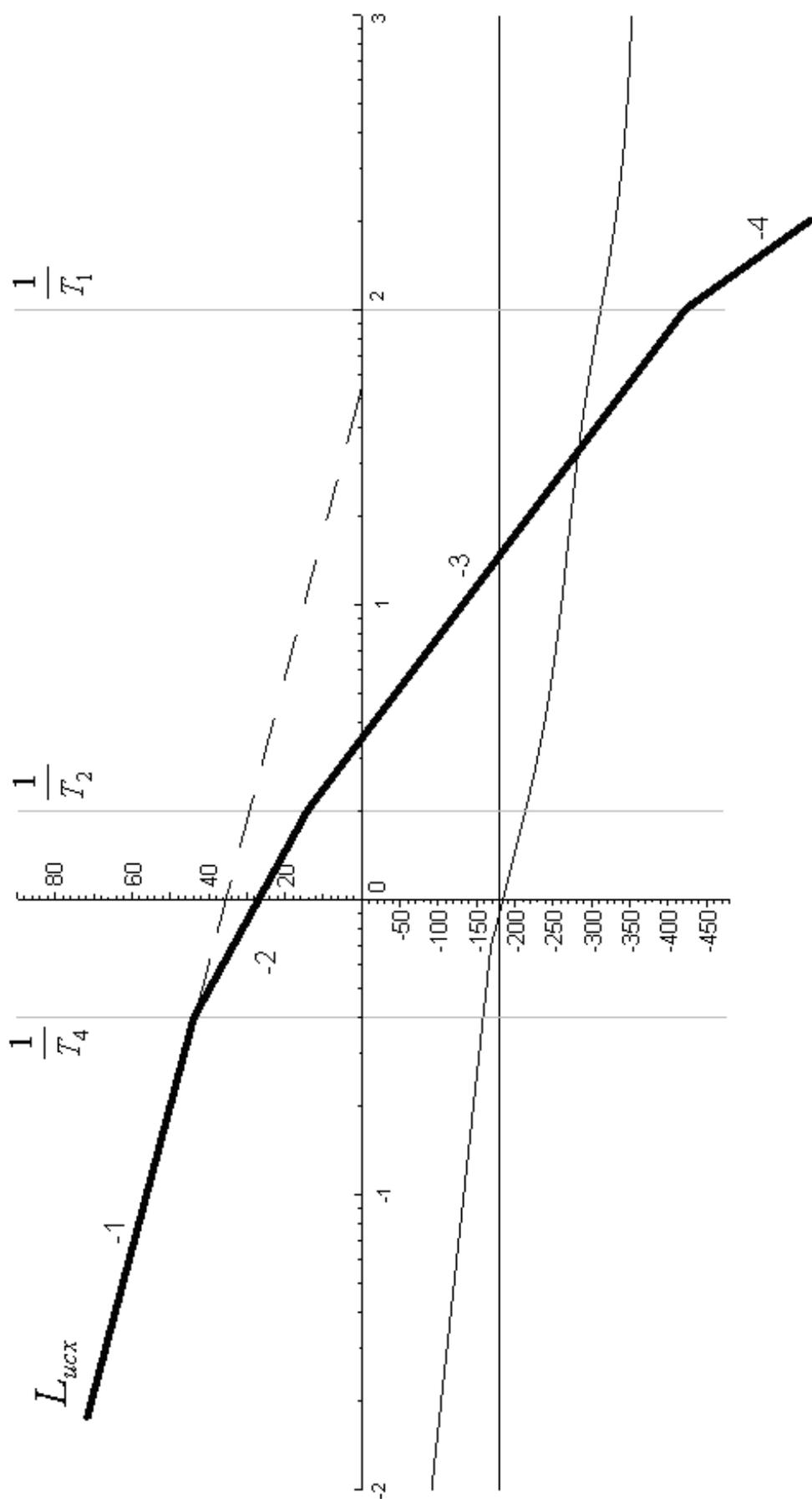


Рисунок 22 – ЛАЧХ и ФЧХ исходной системы

Исходная система неустойчива, т.к. наклон ЛАЧХ на частоте среза составляет -60 дБ/дек.

Определим критический коэффициент усиления с помощью критерия Гурвица. Найдем характеристическое уравнение системы:

$$1 + W_{раз}(p) = 0;$$

$$W_{раз}(p) = \frac{k_{сис}}{T_1 T_2 T_4 p^4 + (T_1 T_2 + T_2 T_4 + T_1 T_4) p^3 + (T_1 + T_2 + T_4) p^2 + p};$$

тогда характеристическое уравнение

$$T_1 T_2 T_4 p^4 + (T_1 T_2 + T_2 T_4 + T_1 T_4) p^3 + (T_1 + T_2 + T_4) p^2 + p + k_{сис} = 0.$$

Коэффициенты матрицы Гурвица:

$$a_4 = T_1 T_2 T_4 = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 2,5 = 0,0125 ;$$

$$a_3 = T_1 T_2 + T_2 T_4 + T_1 T_4 = 0,01 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 2,5 = 1,28 ;$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_4 = 0,01 + 0,5 + 2,5 = 3,01 ;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_0 = k_{сис} = 54 .$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее определитель:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_4 a_1^2 = 3,853 - 88,474 - 0,0125 = -84,6333 < 0.$$

Это подтверждает, что исходная система неустойчива.

Найдем критический коэффициент усиления ($a_0 = k_{кр}$) из условия

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем $k_{кр} = 2,34$.

Т.е., чтобы данная система была устойчивой, ее коэффициент передачи должен быть меньше $k_{кр} = 2,34$.

3.2.2. Синтез замкнутого контура регулирования без учета требований к точности

По заданным требованиям к качеству регулирования (показатель колебательности $M \leq 1,2$) и параметрам исходной системы определим допустимый коэффициент передачи, обеспечивающий требуемое качество переходного процесса [13]:

$$k_v = \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2\sum T}. \quad (53)$$

$$k_v = \frac{1,2^2 + 1,2\sqrt{1,2^2 - 1}}{2\sum (0,01 + 0,5 + 2,5)} = 0,371.$$

Известно, что введение производных от задающего воздействия во второй канал управления позволяет облегчить требования к основному каналу системы и работать с меньшей добротностью по скорости. Причем чем более высокого порядка вводятся производные, тем меньше требуемое значение добротности по скорости..

Для исходной системы при отсутствии каких-либо корректирующих устройств, даже в случае введения во второй канал второй производной от задающего воздействия, требуемое значение добротности по скорости

$$D_v'' = \frac{T_1 \cdot s_{\max}}{e_{\max}} = \frac{2,5 \cdot 30}{0,5} = 150c^{-1},$$

(T_1 – максимальная постоянная времени), что значительно превышает допустимое значение $k_v = 0,371c^{-1}$. Таким образом, чтобы обеспечить необходимую динамику и точность в системе, требуется введение дополнительных корректирующих устройств. С помощью данных корректирующих средств можно увеличить допустимое значение добротности по скорости k_v путем уменьшения суммы постоянных времени $\sum T$, стоящей в знаменателе формулы (53).

Из теории управления известно, что жесткая отрицательная обратная связь с $W_{oc}(p) = k_{oc}$, охватывающая инерционное звено, не изменяет структуру звена, но уменьшает его постоянную времени и коэффициент передачи. Т.е. введение такой корректирующей обратной связи позволит одновременно уменьшить коэффициент усиления системы и сумму постоянных времени $\sum T$, позволив сохранить при этом несимметричный вид ЛАЧХ (наклоны -20 -40 -60...).

Поскольку рекомендуется охватывать обратной связью звенья, имеющие наибольшую постоянную времени, охватим отрицательной обратной связью звено

$$W_4(p) = \frac{k_4}{T_4 p + 1} = \frac{1,2}{(1 + 2,5 p)}.$$

При $k_{oc} = 15$ его передаточная функция будет равна

$$W_4'(p) = \frac{\frac{k_4}{T_4 p + 1}}{1 + k_{oc} \frac{k_4}{T_4 p + 1}} = \frac{k_4}{T_4 p + 1 + k_{oc} k_4} = \frac{k_4 / (1 + k_{oc} k_4)}{\frac{T_4}{(1 + k_{oc} k_4)} p + 1} = \frac{k_4'}{T_4' p + 1},$$

$$\text{где } k_4' = \frac{k_4}{(1 + k_{oc} k_4)} = \frac{1,2}{1 + 15 \cdot 1,2} = 0,063, \quad T_4' = \frac{T_4}{(1 + k_{oc} k_4)} = \frac{2,5}{19} = 0,132c;$$

$$W_4'(p) = \frac{0,063}{1 + 0,132 p}.$$

В этом случае передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W'_{раз}(p) = \frac{k_1 k_2 k_4'}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4' p + 1)}.$$

Определим эквивалентный коэффициент усиления системы

$$k'_{сис} = k_1 k_2 k_4' = 18 \cdot 2,5 \cdot 0,063 = 2,835, \quad 20 \lg(k'_{сис}) = 9,05.$$

Найдем новые частоты излома:

$$w_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,01} = 100c^{-1}; \quad \lg(w_1) = 2;$$

$$w_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2c^{-1}; \quad \lg(w_2) = 0,3;$$

$$w_4' = \frac{1}{T_4'} = \frac{1}{0,132} = 7,6c^{-1}; \quad \lg(w_4') = 0,9.$$

Фазочастотная характеристика системы строится по уравнению

$$j(w) = -90^\circ - \arctg(wT_1) - \arctg(wT_2) - \arctg(wT'_4) = -90^\circ - \arctg(0,01w) - \arctg(0,5w) - \arctg(0,132w).$$

ЛАЧХ и ФЧХ этой системы приведены на рис. 23.

Найдем критический коэффициент усиления системы с корректирующей обратной связью. Характеристическое уравнение системы

$$T_1 T_2 T'_4 p^4 + (T_1 T_2 + T_2 T'_4 + T_1 T'_4) p^3 + (T_1 + T_2 + T'_4) p^2 + p + k'_{cuc} = 0.$$

Коэффициенты матрицы Гурвица:

$$a_4 = T_1 T_2 T'_4 = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 0,132 = 0,00066;$$

$$a_3 = T_1 T_2 + T_2 T'_4 + T_1 T'_4 = 0,01 \cdot 0,5 + 0,132 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,132 = 0,072;$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + T'_4 = 0,01 + 0,5 + 0,132 = 0,633;$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_0 = k'_{cuc} = 2,835.$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее определитель:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_4 a_1^2 = 0,046 - 0,0147 - 0,00066 = 0,03 > 0.$$

Это подтверждает, что система с корректирующей обратной связью устойчива.

Найдем критический коэффициент усиления ($a_0 = k_{кр}$) из условия

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0; \quad k_{кр} = \frac{a_3 a_2 a_1 - a_4 a_1^2}{a_3^2} = 8,75.$$

Критический коэффициент усиления системы с корректирующей обратной связью выше, чем исходной.

Рассчитаем новое допустимое значение коэффициента передачи системы:

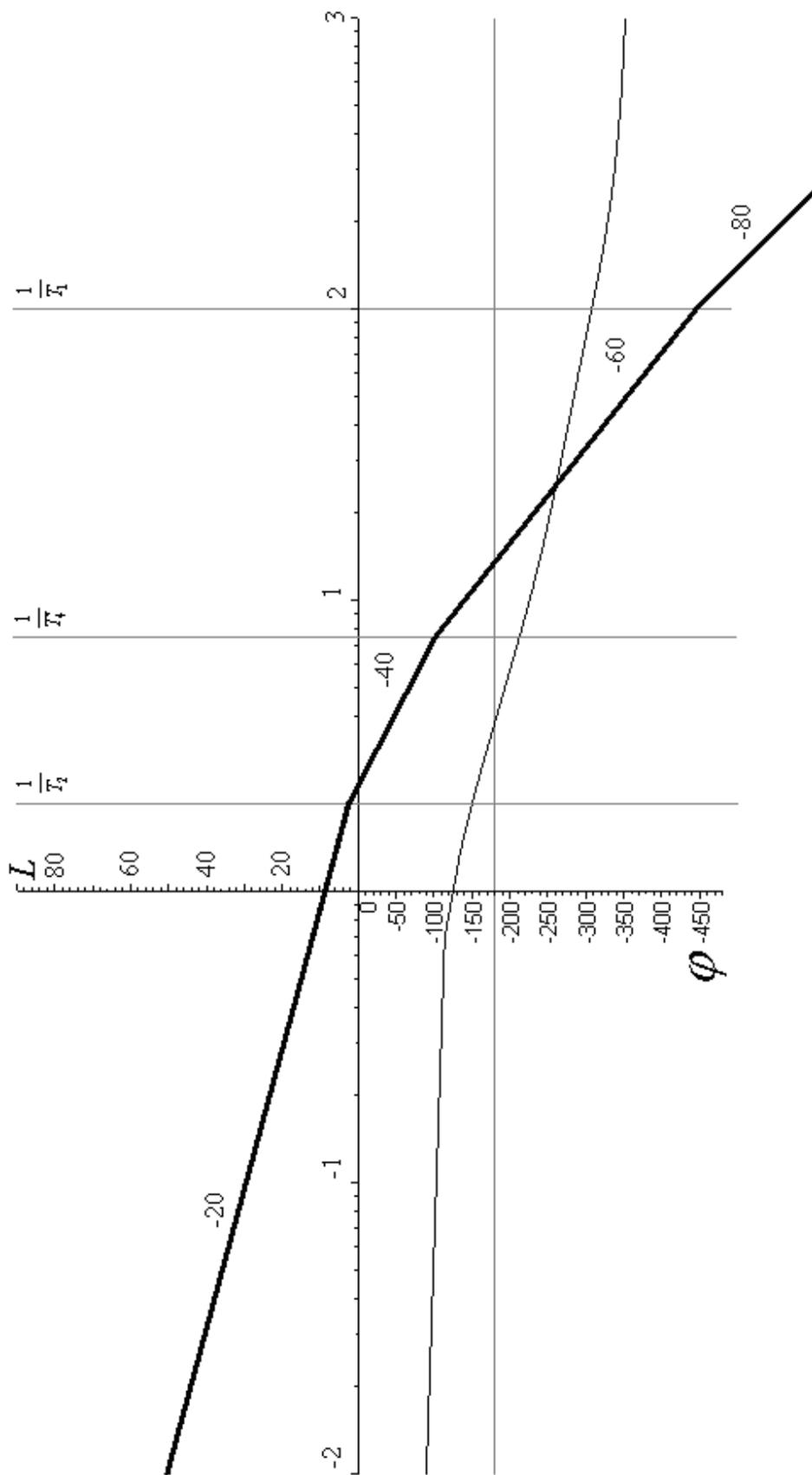


Рисунок 23 – ЛАЧХ и ФЧХ системы с корректирующей обратной связью

$$k'_v = \frac{1,2^2 + 1,2\sqrt{1,2^2 - 1}}{2 \sum (0,01 + 0,5 + 0,132)} = 1,766. \quad (54)$$

Заметно, что допустимое значение коэффициента передачи системы увеличилось ($k_v < k'_v$) за счет уменьшения суммы постоянных времени.

Таким образом, при введении корректирующей жесткой обратной связи не ставится задача получить желаемую ЛАЧХ системы; такая коррекция применяется для того, чтобы увеличить допустимое значение коэффициента передачи системы и критического коэффициента усиления.

3.2.3. Расчет коэффициентов ошибок без учета компенсирующей цепи

Ошибка по задающему воздействию:

$$e_g(t) = c_0 g(t) + c_1 \delta(t) + c_2 \delta(t) + \dots,$$

где c_i - коэффициенты ошибок от задающего воздействия.

Ошибка от действия возмущения:

$$e_f(t) = c'_0 f(t) + c'_1 \delta(t) + c'_2 \delta(t) + \dots,$$

где c'_i - коэффициенты ошибок от возмущающего воздействия.

Найдем составляющие ошибок по задающему воздействию и определим, какие из них необходимо компенсировать.

Запишем передаточную функцию ошибки относительно задающего воздействия системы с корректирующей обратной связью при отсутствии компенсирующей цепи:

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W'_{раз}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2 k'_4}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)}} = \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1) + k_1 k_2 k'_4} =$$

$$= \frac{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

где

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0; & a_0 &= k_1 k_2 k'_4 = 2,835; \\
b_1 &= 1; & a_1 &= 1; \\
b_2 &= T_1 + T_2 + T'_4 = 0,633; & a_2 &= T_1 + T_2 + T'_4 = 0,633; \\
b_3 &= T_1 T_2 + T_2 T'_4 + T_1 T'_4 = 0,072; & a_3 &= T_1 T_2 + T_2 T'_4 + T_1 T'_4 = 0,072; \\
b_4 &= T_1 T_2 T'_4 = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 0,132 = 0,00066; & a_4 &= T_1 T_2 T'_4 = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 0,132 = 0,00066
\end{aligned}$$

Разделив полином числителя на полином знаменателя, найдем коэффициенты ошибок:

$$c_0 = \frac{b_0}{a_0}; \quad c_1 = \frac{b_1 - c_0 a_0}{a_0}; \quad c_2 = \frac{b_2 - c_0 a_2 - c_1 a_1}{a_0}; \quad c_3 = \frac{b_3 - a_3 c_0 - c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_0}.$$

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = \frac{1}{2,835} = 0,353;$$

$$c_2 = \frac{0,633 - 0,353}{2,835} = 0,099;$$

$$c_3 = \frac{0,072 - 0,353 \cdot 0,633 - 0,099}{2,835} = -0,088$$

Статическая ошибка (ошибка по положению) e_0 в данной системе будет равна нулю, т.к. система астатическая. Определим составляющие ошибок по скорости, ускорению и третьей производной от задающего воздействия.

$$e_1 = c_1 \omega_{\max} = 0,353 \cdot 100 = 35,3 \text{ град};$$

$$e_2 = c_2 \omega_{\max}^2 = 0,099 \cdot 30 = 2,97 \text{ град};$$

$$e_3 = -c_3 \omega_{\max}^3 = -c_3 \omega_{\max} w_3 = -0,088 \cdot (-30 \cdot 0,3) = 0,24 \text{ град} < e_{\max} = 0,5 \text{ град}.$$

Вывод: для обеспечения заданной точности необходимо компенсировать ошибки по скорости и ускорению, т.е. ввести во второй канал управления первую и вторую производные от задающего воздействия.

Найдем составляющие ошибки по возмущению и определим, какие из них требуется компенсировать.

Система астатическая по возмущению, поэтому $c'_0 = 0$. Т.к. возмущение изменяется по линейному закону, то достаточно вычислить только коэффициент ошибки по первой производной от возмущения.

Передаточная функция системы по возмущению (при отсутствии второго канала передачи возмущения):

$$W_f(p) = \frac{-W_3(p)W_4'(p)}{1+W_{раз}'(p)} = \frac{-\frac{k_3}{(T_3p+1)} \frac{k_4'}{(T_4'p+1)}}{1 + \frac{k_1k_2k_4'}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_4'p+1)}} =$$

$$= \frac{-k_4'k_3p(T_1p+1)(T_2p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1) + k_1k_2k_4'(T_3p+1)}.$$

Коэффициент ошибки по скорости изменения возмущения:

$$c'_1 = \frac{-k_4'k_3}{k_1k_2k_4'} = \frac{-k_3}{k_1k_2} = \frac{-0,8}{18 \cdot 2,5} = -0,0178.$$

При возмущении, изменяющемся по закону $f(t) = 5t$, ошибка от его действия

$$e_f = e'_1 = c'_1 \dot{f}(t) = -0,0178 \cdot 5 = -0,089 \text{ град.}$$

Поскольку $e = e_g + e_f = 0,24 - 0,089 = 0,151 < e_{max} = 0,5$, то второй канал передачи возмущения можно не вводить, т.к. суммарная ошибка в системе при его действии не превышает допустимого значения при компенсации скоростной ошибки и ошибки по ускорению.

3.2.4. Выбор структуры компенсирующей цепи и определение условий компенсации ошибок по скорости и ускорению

Как уже отмечалось, компенсирующая цепь должна содержать первую и вторую производную от задающего воздействия. Практически реализуемая передаточная функция второго канала передачи задающего воздействия при компенсации ошибок по скорости и ускорению имеет вид [таблица 1]

$$W_K(p) = \frac{a_1p + a_2p^2}{1 + T_{II}p}.$$

В этом случае передаточная функция замкнутой системы

$$W_{зам}(p) = \frac{[W_1(p) + W_K(p)] \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

Известно, что введение производных во второй канал оказывает влияние на точность системы, т.е. изменяет низкочастотную часть ЛАЧХ. Передаточная функция системы в области низких частот имеет вид

$$W_{н.ч.}(p) = W_{1н.ч.}(p)W_{2н.ч.}(p) = \frac{k_1 k_2 k'_4}{p(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)},$$

$$\text{т.е. } W_{1н.ч.}(p) = k_1, \quad W_{2н.ч.}(p) = \frac{k_2 k'_4}{p(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)}.$$

Передаточная функция эквивалентной системы в разомкнутом состоянии будет иметь вид

$$\begin{aligned} W_3(p) &= \frac{W_{зам}(p)}{1 - W_{зам}(p)} = \frac{W_{н.ч.}(p) \left[1 + \frac{W_K(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - W_K(p)W_2(p)} = \frac{\frac{k_1 k_2 k'_4}{p(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)} \left[1 + \frac{a_1 p + a_2 p^2}{k_1(1 + T_{II} p)} \right]}{1 - \frac{a_1 p + a_2 p^2}{1 + T_{II} p} \frac{k_2 k'_4}{p(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)}} = \\ &= \frac{k_2 k'_4 (k_1 + (k_1 T_{II} + a_1) p + a_2 p^2)}{p(T_2 p + 1)(T'_4 p + 1)(1 + T_{II} p) - a_1 k_2 k'_4 p - a_2 k_2 k'_4 p^2} = \\ &= \frac{k_2 k'_4 (k_1 + (k_1 T_{II} + a_1) p + a_2 p^2)}{T_2 T'_4 T_{II} p^4 + (T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) p^3 + (T_2 + T_{II} + T'_4 - a_2 k_2 k'_4) p^2 + (1 - a_1 k_2 k'_4) p}. \end{aligned} \quad (55)$$

Найдем условия компенсации ошибки по скорости и ускорению. Для этого сначала запишем передаточную функцию ошибки относительного задающего воздействия:

$$\begin{aligned}
W_{\text{эг}}(p) &= \frac{1}{1+W_9(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_2 k'_4 (k_1 + (k_1 T_{II} + a_1)p + a_2 p^2)}{T_2 T'_4 T_{II} p^4 + (T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) p^3 + (T_2 + T_{II} + T'_4 - a_2 k_2 k'_4) p^2 + (1 - a_1 k_2 k'_4) p}} = \\
&= \frac{T_2 T'_4 T_{II} p^4 + (T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) p^3 + (T_2 + T_{II} + T'_4 - a_2 k_2 k'_4) p^2 + (1 - a_1 k_2 k'_4) p}{T_2 T'_4 T_{II} p^4 + (T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) p^3 + (T_2 + T_{II} + T'_4 - a_2 k_2 k'_4) p^2 + (1 - a_1 k_2 k'_4) p + k_2 k'_4 (k_1 + (k_1 T_{II} + a_1)p + a_2 p^2)} = \\
&= \frac{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.
\end{aligned}$$

Условия компенсации ошибок по скорости и ускорению имеют вид

$$1) \ b_1 = 0, \text{ т.е. } 1 - a_1 k_2 k'_4 = 0; \ a_1 = \frac{1}{k_2 k'_4}; \quad (56)$$

$$2) \ b_2 = 0, \text{ т.е. } (T_2 + T_{II} + T'_4 - a_2 k_2 k'_4) = 0; \ a_2 = \frac{T_2 + T_{II} + T'_4}{k_2 k'_4}. \quad (57)$$

Подставив a_1 и a_2 в выражение для передаточной функции эквивалентной системы (55), получим

$$\begin{aligned}
W_9(p) &= \frac{k_2 k'_4 (k_1 + (k_1 T_{II} + \frac{1}{k_2 k'_4})p + \frac{T_2 + T_{II} + T'_4}{k_2 k'_4} p^2)}{T_2 T'_4 T_{II} p^4 + (T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) p^3} = \\
&= \frac{\frac{k_2 k'_4 k_1}{(T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II})} \left(1 + (T_{II} + \frac{1}{k_1 k_2 k'_4})p + \frac{T_2 + T_{II} + T'_4}{k_2 k'_4 k_1} p^2 \right)}{\left(\frac{T_2 T'_4 T_{II}}{(T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II})} p + 1 \right) p^3}.
\end{aligned}$$

Т.е. при выполнении условия компенсации ошибок по скорости и ускорению исходная система эквивалентна системе с астатизмом третьего порядка.

Выражение низкочастотной асимптоты ЛАЧХ эквивалентной системы будет иметь вид

$$|W_{\text{э.н.ч.}}(j\omega)| = \frac{k_{\text{э}}}{\omega^3} = \frac{k_2 k'_4 k_1}{(T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) \omega^3} = \frac{k'_{\text{сис}}}{(T_2 T'_4 + T_2 T_{II} + T'_4 T_{II}) \omega^3}. \quad (58)$$

3.2.5. Расчет и построение частотных характеристик желаемой системы с учетом компенсирующей цепи

Заданы максимальная скорость входного сигнала $\dot{g}_{\max} = 100g/c$ и максимальное ускорение $\ddot{g}_{\max} = 30g/c^2$ и максимальное значение ошибки $e_{\max} = 0,5$.

По заданным максимальным значениям скорости и ускорения входного сигнала определим амплитуду и частоту эквивалентного гармонического воздействия:

$$w_{\text{э}} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}} = \frac{30}{100} = 0,3c^{-1}; \quad A_{\text{э}} = \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\ddot{g}_{\max}} = \frac{10000}{30} = 333,3.$$

Эквивалентное гармоническое воздействие:

$$g_{\text{э}}(t) = A_{\text{э}} \sin(w_{\text{э}}t) = 333,3 \sin(0,3t).$$

Найдем координаты контрольной точки:

$$w_A = w_{\text{э}} = 0,3c^{-1}; \quad L(w_A) = 20 \lg \left| \frac{A_{\text{э}}}{e_{\max}} \right| = 20 \lg(666,66) = 56,5 \text{ дб}.$$

Обозначим на рис. 24 контрольную точку А и запретную область для ЛАЧХ.

При отсутствии компенсирующей цепи ЛАЧХ системы должна проходить выше контрольной точки и не заходить в запретную область. В этом случае требуемое значение добротности по скорости

$$D_{v1} = \frac{\dot{g}_{\max}}{e_{\max}} = \frac{100}{0,5} = 200.$$

ЛАЧХ такой системы L_1 показана на рис. 24. При заданных постоянных времени система будет неустойчива, т.к. на частоте среза наклон -60 дб/дек.

При введении компенсирующей цепи по первой и второй производным (компенсация ошибки по скорости и ускорению) система будет эквивалентна системе с астатизмом третьего порядка. В этом случае выше контрольной точки должна проходить низкочастотная асимптота эквивалентной ЛАЧХ с наклоном -60 дб/дек, являющаяся продолжением третьей асимптоты исходной ЛАЧХ от частоты $w = \frac{1}{T_4}$ влево. ЛАЧХ желаемой системы в этом случае проходит ниже,

чем при отсутствии компенсирующей цепи: от $w = \frac{1}{T_4}$ до $w = \frac{1}{T_2}$ - наклон - 40 и от $w = \frac{1}{T_2}$ до $w \rightarrow 0$ - наклон - 20.

Проведем аналитический расчет параметров компенсирующей цепи, а также требуемого по условиям точности коэффициента передачи, необходимого для построения желаемой ЛАЧХ.

По требованиям к точности рассчитаем требуемое значение добротности системы по третьей производной:

$$D_{\&} = w_{\&}^3 = \frac{w_{\&} \cdot \delta_{\max}}{e_{\max}} = \frac{0,3 \cdot 30}{0,5} = 18c^{-3}.$$

Из уравнения низкочастотной асимптоты (59) следует:

$$k_{c.ж.} = (T_2 T_4' + T_2 T_{II} + T_4' T_{II}) D_{\&}, \quad (59)$$

где $k_{c.ж.}$ - коэффициент передачи желаемой системы, который по требованиям к динамике должен быть меньше допустимого ($k_{c.ж.} \leq k_v' = 1.766$).

Примем $k_{c.ж.} = 1,6$; $20 \lg(k_{c.ж.}) = 20 \lg(1,6) = 4,1$.

ЛАЧХ желаемой системы ($L_{ж}$ на рис. 24) имеет такие же частоты излома, как и ЛАЧХ системы с корректирующей обратной связью (L' на рис. 24).

Определим постоянную времени компенсирующей цепи T_{II} :

$$T_{II} = \frac{k_{c.ж.} - D_{\&} T_2 T_4'}{(T_2 + T_4') D_{\&}} = \frac{1,6 - 18 \cdot 0,5 \cdot 0,132}{18(0,5 + 0,132)} = 0,036c.$$

По построенным логарифмическим характеристикам видно, что первая асимптота эквивалентной ЛАЧХ ($L_{\&}$ на рис. 24) проходит выше контрольной точки А. Это необходимо для того, чтобы ошибка по третьей производной не превышала максимально допустимого значения.

По формулам (56) и (57):

$$a_1 = \frac{1}{k_2 k_4'} = \frac{1}{0,063 \cdot 2,5} = 6,35;$$

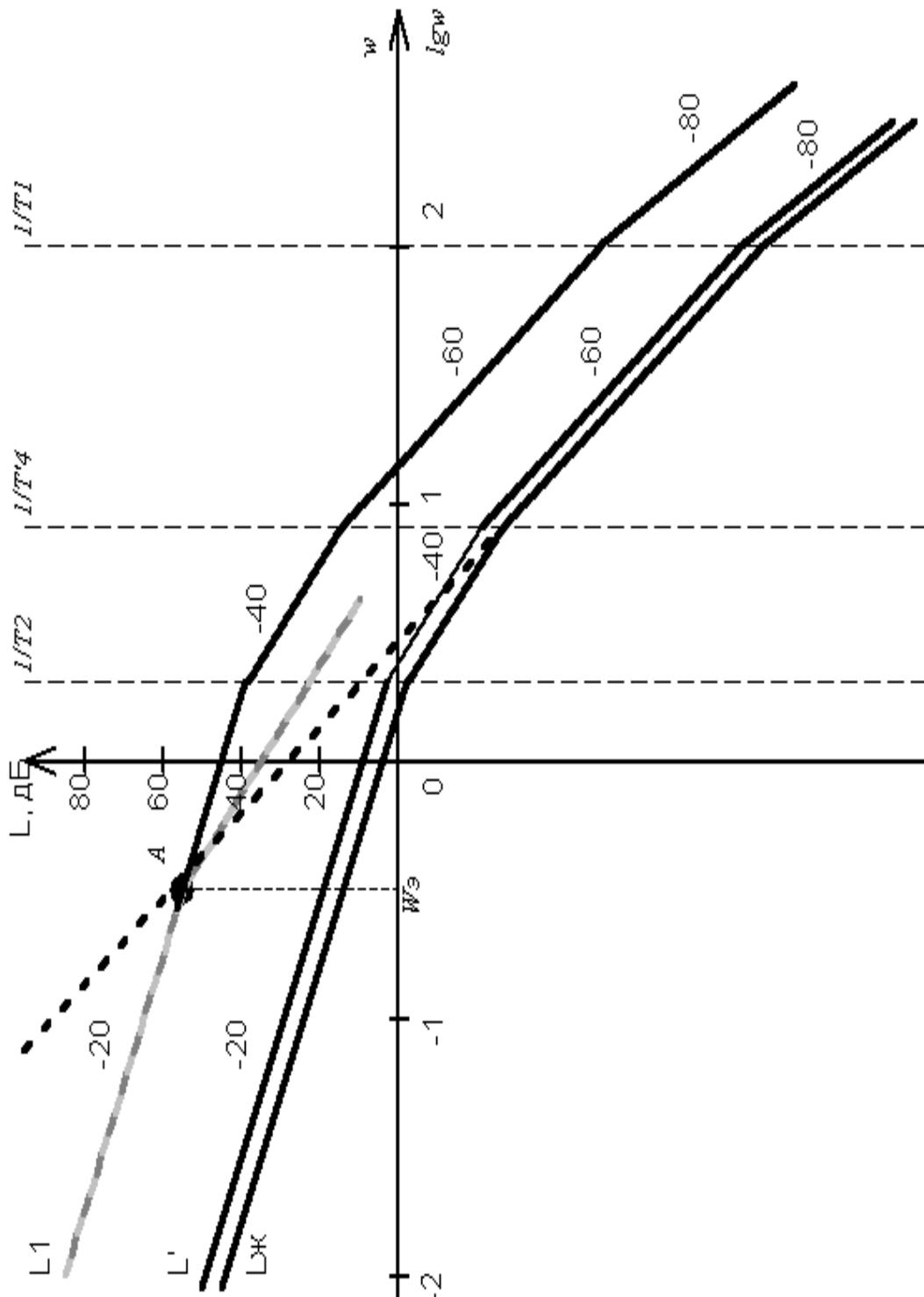


Рисунок 24 - Построение ЛАЧХ желаемой системы

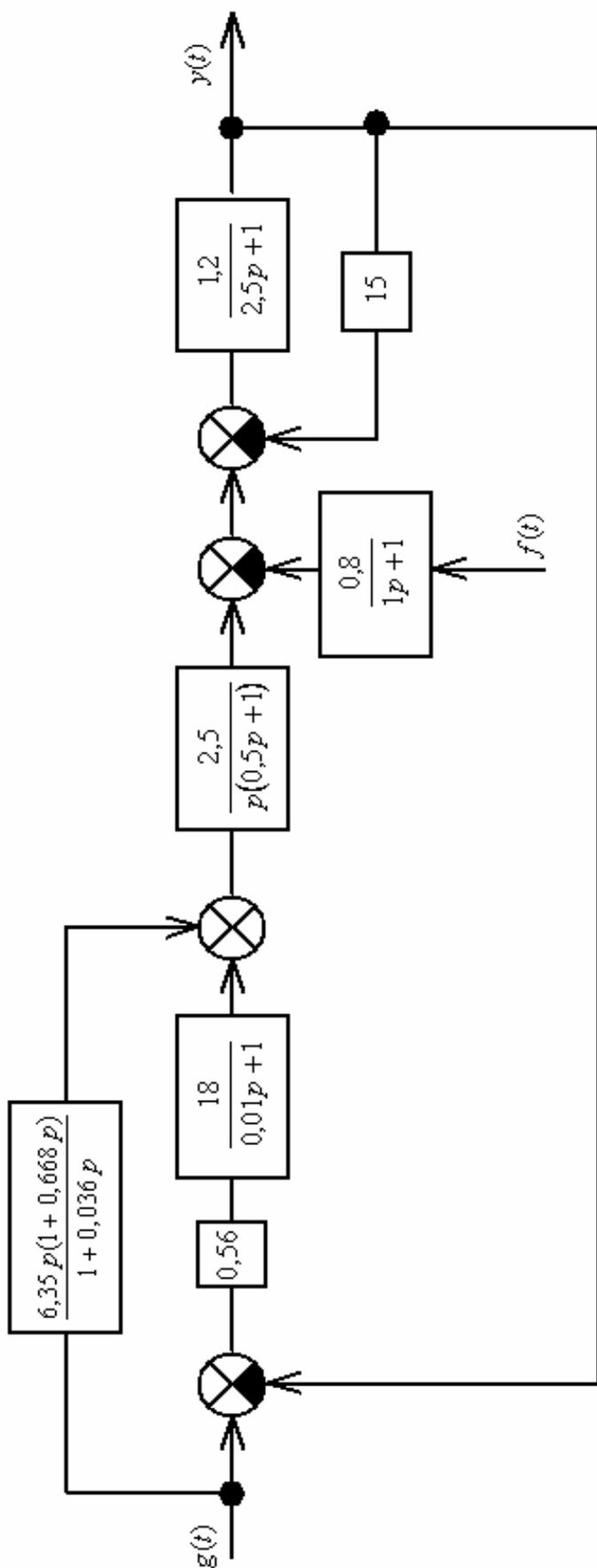


Рисунок 25 - Структура скорректированной системы с параметрами

$$a_2 = \frac{T_2 + T_{II} + T_4'}{k_2 k_4'} = \frac{0,5 + 0,132 + 0,036}{0,063 \cdot 2,5} = 4,24.$$

Таким образом, передаточная функция компенсирующей цепи имеет вид

$$W_K(p) = \frac{6,35p + 4,24p^2}{1 + 0,036p} = \frac{6,35p(1 + 0,668p)}{1 + 0,036p} = \frac{a_1p + a_2p^2}{1 + T_n p}.$$

Т.к. коэффициенты усиления скорректированной системы и эквивалентной не совпадают, то необходимо ввести дополнительный согласующий усилитель:

$$k_{\text{дон}} = \frac{k_{\text{с.жс.}}}{k'_{\text{сис}}} = \frac{1,6}{2,835} = 0,56.$$

Конечная структура системы с параметрами показана на рис. 25.

3.2.6 Реализация компенсирующей цепи

Передаточная функция компенсирующей цепи:

$$W_K(p) = \frac{6,35p(1 + 0,668p)}{1 + 0,036p}. \quad (60)$$

Поскольку входной величиной в нашей системе является угол поворота командной оси, то для реализации передаточной функции (60) будем использовать тахогенератор и инерционно-форсирующий RC-контур. Схема данной цепи имеет вид

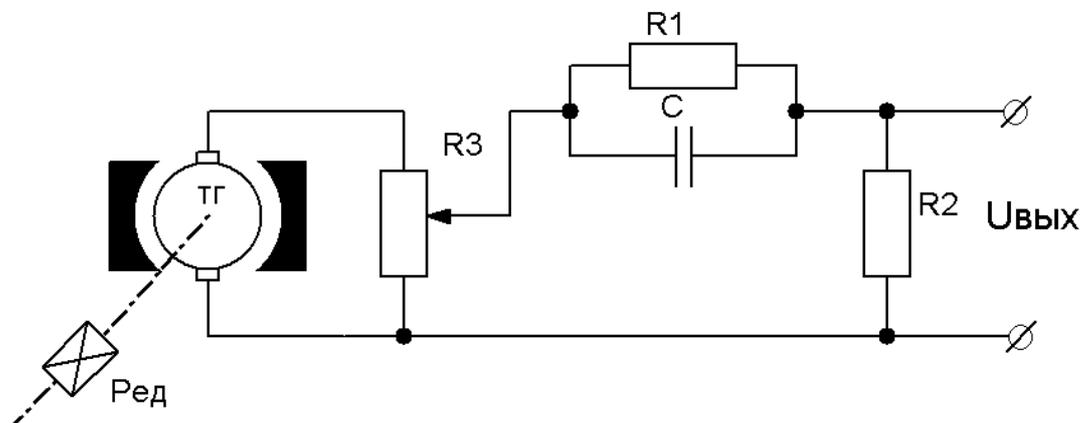


Рисунок 26 - Реализация компенсирующей цепи

Тахогенератор соединяется с командной осью через повышающий редуктор, передаточное отношение которого i_p выбирается из условия согласования скоростей или из условия допустимого момента нагрузки на командную ось.

Передаточные функции:

редуктора $W_p(p) = k_p$;

тахогенератора $W_{ТГ}(p) = k_{ТГ} p$, где $k_{ТГ}$ - коэффициент передачи;

RC-контура – $W_{RC}(p) = k_{RC} \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$, где $k_{RC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $T_1 = R_1 C$, $T_2 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$.

Из выражения (60): $k_{ТГ} k_p k_{RC} = 6,35$; $T_1 = 0,668c$; $T_2 = 0,036c$.

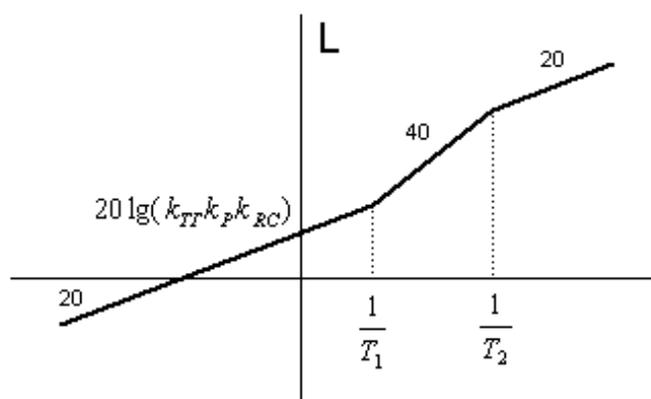


Рисунок 27 – ЛАЧХ компенсирующей цепи

Определим возможное передаточное число редуктора, считая номинальную частоту вращения тахогенератора $n_{ТГ.ном.} = 2000 об / мин$:

$$k_p = i_p \leq \frac{W_{ТГ.ном.}}{\omega_{max}} = \frac{2000 \cdot 360}{60 \cdot 100} = 120.$$

Примем $k_p = 100$.

Зададимся величиной емкости $C = 1 мкФ$ и определим

$$R_1 = \frac{T_1}{C} = \frac{0,668}{10^{-6}} = 668 кОм.$$

Вычислим величину сопротивления R_2 :

$$R_2 = \frac{R_1 T_2}{R_1 C - T_2} = \frac{668 \cdot 0,036}{0,668 - 0,036} = 38,05 \text{ кОм.}$$

Коэффициент передачи RC-контура:

$$k_{RC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{38,05}{706,05} = 0,054.$$

Найдем требуемый коэффициент передачи тахогенератора:

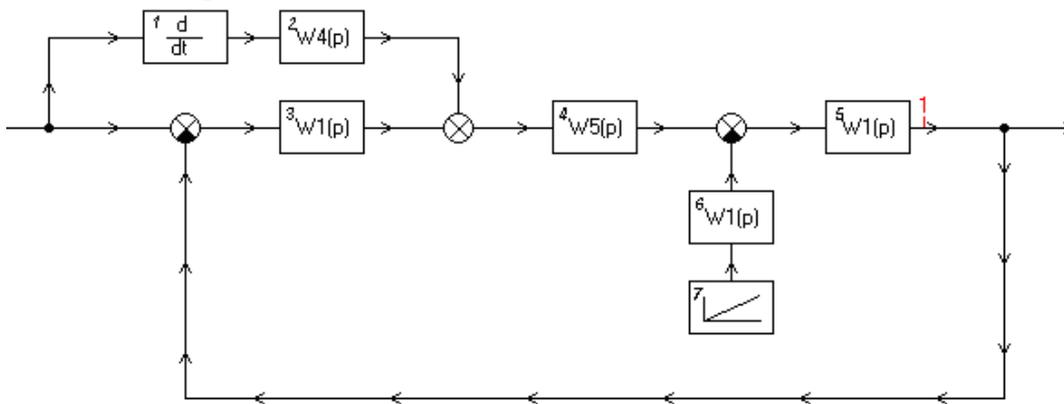
$$k_{TG} = \frac{6,35}{k_p k_{RC}} = \frac{6,35}{100 \cdot 0,054} = 1,176 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{град}.$$

Настройка этого коэффициента осуществляется потенциометром R_3 .

3.2.7 Моделирование системы

Моделирование системы проводилось при помощи программы SamSim111 и математического пакета Maple 7.

Структура и параметры системы при моделировании в программе SamSim111 представлены на рис. 28.



<p>1 <u>Дифференцирующее звено</u></p> <p>Пост. дифференцирования, Td: <input type="text" value="6,35"/></p> <p>$W(p) = T \cdot p$</p>	<p>2 <u>Интегро-дифференцирующее звено</u></p> <p>Коэффициент передачи, k: <input type="text" value="1"/></p> <p>Постоянная времени, Td: <input type="text" value="0,668"/></p> <p>Постоянная времени, Ti: <input type="text" value="0,036"/></p> <p>$W(p) = k \frac{T_d p + 1}{T_i p + 1}$</p>
---	--

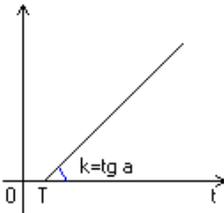
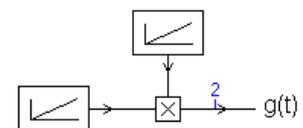
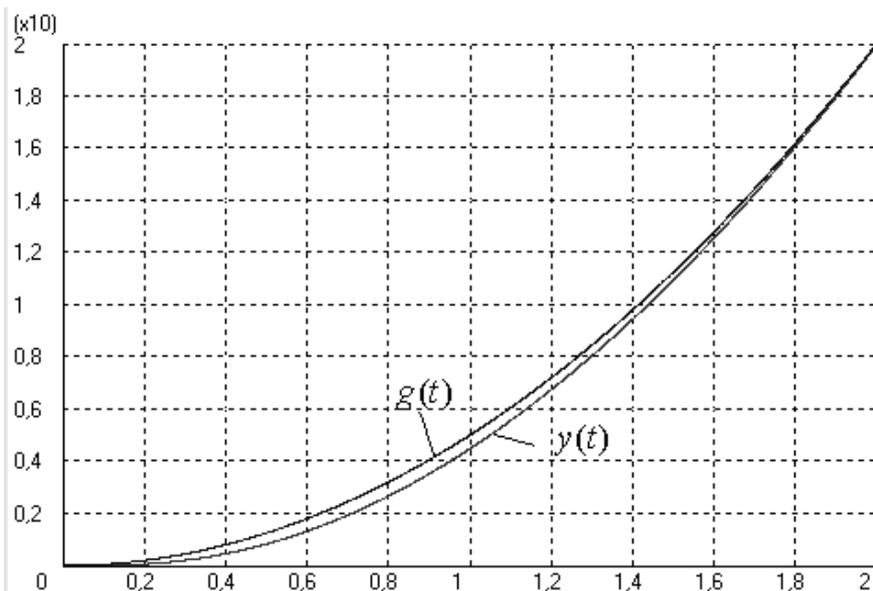
<p>3 <u>Апериодическое (инерционное) звено 1-го порядка</u></p> <p>Коэффициент передачи, k : <input type="text" value="10,08"/></p> <p>Постоянная времени, T : <input type="text" value="0,01"/></p> <p>Начальное значение, y(0) : <input type="text" value="0"/></p> $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$	<p>4 <u>Реальное интегрирующее звено</u></p> <p>Коэффициент передачи, k : <input type="text" value="2,5"/></p> <p>Постоянная времени, T : <input type="text" value="0,5"/></p> <p>Начальное значение, y(0) : <input type="text" value="0"/></p> $W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$
<p>5 <u>Апериодическое (инерционное) звено 1-го порядка</u></p> <p>Коэффициент передачи, k : <input type="text" value="0,063"/></p> <p>Постоянная времени, T : <input type="text" value="0,132"/></p> <p>Начальное значение, y(0) : <input type="text" value="0"/></p> $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$	<p>6 <u>Апериодическое (инерционное) звено 1-го порядка</u></p> <p>Коэффициент передачи, k : <input type="text" value="0,8"/></p> <p>Постоянная времени, T : <input type="text" value="1"/></p> <p>Начальное значение, y(0) : <input type="text" value="0"/></p> $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$
<p>7 <u>Линейный нарастающий сигнал</u></p> <p>Наклон, k : <input type="text" value="5"/></p> <p>Задержка, T, с : <input type="text" value="0"/></p> <p>$f(t) = 5t$ - возмущение</p> 	

Рисунок 28 – Структура и параметры моделируемой системы

1. Моделирование системы при входном сигнале с постоянным ускорением $g(t) = 5t \cdot t = 5t^2$, $\dot{g}(t) = 10gt / c^2$.

Данный сигнал реализован в программе SamSim111 подачей двух линейно нарастающих сигналов на блок умножения (рис. 29 б).

Поскольку производные от входного сигнала порядка выше второго равны нулю, а ошибки по скорости и ускорению входного сигнала скомпенсированы, то общая ошибка в системе будет определяться только действием возмущения.



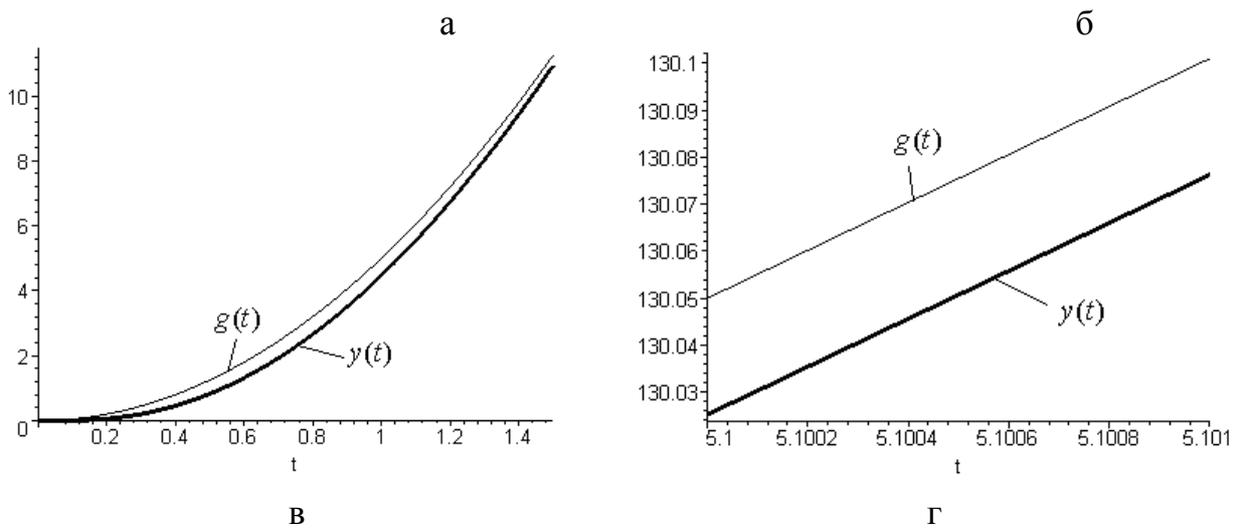


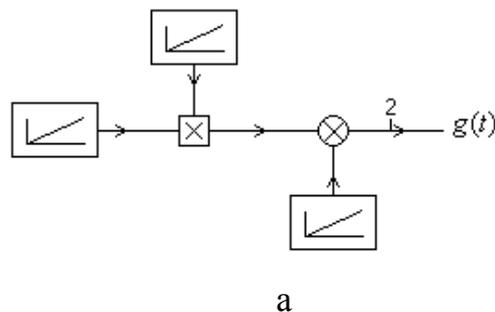
Рисунок 29– Моделирование при $g(t) = 5t \cdot t = 5t^2$

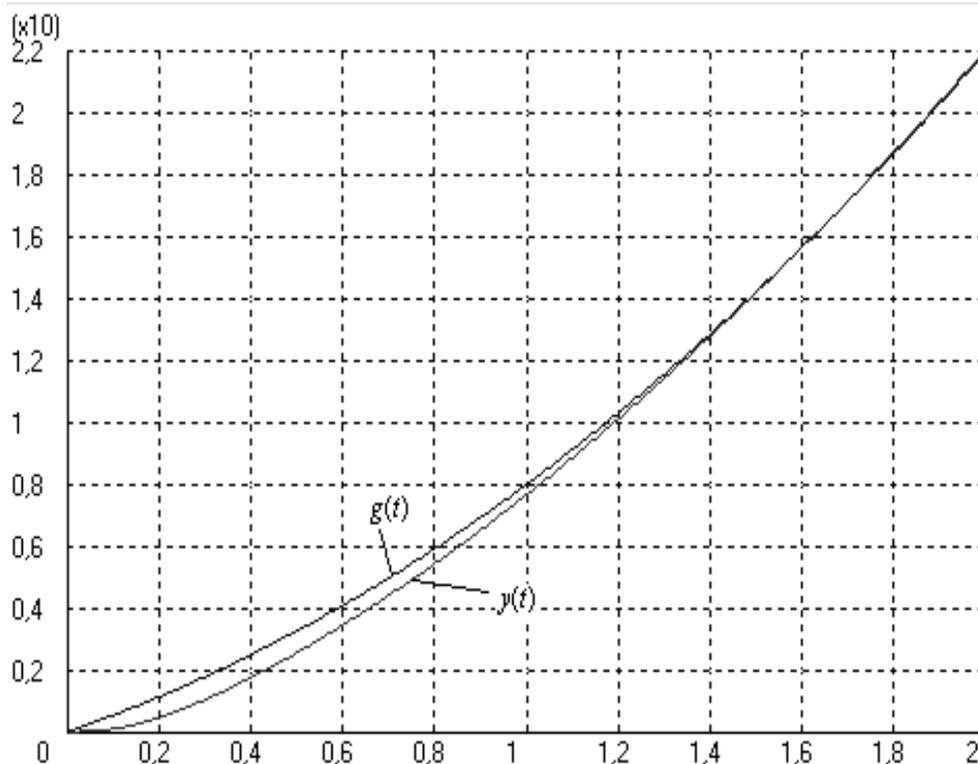
На рис. 29 приведены входные и выходные характеристики системы при различных диапазонах времени наблюдения. Из рис. (29, а) видно, что вначале наблюдается отклонение выходной характеристики от входной, но приблизительно при $t=2c$ оба графика почти совпадают. По рис. (29, г), полученному в системе Maple 7, заметно, что в установившемся режиме ($t \approx 5c$) присутствует небольшая ошибка ($e \approx 0,025$), не превышающая допустимого значения и обусловленная действием возмущения в системе.

Т.е. теоретические выводы подтверждаются при моделировании системы.

2. Моделирование при входном сигнале $g(t) = t \cdot 3t + 5t = 3t^2 + 5t$, реализованном в программе SamSim111 подачей двух линейно нарастающих сигналов на блок умножения, затем подачей получившегося сигнала и еще одного линейно нарастающего сигнала на сумматор.

Поскольку данный сигнал имеет также постоянное ускорение $\ddot{g}(t) = 6g/c^2$ и постоянную ненулевую составляющую скорости $\dot{g}(0) = 5g/c$, то выходные характеристики системы и выводы аналогичны предыдущему случаю.





б

Рисунок 30 – Моделирование при $g(t) = 3t^2 + 5t$.

3. Моделирование при входном сигнале $g(t) = 1t \cdot 1t \cdot 1t = t^3$.

Для данного сигнала $\dot{g}(t) = 3t^2$, $\ddot{g}(t) = 6t$, $\overset{\circ}{g}(t) = 6$.

Т.к. третья производная от задающего воздействия не равна нулю и по этой производной не обеспечена инвариантность в системе, то в системе появится составляющая ошибки от задающего воздействия, которая не должна превышать допустимого значения.

При таком задающем воздействии имеется небольшая ошибка в установившемся режиме ($e \approx 0,38$), которая состоит из составляющей ошибки по третьей производной от задающего воздействия и составляющей ошибки по возмущению. Поскольку эта ошибка не превышает максимального значения $e_{max} = 0,5$, то полученные при моделировании характеристики соответствуют теоретическим выводам.

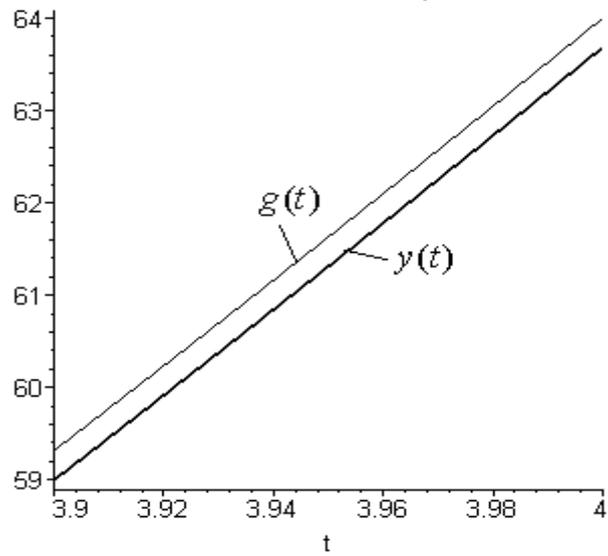
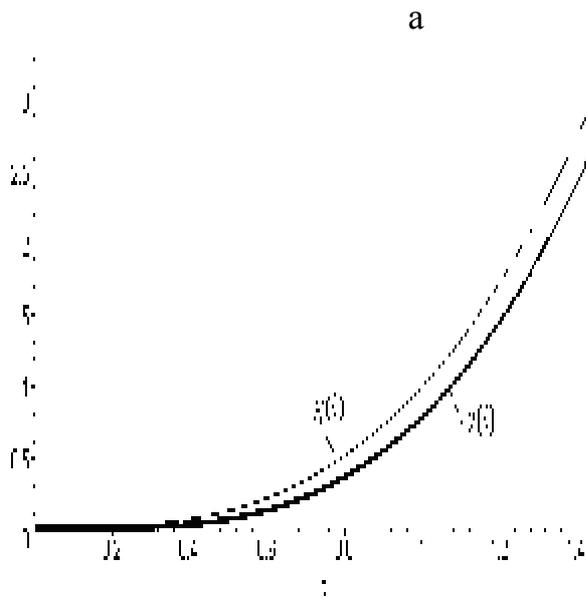
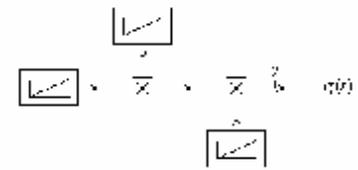
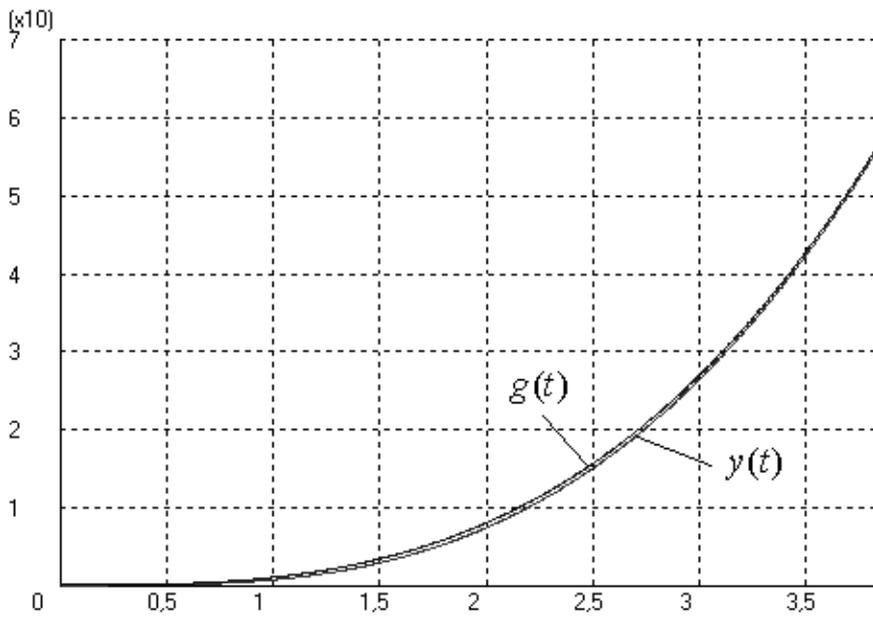
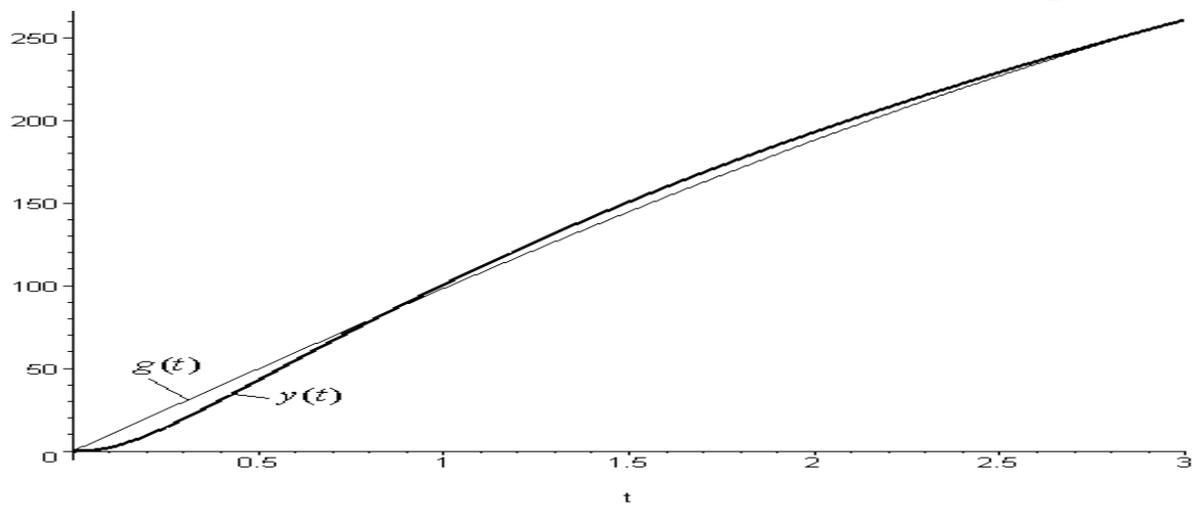
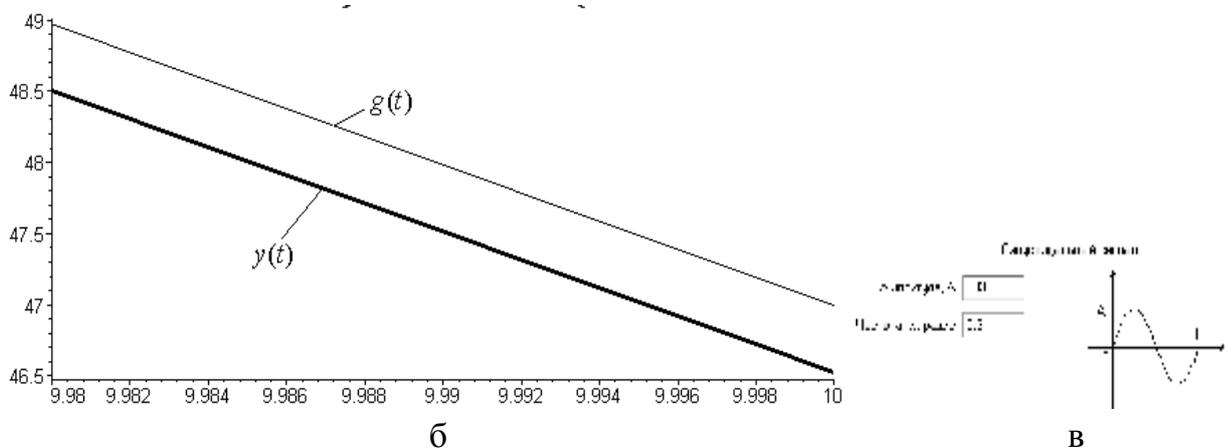
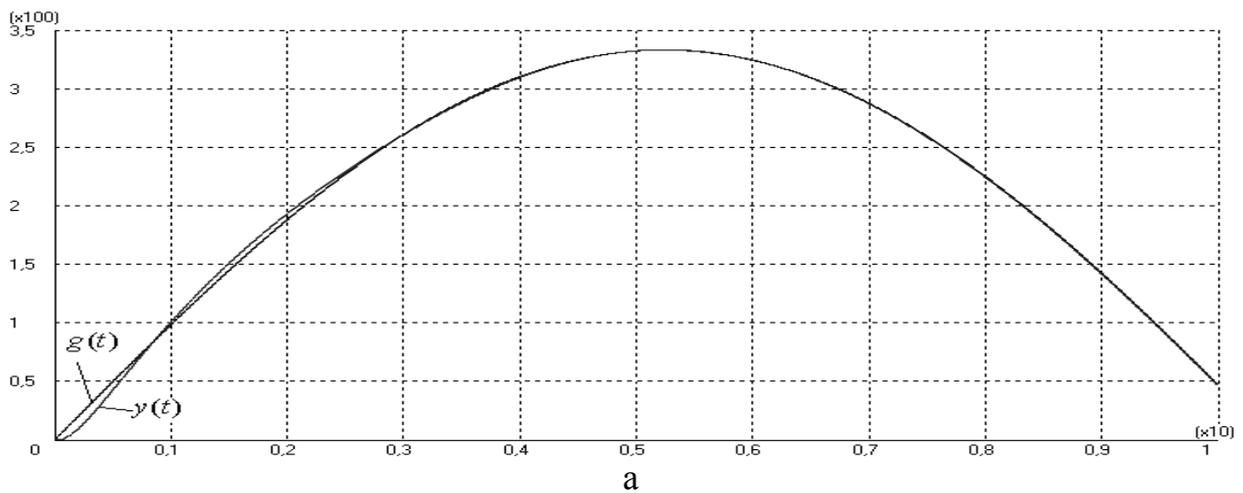


Рисунок 31 – Моделирование при $g(t) = t^3$.



Г

Рисунок 32 – Моделирование при $g_3(t) = 333,3 \sin(0,3t)$.

4. Моделирование при эквивалентном гармоническом сигнале на входе системы $g_3(t) = A_3 \sin(\omega_3 t) = 333,3 \sin(0,3t)$.

В этом случае все производные от входного сигнала не равны нулю. По производным первого и второго порядков обеспечена инвариантность, но высшие производные и возмущение будут вносить вклад в общую ошибку в системе, которая не должна превышать максимального значения.

Из рис. 32 а, г видно, что при $t \approx 3$ с наступает установившийся режим, входные и выходные графики почти совпадают.

На рис. (32 в) рассмотрен небольшой интервал времени в установившемся режиме ($t=9,98...10$ с). Видно, что общая ошибка не превышает максимально допустимого значения.

5. Проведем моделирование в системе SamSim111 эквивалентной системы с астатизмом третьего порядка, передаточная функция которой

$$W_3(p) = \frac{\frac{k_{с.жс.}}{(T_2 T_4' + T_2 T_{II} + T_4' T_{II})} \left(1 + (T_{II} + \frac{1}{k_{с.жс.}})p + \frac{T_2 + T_{II} + T_4'}{k_{с.жс.}} p^2 \right)}{\left(\frac{T_2 T_4' T_{II}}{(T_2 T_4' + T_2 T_{II} + T_4' T_{II})} p + 1 \right) p^3}$$

После подстановки числовых значений параметров получим

$$\frac{k_{с.жс.}}{(T_2 T_4' + T_2 T_{II} + T_4' T_{II})} = D_{\&} = 18; \quad T_{II} + \frac{1}{k_{с.жс.}} = 0,036 + 0,625 = 0,661;$$

$$\frac{T_2 + T_{II} + T_4'}{k_{с.жс.}} = \frac{0,668}{1,6} = 0,4175; \quad \frac{T_2 T_4' T_{II}}{(T_2 T_4' + T_2 T_{II} + T_4' T_{II})} = \frac{0,00238}{0,08875} = 0,0268;$$

$$W_3(p) = \frac{18(1 + 0,661p + 0,4175p^2)}{(0,0268p + 1)p^3} = \frac{18 + 11,989p + 7,515p^2}{0,0268p^4 + p}$$

Передаточная функция может быть реализована в программе SamSim111 с помощью элемента «Звено общего вида» с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{b_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Структура эквивалентной системы показана на рис. 33.

Характеристики, полученные при использовании такого звена, приведены на рис. 34 – 37. Видно, что эти характеристики почти совпадают с полученными при

структуре системы, показанной на рис. 33. Это подтверждает, что данные системы эквивалентны.



$$W(p) = \frac{18 + 11,989p + 7,515p^2}{0,0268p^4 + p}$$

Рисунок 33 – Структура эквивалентной системы

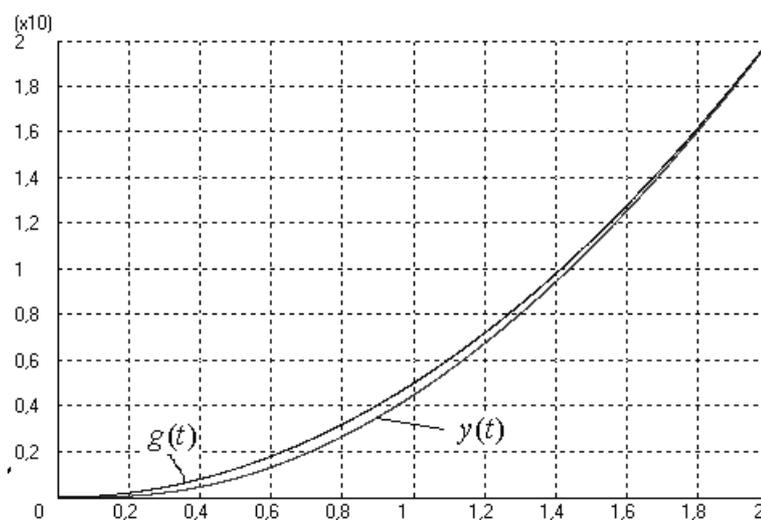


Рисунок 34 – Моделирование эквивалентной системы при входном сигнале

$$g(t) = 5t^2$$

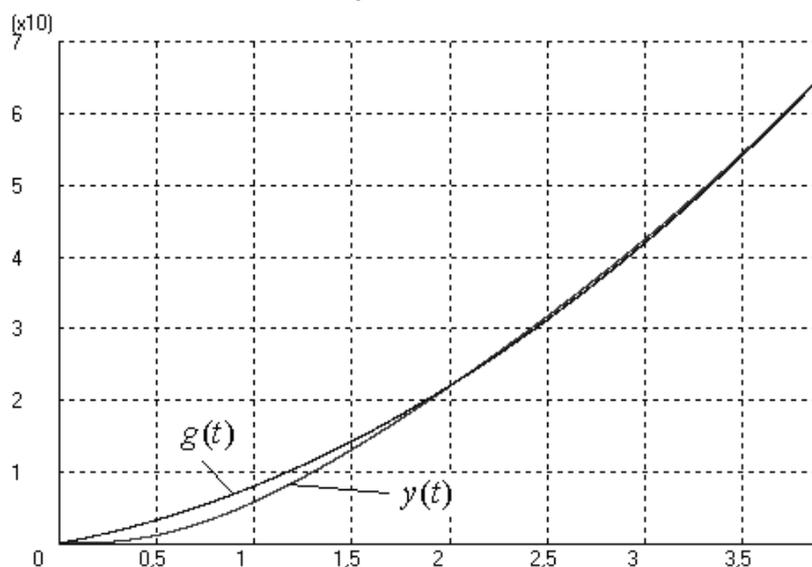


Рисунок 35 – Моделирование эквивалентной системы при входном сигнале

$$g(t) = 3t^2 + 5t$$

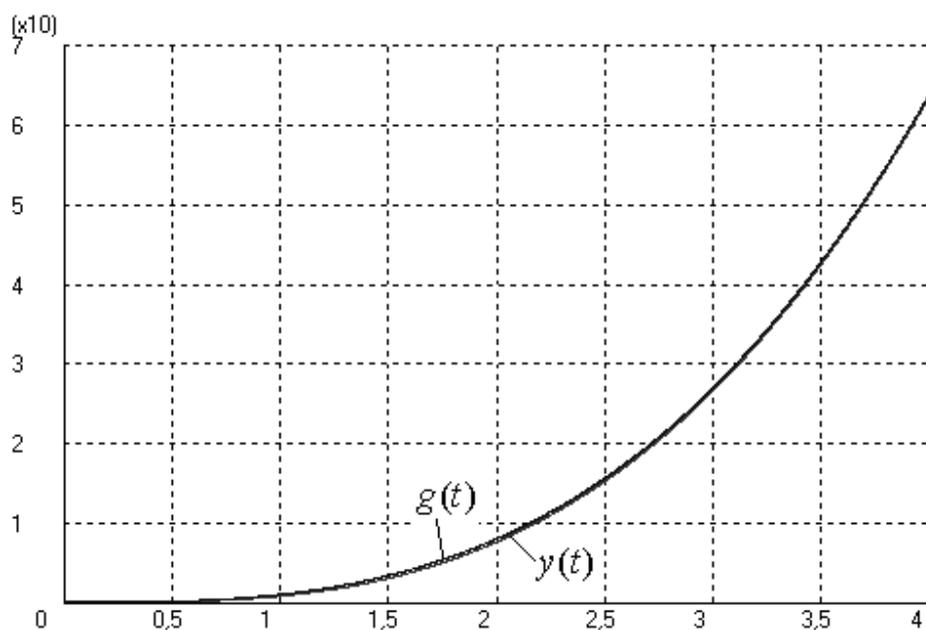


Рисунок 36 – Моделирование эквивалентной системы при входном сигнале

$$g(t) = t^3$$

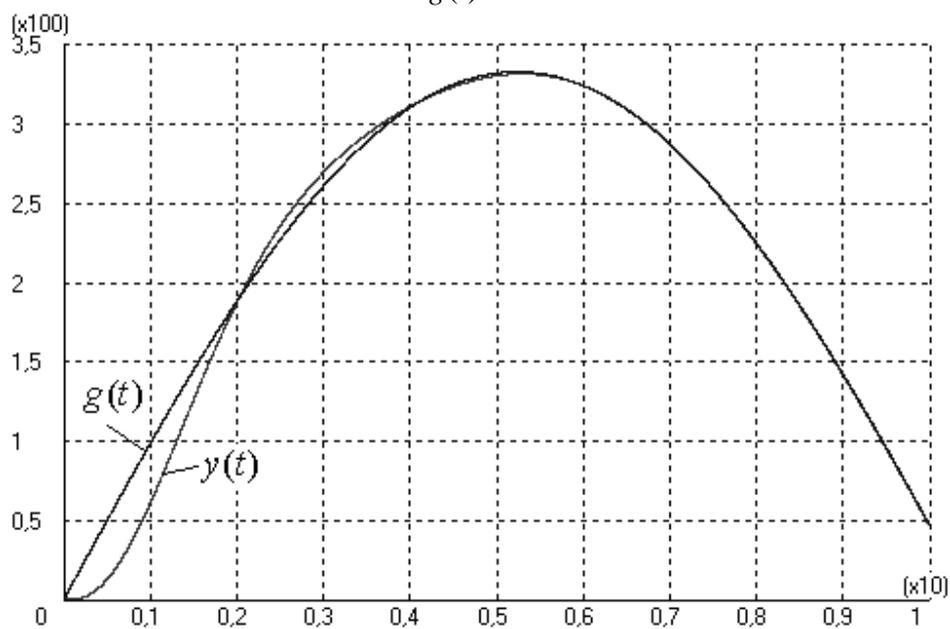


Рисунок 37 – Моделирование эквивалентной системы при входном сигнале

$$g(t) = 333,3 \sin(0,3t)$$

4 ТОЧНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для определения динамической точности необходимо выбрать способ количественного измерения динамической ошибки системы. Особенностью систем управления длительно функционирующих объектов является то, что их динамическая ошибка может считаться стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием. Поэтому наиболее простой и доступной для расчетов мерой (оценкой) отклонения такого процесса от его желаемого значения является его среднеквадратичное отклонение (дисперсия):

$$D_e = s_e^2 = \bar{e}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt, \quad (61)$$

где $e(t) = g(t) - y(t)$; $g(t)$ - заданное значение; $y(t)$ - выход системы.

Тогда расчет системы можно вести по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (СКО) s_e .

Оценка (61) дает хорошие результаты при регулировании величин, которые непосредственно определяют технико-экономические показатели работы ОУ, поскольку здесь важно, чтобы отклонение этих величин в среднем было небольшим за относительно длительный промежуток времени, а кратковременные выбросы регулируемых величин можно не учитывать.

Однако при наличии ограничений на фазовые координаты ОУ (регулируемые величины не должны даже кратковременно выходить за пределы заданных границ, обусловленных технологическим процессом – иначе возможен брак продукции или авария) оценка (61) не может быть применена в явном виде.

Для оценки наибольших возможных выбросов регулируемых величин в качестве расчетного воздействия выбирают наиболее тяжелое возмущение из всех возможных реализаций входного (задающего) воздействия – ступенчатые воздействия наибольшей возможной величины, которые действуют на ОУ по нескольким входам одновременно. Реально ступенчатые возмущения возникают вследствие случайных резких изменений режима работы ОУ (например, при изменении нагрузки). Поэтому в качестве расчетного возмущения может быть выбрана стационарная случайная функция времени $I(t)$, меняющая скачком на максимально возможную величину ΔI свое значение в случайные моменты времени (рис. 38).

Интервал между соседними скачками должен всегда превышать длительность переходных процессов в системе. Корреляционная функция такого случайного процесса имеет вид [2, 4, 6, 18]

$$R_{II}(t) = S_I^2 \cdot e^{-\frac{|t|}{t_0}}, \quad (62)$$

где S_I^2 - дисперсия случайного процесса $I(t)$;

t_0 - средняя длительность интервала между соседними скачками.

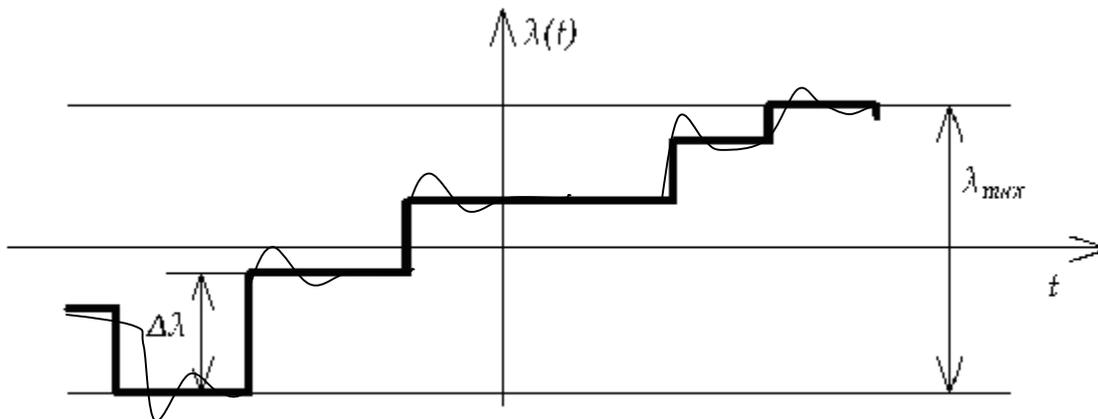


Рисунок 38 – Изменение случайной функции $\lambda(t)$

Таким образом, в качестве оценки динамической точности промышленных САУ может быть выбрана величина среднеквадратичного значения ошибки s_e при действии на входы ОУ возмущений, корреляционная функция которых определяется выражением типа (62).

Можно выделить два метода синтеза САУ по критерию динамической точности [11, 18]. Первый метод применяется при наличии полной априорной информации о статистических характеристиках воздействий (корреляционных функциях, спектральных плотностях, законах распределения и т.п.). Ставится задача определения оптимальной системы, которая обеспечивала бы получение теоретического минимума СКО при заданных вероятностных характеристиках полезного (задающего) сигнала и возмущений. Она будет решена, если найти передаточную функцию $W_{зам}(p)$ или импульсную переходную функцию (функцию веса $w(t)$) замкнутой оптимальной системы.

$$W_{зам}(p) = L\{w(t)\}.$$

Задача относится к классу вариационных задач оптимальной фильтрации и решается методами, разработанными Н. Винером и Р. Калманом [18]. Оптимальные системы, синтезированные по этому методу, называют *системами с предельной динамической точностью*.

Второй метод синтеза ориентирован на задание лишь некоторых сведений о характеристиках входных воздействий, например, о максимально возможных значениях входных воздействий и их первых двух производных. Сами же статистические характеристики воздействий могут быть неизвестны. Такая задача синтеза ставится так, чтобы при любых статистических характеристиках входных воздействий (с учетом ограничений g_{\max} и \dot{g}_{\max} и \ddot{g}_{\max}) система имела ошибки, максимальное (или среднеквадратичное) значение которых не превышало бы заданных значений. Системы управления, синтезированные по этому методу и из

условия простоты реализации $I = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} w^{2n} \cdot |W_e(jw)|^2 dw$, оцениваемой этим интегралом, называют *оптимальными системами с заданными качественными показателями*.

С точки зрения наилучшего воспроизведения полезного сигнала $g(t)$ система должна иметь возможно большую полосу пропускания, а с точки зрения наилучшего подавления помехи система, наоборот, должна иметь возможно меньшую полосу пропускания. Критерием получения оптимального решения является минимальное значение результирующей ошибки системы.

Расчет системы по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (СКО) при одновременном действии полезного сигнала и помехи

1. Системы с предельной динамической точностью.

Определение оптимальной $W_{зам}(jw)$, при которой обеспечивается теоретический минимум СКО.

Рассмотрим случай, когда полезный сигнал $g(t)$ и помеха $f(t)$ представляют собой стационарные случайные процессы, приложенные на входе системы.

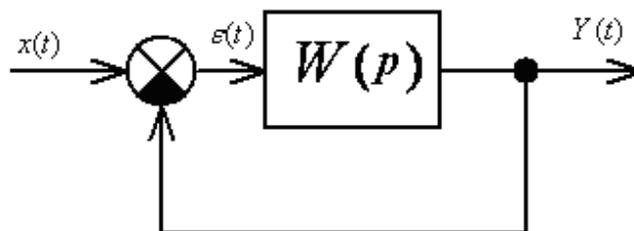


Рисунок 39 – Эквивалентная структура

$$x(t) = g(t) + f(t).$$

Перед системой ставится задача преобразовать входной сигнал $g(t)$ так, чтобы на выходе воспроизводилась величина $Y(t)$, связанная с $g(t)$ некоторой формулой преобразования

$$L\{Y(t)\} = K(p) \cdot L\{g(t)\},$$

где $K(p)$ - преобразующий оператор. Если $K(p) = \frac{1}{p}$ - задача интегрирования входного сигнала $g(t)$, $K(p) = p$ - задача дифференцирования, $K(p) = 1$ - задача воспроизведения $g(t)$ со сглаживанием помехи – т.е. обычная следящая система при наличии помех; при $K(p) = e^{pt}$ - статистическое упреждение.

Ошибка следящей системы:

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Выходная величина системы:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t) \cdot w(t) dt,$$

где $x(t) = g(t) + f(t)$,

$w(t)$ - весовая функция замкнутой системы.

Среднеквадратичная ошибка (формула 61):

$$\bar{e}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[g(t) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t) \cdot w(t) dt \right]^2 dt.$$

Задача заключается в том, чтобы найти частотную функцию замкнутой системы, связанную с функцией веса преобразованием Фурье

$$W_{зам}(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

таким образом, чтобы минимизировать \bar{e}^2 .

Введем корреляционные функции

$$R_Y(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t+t) \cdot y(t) dt;$$

$$R_X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+t) \cdot x(t) dt ;$$

$$R_{yx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t+t) \cdot x(t) dt = R_{yg}(t) + R_{yf}(t).$$

Этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности $S_y(w)$, $S_x(w)$, $S_f(w)$, $S_g(w)$, $S_{yg}(w)$, $S_{gf}(w)$, $S_{fg}(w)$ и $S_{yf}(w)$.

$$R_Y(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y^2(t) dt.$$

Выражение для СКО можно преобразовать к виду

$$\bar{e}^2 = R_y(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(l) \cdot R_{yx}(l) dl + \int_{-\infty}^{\infty} w(l) \cdot dl \int_{-\infty}^{\infty} w(n) \cdot R_x(l-n) dn ,$$

где l, n - вспомогательные переменные.

Так как в реальных системах $w(t) = 0$ при $t < 0$, то нижние пределы интегрирования заменим на нуль и получим

$$\bar{e}^2 = R_y(0) - 2 \int_0^{\infty} w(l) \cdot R_{yx}(l) dl + \int_0^{\infty} w(l) \cdot dl \int_0^{\infty} w(n) \cdot R_x(l-n) dn .$$

Из этого выражения следует, что оптимальная весовая функция, соответствующая минимуму СКО, определяется только видом корреляционной функции полезного сигнала и помехи и она должна быть решением интегрального уравнения Винера-Хопфа

$$R_{yx}(t) - \int_0^{\infty} R_x(t-l) \cdot w(l) dl = 0 \quad t \geq 0. \quad (63)$$

Оптимальная частотная функция замкнутой системы, являющаяся решением уравнения (63), может быть представлена в виде

$$W_{зам}(jw) = \frac{1}{2p \cdot \Psi(jw)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-jw t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{yx}(w)}{\Psi^*(jw)} \cdot e^{jw t} dw, \quad (63.1)$$

где $\Psi(jw) \cdot \Psi^*(jw) = |\Psi(jw)|^2 = S_x(w)$

$$S_x(w) = S_g(w) + S_f(w) + S_{gf}(w) + S_{fg}(w);$$

$$S_{yx}(w) = S_{gx}(w) = S_g(w) + S_{gf}(w).$$

Выражение $W_{зам}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}$, где

$$\frac{S_{yx}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{\omega - h_i} + \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{\omega + a_i} + \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{\omega + g_i};$$

h_i - полюсы спектральной плотности $S_{gx}(\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости; $(-a_i)$ - полюсы $S_{gx}(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости (простые); g_i - нули $\Psi^*(j\omega)$, тогда

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{\omega - h_i}.$$

Минимум СКО определяется выражением [11. 18]

$$\bar{e}_{\min}^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (S_g(\omega) - |W_{зам}(j\omega)|^2 \cdot S_x(\omega)) d\omega \text{ или } \bar{e}_{\min}^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (S_g(\omega) - |B(j\omega)|^2) d\omega.$$

Рассмотрим пример

Сигнал на входе системы $x(t) = g(t) + f(t)$ имеет спектральные плотности

$$S_g(\omega) = \frac{2aD}{\omega^2 + a^2}; S_f(\omega) = N = const$$

и они некоррелированы, т.е. $S_{gf}(\omega) = S_{fg}(\omega) = 0$.

$$S_x(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \frac{2aD}{\omega^2 + a^2} + N = \frac{2aD + N(\omega^2 + a^2)}{\omega^2 + a^2} = \frac{2aD + N\omega^2 + Na^2}{\omega^2 + a^2}$$

или в другом виде

$$S_x(\omega) = A \frac{(1 + j\omega a)(1 - j\omega a)}{(a + j\omega)(a - j\omega)}, \text{ где } A = 2aD + Na^2; a = \frac{N}{2aD + Na^2} = \frac{N}{A},$$

$$\Psi(j\omega) \cdot \Psi^*(j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = S_x(\omega)$$

Тогда знаменатель искомой частотной функции (63.1)

$$\Psi(j\omega) = \sqrt{A} \cdot \frac{(1 + ja\omega)}{a + j\omega};$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{gx}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} &= \frac{S_g(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \frac{2aD}{\sqrt{A}(1 - ja\omega)(a + j\omega)} = \frac{2aD(a - j\omega)}{\sqrt{A}(\omega^2 + a^2)(1 - ja\omega)} = \\ &= \frac{2aD}{\sqrt{A}} \left[\frac{a}{1 + a_a} \cdot \frac{1}{1 - ja\omega} + \frac{1}{1 + a_a} \cdot \frac{1}{a + j\omega} \right] \end{aligned}$$

Отбросив первый член (неустойчивое звено – полюс в нижней полуплоскости), получим $B(j\omega) = \frac{2aD}{\sqrt{A}} \left[\frac{1}{1 + a_a} \cdot \frac{1}{a + j\omega} \right]$ и оптимальная частотная

функция замкнутой системы $W_{зам}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{2aD}{A(1 + a_a)} \cdot \frac{1}{1 + ja\omega} = k \cdot \frac{1}{1 + ja\omega}$,

ей соответствует оптимальная $W_{зам}(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, $T = a$, т.е. оптимальная САУ

соответствует апериодическому звену первого порядка, а $W_{раз}(p) = \frac{k}{p}$ - интегратору.

2. Оптимальные САУ с заданными качественными показателями.

Если известна структура системы и необходимо выбрать параметры этой системы, чтобы получить минимум СКО при заданных статистических характеристиках полезного сигнала $g(t)$ и помехи $f(t)$. Эта задача решается следующим образом. По спектральной плотности ошибки путем ее интегрирования находится дисперсия, которая зависит от вероятностных характеристик полезного сигнала, помехи и параметров системы. Затем ищутся условия, которые должны быть наложены на параметры системы, чтобы получить минимум дисперсии. При достаточно простом выражении для дисперсии это может быть определено приравниванием частных производных нулю.

Рассмотрим пример.

Фотоэлектрическая система слежения за движущейся целью имеет следующую структуру:

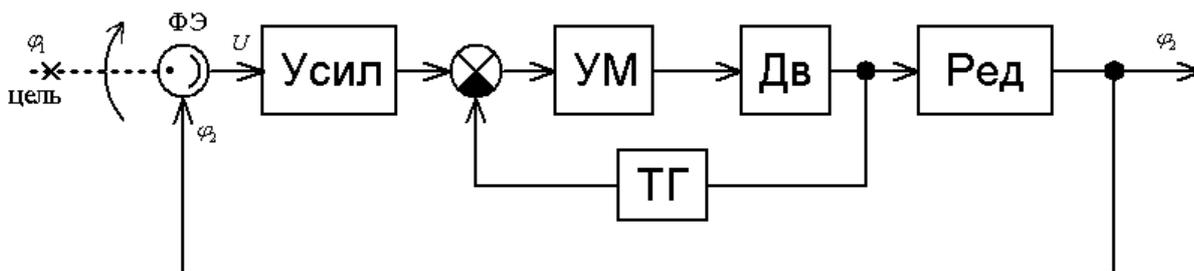


Рисунок 40 – Фотоэлектрическая следящая система

В случае отклонения цели от линии визирования на входе фотоэлемента возникает напряжение U , пропорциональное углу рассогласования $(j_1 - j_2)$. Это напряжение U после усиления узкополосным усилителем поступает на привод (интегрирующий), содержащий усилитель мощности, двигатель и тахогенератор. Привод через редуктор разворачивает визир с ФЭ до совпадения с направлением на цель. Обозначим изменение (угловое) положения цели j_1 , а угол поворота ФЭ вместе с визирным устройством j_2 , т.о., ошибка слежения $\Delta j = e(t) = j_1 - j_2$.

Цель движется по случайному закону, соответствующему графику (рис. 41).

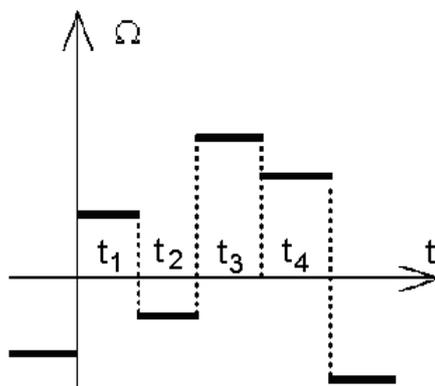


Рисунок 41 – Закон изменения скорости

Среднеквадратичное значение угловой скорости движения цели $\Omega_{ск} = \sqrt{D_\Omega} = 2 \text{ grad} / \text{сек}$, где D_Ω - дисперсия, а среднее время движения по прямой

$t_0 = \frac{\sum t_i}{n} = 5 \text{ сек}$. Спектральная плотность такого процесса, записанная для входной угловой скорости $\Omega(t)$, имеет вид

$$S_\Omega(\omega) = \frac{2t_0 D_\Omega}{1 + t_0^2 \omega^2}$$

В качестве помехи рассмотрим «шумовое» напряжение ФЭ.

Пусть среднеквадратичное значение шумового напряжения на выходе ФЭ составляет $U_{скв} = 0,1В$ в полосе частот $\Delta f = 500Гц$. Полоса шума симметрична относительно несущей частоты сигнала f_0 , и в этой полосе спектр шума является белым.

Корреляция между полезным сигналом и шумом отсутствует.

Составим структурную схему системы.

1. ФЭ является безынерционным элементом, и его $W_1(s) = k_1$, где $k_1 \left(\frac{В}{рад} \right)$ - коэффициент передачи вместе с визиром. $k_1 = 10 \frac{мВ}{угл.мин} = 34,4 \frac{В}{рад}$.

2. Узкополосный усилитель – инерционное звено $W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_y p}$, k_2 - коэффициент усиления по напряжению, $T_y = \frac{2}{\omega_n}$ - постоянная времени, определяемая полосой пропускания ω_n , $T_y = 0,1сек$.

3. Тахометрический привод при глубокой ОС по частоте вращения двигателя (напряжению ТГ), передаточная функция близка к $W(s)$ идеально интегрирующего звена

$W_3(s) = \frac{k_3}{s}$, где $k_3 \approx \frac{1}{k_{ТГ}} \left(\frac{рад}{В/с} \right)$ - постоянная привода; $k_{ТГ} \left(\frac{В}{с} \right)$ - крутизна характеристики ТГ. $k_{ТГ} = 0,048 \left(\frac{В}{рад \cdot с} \right)$; $k_3 = \frac{1}{0,048} = 210 \left(\frac{рад \cdot с}{В} \right)$.

4. Редуктор – безынерционное звено.

$W_4(s) = k_4 = \frac{1}{i}$; k_4 - коэффициент передачи редуктора, i - передаточное отношение; $i = 6000$; $k_4 = \frac{1}{6000}$.

Следовательно, структурная схема системы имеет вид

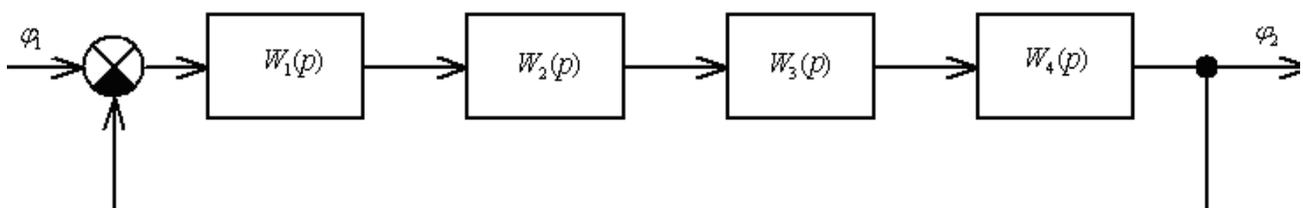


Рисунок 42 – Структурная схема исходная

Передаточная функция системы, разомкнутой по ГОС,

$$W_{раз}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p) = \frac{k}{p(1+T_y p)},$$

где $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 = D_V(1/c)$ - добротность по скорости.

Требуется определить оптимальное значение добротности по скорости и требуемый коэффициент k_2 по минимуму СКО.

Для удобства расчета перенесем помеху на вход системы, т.е. вход ФЭ.

$$\text{Помеха на входе } j_n = \frac{U_{ске}}{k_1} = \frac{0,1}{34,4} = 0,0029 \text{ рад} = 0,167^\circ.$$

Спектральная плотность белого шума – помехи на входе – постоянная величина.

$$S_f(w) = N = \frac{j_n^2}{\Delta f} = \frac{0,167^2}{500} = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}.$$

Принимаем спектральную плотность полезного сигнала, записанную для входной скорости и угла поворота визира:

$$S_\Omega(w) = \frac{2t_0 D_\Omega}{1+t_0^2 w^2} \rightarrow S_{j_1}(w) = \frac{2 \cdot t_0 \cdot D_\Omega}{w^2(1+t_0^2 w^2)},$$

$$j_1 = \int_0^t \Omega dt, \quad j_1(t) = g(t).$$

Эта спектральная плотность соответствует нестационарному случайному процессу, т.к. дисперсия угла стремится к бесконечности:

$$D_j = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(w) dw = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cdot t_0 \cdot D_\Omega}{w^2(1+t_0^2 w^2)} dw \rightarrow \infty.$$

Однако эту спектральную плотность можно использовать для нахождения ошибки следящей системы с астатизмом первого порядка.

Спектральная плотность ошибки:

$$S_{\Delta j}(w) = \frac{S_g(w)}{|1+W(jw)|^2} + \left| \frac{W(jw)}{1+W(jw)} \right|^2 \cdot S_f(w) = S'_g(w) + S''_f(w). \quad (64)$$

Первое слагаемое определяется полезным сигналом

$$S_g(w) \cdot W_{eg}(jw) = S'_g(w) = \frac{S_g(w)}{|1 + W(jw)|^2} = \frac{2 \cdot t_0 \cdot D_\Omega}{w^2(1 + t_0^2 w^2)} \cdot \left| \frac{T_y(jw)^2 + jw}{T_y(jw)^2 + jw + k} \right|^2.$$

Приведем его к виду, удобному для интегрирования:

$$S'_g(w) = \frac{2 \cdot t_0 \cdot D_\Omega (1 - T_y^2(jw)^2)}{\left| t_0 T_y(jw)^3 + (t_0 + T_y)(jw)^2 + (1 + kt_0)(jw) + k \right|^2}$$

и проинтегрируем по всем частотам:

$$D'_g = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S'_g(w) dw = 2t_0 D_\Omega I_3,$$

где I_3 - интеграл при $n = 3$, определяемый по формуле [4, 6]

$$I_3 = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)};$$

из выражения $S^1_g(w)$ определяем: $a_0 = t_0 T_y$; $a_2 = 1 + kt_0$ $b_0 = 0$; $b_1 = -T_y^2$;
 $a_1 = t_0 + T_y$; $a_3 = k$ $b_2 = 1$,

$$\text{тогда } I_3 = \frac{a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)} = \frac{b_1 - \frac{a_1 b_2}{a_3}}{2(a_0 a_3 - a_1 a_2)} = \frac{t_0 + T_y + k T_y^2}{2k(T_y + t_0 + kt_0^2)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (64). После подстановки $W(jw)$ и $S_f(w)$, получим

$$S''_f(w) = \frac{k^2 N}{\left| t_0(jw)^2 + jw + k \right|^2}.$$

Проинтегрируем эту составляющую по всем частотам:

$$D_f'' = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_f''(w) dw = k^2 N \cdot I_2,$$

где I_2 - интеграл при $n = 2$.

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1};$$

по выражению $S_{f(w)}''$ вычисляем: $a_0 = T_y$; $a_1 = 1$; $a_2 = k$; $b_0 = 0$; $b_1 = 1$.

$$\text{Тогда } I_2 = \frac{\frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1} = \frac{b_1}{2a_2 a_1} = \frac{1}{2k}.$$

Составляющая дисперсии ошибки, определяемой помехой:

$$D_f'' = k^2 N \cdot I_2 = \frac{kN}{2},$$

$\frac{k}{2} = \Delta f_{\text{э}}$ - эквивалентная полоса пропускания системой белого шума (помехи).

Дисперсия ошибки:

$$D_{\Delta j} = \frac{t_0 D_{\Omega}(t_0 + T_y + kT_y^2)}{k(t_0 + T_y + kt_0^2)} + \frac{kN}{2}.$$

Для получения оптимального значения добротности k необходимо исследовать это выражение на минимум.

При $t_0 \gg T_y$ формулу для $D_{\Delta j}$ можно упростить:

$$D_{\Delta j} \approx \frac{D_{\Omega}}{k^2} + \frac{kN}{2}.$$

Дифференцирование дает условие минимума

$$-\frac{2D_{\Omega}}{k^3} + \frac{N}{2} = 0 = -\frac{4D_{\Omega} + Nk^3}{2k^3} \text{ или } \frac{N}{2} = \frac{2D_{\Omega}}{k^3}.$$

Откуда оптимальное значение добротности

$$k = \sqrt[3]{\frac{4D_{\Omega}}{N}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 4}{5,6 \cdot 10^{-5}}} = 66 \left(\frac{1}{\text{сек}} \right).$$

Вычислим значение дисперсии ошибки:

$$D_{\Delta j} = \frac{5 \cdot 4(5 + 0,1 + 66 \cdot 0,1^2)}{66(5 + 0,1 + 66 \cdot 5^2)} + \frac{66 \cdot 5,6 \cdot 10^{-5}}{2} = 0,29 \cdot 10^{-2} (\text{град}^2).$$

Среднеквадратичная ошибка системы

$$\Delta j_{СКВ} = \sqrt{D_{\Delta j}} = \sqrt{0,29 \cdot 10^{-2}} = 0,054 (\text{град}) = 3,2 \text{ угл. мин.}$$

По приближенной формуле

$$D_{\Delta j} = \frac{4}{66^2} + \frac{66 \cdot 5,6 \cdot 10^{-5}}{2} = \frac{D_{\Omega}}{k^2} + \frac{kN}{2} = 0,00092 + 148,8 \cdot 10^{-5} = 240,8 \cdot 10^{-5} (\text{град}^2).$$

Среднеквадратичная ошибка системы при этом:

$$\Delta j_{СКВ} = \sqrt{D_{\Delta j}} = \sqrt{0,241 \cdot 10^{-2}} = 0,0491 (\text{град}) = 2,94 \text{ угл. мин.}$$

Следовательно, требуемое значение коэффициента усиления узкополосного усилителя

$$k_2 = \frac{k}{k_1 \cdot k_3 \cdot k_4} = \frac{66 \cdot 6000}{34,4 \cdot 210} = 55.$$

5 ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ И ТОЧНОСТИ САУ

Среди промышленных САУ широкое распространение получили релейные системы регулирования: двух- и трехпозиционные.

Двухпозиционные регуляторы не имеют параметров настройки и при наличии зоны неоднозначности, в системе при линейной части второго порядка и выше в системе всегда возникают устойчивые автоколебания. Амплитуда колебаний определяется зоной неоднозначности, и она тем выше, чем больше запаздывание объекта, поэтому двухпозиционные регуляторы рекомендуют, если $t_{об} / T_{об} \leq 0,2$. При использовании двухпозиционного регулятора РО занимает крайние положения «открыто-закрыто» или «включено-выключено». Если недопустим режим автоколебаний, то желательно устранить зону неоднозначности – т.е. сформировать идеальную релейную характеристику.

В этом случае, как показано в работе [17], при введении гибких ОС, охватывающих релейный элемент и часть инерционных звеньев, и подборе параметров ОС можно обеспечить скользкие режимы. Они обеспечиваются введением стабилизирующих ОС. При проектировании с использованием ЭВМ можно методом перебора выбрать оптимальный вариант КУ ОС по $h(t)$. При предельном скользком режиме контур эквивалентен звену, апериодическому 1-го порядка, а релейный элемент – усилителю с $k \rightarrow \infty$.

Из принципа максимума известно, что оптимальными по быстродействию являются именно релейные системы (с идеальной релейной характеристикой) с принудительным переключением реле. Функция переключения реле может быть определена при решении системы уравнений Гамильтона.

А.А. Фельдбаум доказал, что число переключений реле в оптимальной по быстродействию системе определяется порядком уравнения ОУ и корнями его характеристического уравнения при отсутствии ограничений на фазовые координаты. При нулевых и вещественных корнях число переключений $(n-1)$, где n - порядок уравнения ОУ и n интервалов знакопостоянства. При комплексных корнях число переключений может быть больше, тогда целесообразнее использовать квазиоптимальное управление – без смены знака управляющего устройства.

Для систем стабилизации функцию переключений реле формируют как функцию фазовых координат – вводя гибкие ОС.

$S(x_1, x_2)$ - функция переключения реле, должна быть нелинейной для обеспечения оптимального быстродействия и точности при различных начальных условиях.

$$S(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2k} \cdot x_2^2 \operatorname{sign} x_2 - x_1(t_k) = x_1 + \frac{1}{2k} \cdot x_2 |x_2| - x_1(t_k),$$

где x_1 - выходная координата ОУ, $x_2 = \dot{x}_1$ - скорость изменения выходной координаты; k - коэффициент передачи ОУ (линейной части).

Тогда оптимальную по быстродействию систему стабилизации можно представить следующей схемой:

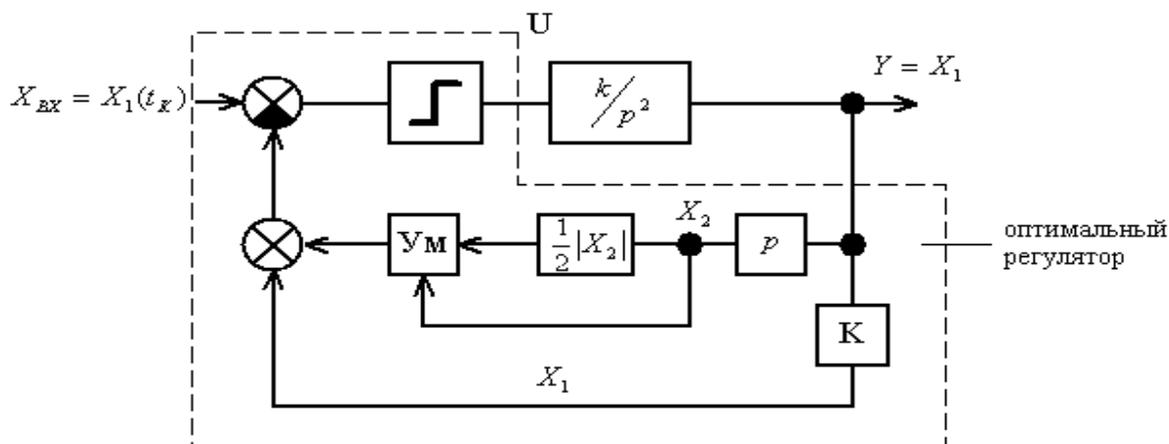


Рисунок 43 – Структурная схема оптимальной по быстродействию системы

Релейный элемент работает в импульсном режиме:

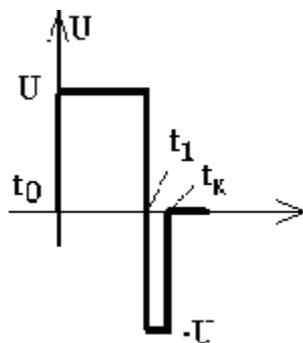


Рисунок 44 – Переключение реле

Для систем программного управления и следящих функцию переключения реле формируют как нелинейную функцию ошибки и ее производных.

$$S(e_1, e_2 \dots) = e_1 + \frac{\dot{e}_x}{k} \cdot |e_1| + \frac{1}{2k} \cdot e_2^2 \cdot \text{sign} e_2 = e_1 + \frac{\dot{e}_x}{k} \cdot |e_1| + \frac{1}{2k} \cdot e_2 |e_2|,$$

где $e_1 = x_{зад}(t) - y(t) = x_{зад}(t) - x_1(t)$ $e_2 = \dot{e}_1$.

Управляющее воздействие

$$U(t) = U(e_1, e_2) = \text{sign}[S(e_1, e_2)] = \begin{bmatrix} +U_{\max} & S > 0 \\ -U_{\max} & S < 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно функции переключения, структура оптимальной по быстродействию следящей системы для объекта с астатизмом 2-го порядка приведена на рис. 44.

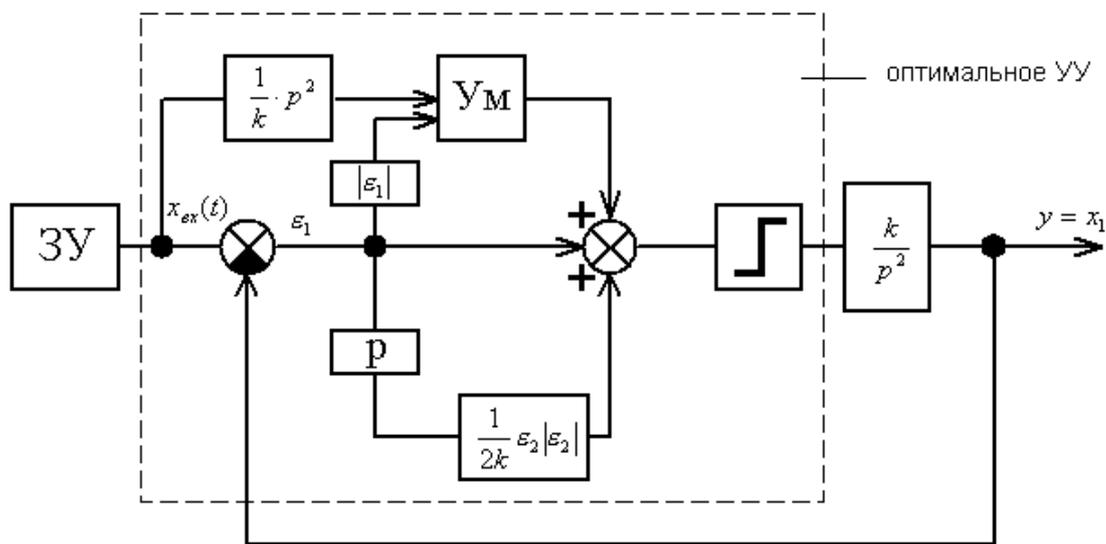


Рисунок 45 – Структура оптимальной системы с $S(\epsilon_1, \epsilon_2)$

При наличии ограничений на фазовые координаты – на скорость и ускорение изменения выходной координаты - используют трехпозиционные регуляторы. При этом релейно переключается ускорение. При использовании трехпозиционных регуляторов регулируемый орган перемещается в крайнее положение с постоянной скоростью. Если время разгона и торможения исполнительного двигателя, а также срабатывания и отпускания реле много меньше времени перемещения РО на полный диапазон, то уравнение идеального регулятора можно записать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{T_c} \text{signe } n \text{ пу } |e| > a.$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 \text{ пу } |e| < a, \text{ где } 2a - \text{зона нечувствительности.}$$

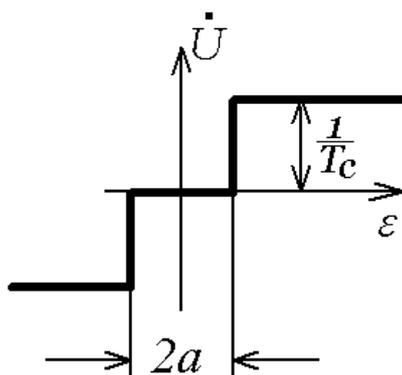


Рисунок 46 – Статическая характеристика 3- позиционного регулятора

$\frac{1}{T_c}$ - скорость перестановки РО и $2a$ - зона нечувствительности являются параметрами настройки трехпозиционного регулятора (Рс).

$\frac{1}{T_c}$ меняется ступенчато и определяется выбором ИМ и редуктора.

$$T_c = \frac{T_{ИМ} \cdot b}{2p \cdot i},$$

где $T_{ИМ}$ - время оборота выходного вала ИМ;

i - коэффициент передачи редуктора;

b - угол поворота выходного вала ИМ, определяемый положением конечных выключателей.

Если время перемещения РО в крайнее положение много меньше постоянной времени ОУ ($T_{ОУ}$), то Рс регулятор переходит в режим работы двухпозиционного регулятора.

Для синтеза оптимального регулятора, обеспечивающего высокое быстродействие и точность, могут использоваться различные методы. Наиболее широко используются метод фазовых траекторий, который для ОУ высокого порядка используется в сочетании с ЭВМ, и метод математического программирования.

Задача синтеза оптимального регулятора методом фазовых траекторий в основном сводится к определению аналитического выражения функции переключения $S(x)$ или $S(e)$ и достаточно просто решается для линейных ОУ второго и третьего порядка без учета возмущений. Вместо функций переключения $S(x)$ и $S(e)$ можно находить функцию переключения $m(t)$, характеризующую сигнал на входе реле.

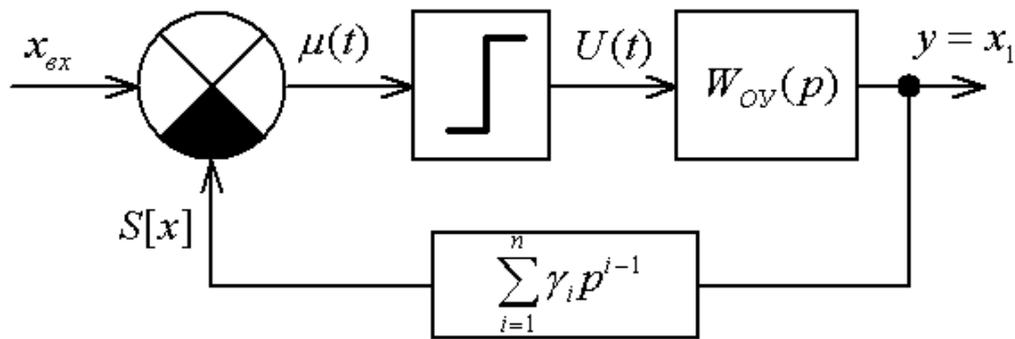


Рисунок 47 – Структура оптимального регулятора

Структура оптимального регулятора задается в виде устройства с нелинейными обратными связями по координате выхода ($x_1 = y$) и $(n-1)$ ее производных.

Функция переключения, определяющая сигнал на входе реле (аналогичная функции $S(x)$), запишется в следующем виде:

$$m(t) = (x_{зад} - x_1(0)) - g_1 \cdot x_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{n+1} \left[(x_{зад}^{(i)} - x^{(i)}(0)) - x_i^{(i)}(t) \right],$$

$$y(\infty) = x_{зад} - x_1$$

$$x_{вх} = x_{зад},$$

где $x_{зад}$, $x_{зад}^{(i)}$ - заданные значения фазовых координат объекта;

$$\left[x_1(t_K), \dot{x}_1(t_K), \ddot{x}_1(t_K) \text{ и т.д.} \right] = X(t_K) - \text{вектор конечного состояния}$$

координат;

$x_1(0)$ и $x^{(i)}(0)$ - начальные значения фазовых координат ОУ;

$$\left[x_1(0), \dot{x}_1(0), \ddot{x}_1(0) \text{ и т.д.} \right] = X(0) - \text{вектор начального состояния}$$

координат;

g_i - коэффициенты обратных связей по фазовым координатам, зависящие от вектора начального $X(0)$ и конечного состояния $X(t_K)$.

При непрерывных процессах на выходе ОУ функция переключения $m(t)$ в соответствии с теоремой об n - интервалах для оптимальных по быстродействию

процессов будет $(n - 1)$ раз менять знак и в моменты переключения реле $m(t_n) = 0$, t_n - момент переключения.

Для моментов переключения можно записать систему $(n - 1)$ алгебраических уравнений, решение которой при заданных $X(0)$, $X(t_K)$ и известных t_n дает возможность определить коэффициенты обратных связей.

$$(x_{зад} - x_{10}(0)) - g_1 \cdot x_1(t_u) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{n+1} \left[(x_{зад}^{(i)}(t_u) - x_{10}^{(i)}(t_u)) - x^{(i)}(t_u) \right] = 0$$

$$g_i = f_i[X(0), X(t_K), t_u].$$

Таким образом, для решения задачи определения g_i необходимо найти моменты переключения реле t_n , что может быть выполнено методом «сшивания решений».

Задача синтеза оптимального регулятора усложняется при наличии возмущений, они должны быть учтены в уравнениях состояния ОУ.

Разработанная для определенного типа входного задающего воздействия $x_{вх}(t)$ и начального состояния $X(0)$ оптимальная по быстродействию система является оптимальной для любых начальных состояний $X(0) \neq 0$ и такого же типа $x_{вх}(t)$, если условия теоремы об n - интервалах выполняются, но для других типов $x_{вх}(t)$ может оказаться не оптимальной.

Если ОУ колебательный (характеристическое уравнение ОУ имеет комплексные корни), то теорема об n - интервалах не выполняется и процессы будут идти с большим переключением реле, в этом случае целесообразней выбирать управление из другого класса функций – например, ступенчатое без смены знака управляющего воздействия – т.е. использовать квазиоптимальное управление.

Для колебательного ОУ вместо релейного управления со сменой знака $U(t)$ и длительностью интервалов $t_n \leq \frac{P}{w_0}$, где w_0 - частота собственных колебаний ОУ, можно исключить реверсирование сигнала управления и применить знакопостоянное ступенчатое управление.

При переводе ОУ из начального состояния $X(0) = 0$ в конечное состояние $X(t_K) \neq 0$ на вход ОУ подается скачкообразное промежуточное управляющее воздействие U_{II} , величина которого определяется следующим соотношением:

$$U_{II} = U_0 + (U_K - U_0) \cdot \frac{1}{1+h},$$

где h - величина перерегулирования при обработке промежуточного U_{II} , при котором установившееся значение $x_{1n} = x_{зад}$, а выходная переменная (координата) изменяется по закону

$$x_1(t) = U_{II} + A \cdot e^{-rt} \cdot \sin(w_0 t + j_0)$$

и в связи с перерегулированием на величину h , x_{1n} в момент времени $t = t_K$ достигает значения $x_1 = x_K = x_{зад}$, а $\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$, что соответствует установившемуся состоянию. Если в этот момент времени изменить величину управляющего воздействия до U_{max} , то получим заданное значение выходной координаты. Длительность переходного процесса в системе при этом соответствует половине периода колебаний затухающего колебательного процесса ОУ ($t = T$).

$$T = \frac{P}{w_0}, w_0 = \sqrt{1 - r^2} \text{ или } w_0 = \sqrt{1 - x^2} \quad x = r - \text{коэффициент затухания.}$$

Графики измерения $x_1(t)$ и $U(t)$ представлены на рис. 48.

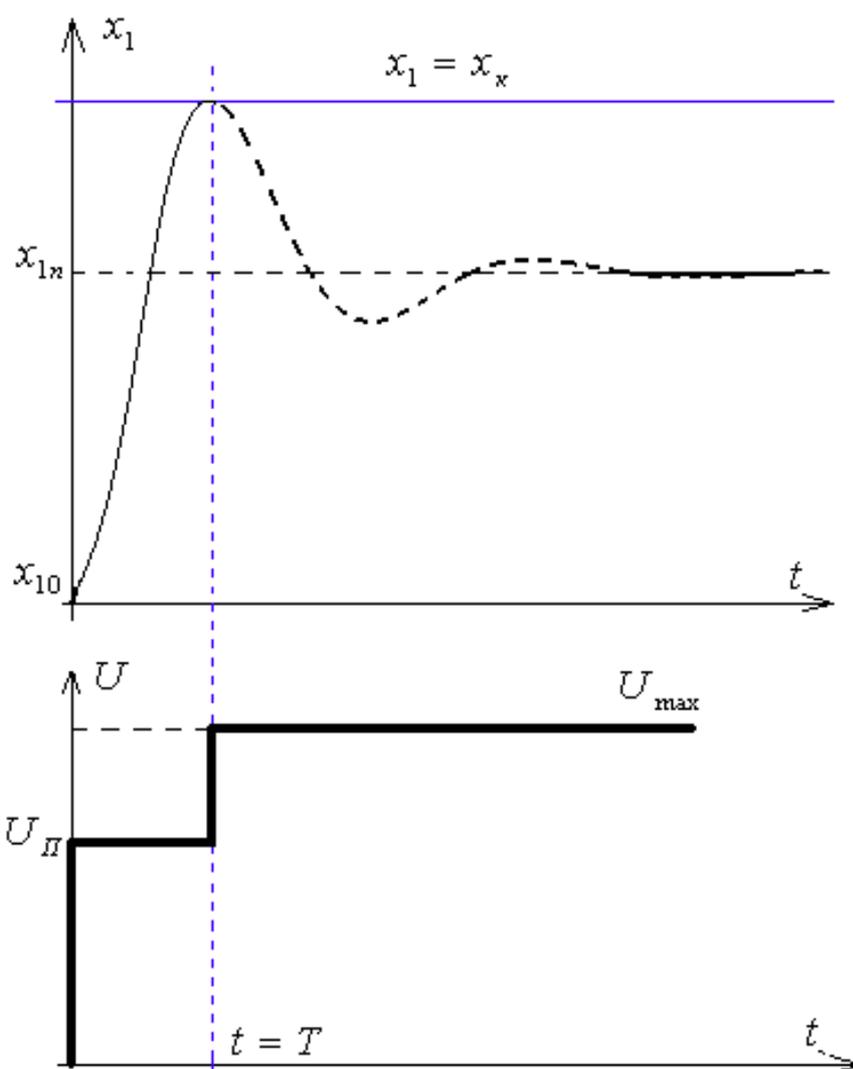


Рисунок 48 – Изменение управляющего воздействия и выхода ОУ

ВЫВОДЫ

I. Точность САУ при детерминированных сигналах.

1.1. Системы стабилизации САУ координат состояния ОУ могут быть статическими и астатическими. Первые характеризуются статической ошибкой. Для повышения точности статических САУ можно использовать неединичные главные обратные связи, $k_{oc} = \frac{k-1}{k}$, где k - коэффициент усиления системы по задающему воздействию, или масштабирование задающего воздействия $m = \frac{k+1}{k}$, где m - масштабный коэффициент. При наличии возмущений, приложенных к ОУ,

целесообразней проектировать астатическую САР. Если интегрирующее звено введено в закон регулирования (ПИ, ПИД - регуляторы), то система будет астатической относительно задающего и возмущающего воздействия $f(t)$, меняющегося скачком ($f(t) = f_0$). При меняющемся медленно возмущении, если оно доступно измерению, целесообразно создать второй канал передачи возмущения, обеспечив инвариантность САР, т.е. создать САР с комбинированным управлением.

1.2. Обеспечение точности САУ характеризующихся динамической ошибкой (следающих) является более сложной задачей. Они должны обладать астатизмом, и главная ОС должна быть единичной. Для повышения точности САУ по задающему воздействию $g(t)$ можно использовать способ косвенного повышения астатизма системы без увеличения $k_{сис}$ и подбором параметров фильтра обеспечить равенство нулю коэффициента скоростной ошибки c_1 . Для этого на входе системы устанавливают фильтр с $W_\phi(s) = k_\phi s$ или $W_\phi(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$ и $T_1 > T_2$.

Так, для системы третьего порядка необходимо обеспечить равенство $(T_2 - T_1)k = 1$, и тогда $c_1 = 0$. Установка фильтра на входе системы позволяет отфильтровывать случайные сигналы, накладывающиеся на $g(t)$.

Наиболее рациональный способ – обеспечение инвариантности системы относительно $g(t)$ и $f(t)$, приложенного к ОУ. Частичную инвариантность можно обеспечить, введя первую и вторую производную от задающего воздействия в управляющее устройство. Инвариантность, как показано выше на примере, позволяет уменьшать или делать равными нулю коэффициенты ошибок по скорости и ускорению (c_1 и c_2) при невысоком коэффициенте усиления системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления : учебник для вузов / Л. С. Гольдфарб [и др.] ; под ред. А. В. Нетушила. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1983. – 432 с.
2. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем : учебник для вузов / под ред. Н. Н. Иващенко – 3-е изд. – Москва : Машиностроение, 1973. – 606 с.
3. Анхимюк, В. Л. Теория автоматического управления : учеб. пособие для вузов / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 352 с.
4. Бесекерский, В. А., Теория автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. изд. 3-е, испр. – Москва : Наука, 1975. – 768 с
5. Куропаткин, А. В. Теория автоматического управления : учеб. пособие для электротехн. спец. вузов / А. В. Куропаткин ; под ред. Д. В. Васильева. – Москва : Высшая школа, 1973. – 528 с.
6. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления / под общ. ред. Е. А. Санковского. – Минск : Высшая школа, 1973. – 583 с.
7. Топчиев, Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Топчиев. – Москва : Машиностроение, 1989. – 752 с.
8. Кулаков, Г. Т. Инженерные экспресс-методы расчета промышленных систем регулирования : справочное пособие / Г. Т. Кулаков. – Минск : Высшая школа, 1984. – 192 с.
9. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы : учеб. пособие / В. В. Солодовников [и др.]; под ред. В. В. Солодовникова. – Москва : Высшая школа, 1991. – 256 с.
10. Наладка автоматических систем и устройств управления технологическими процессами : справочное пособие / под ред. А. С. Ключева. – Москва : Энергия, 1977. – 400 с.
11. Руководство по проектированию систем автоматического управления : учеб. пособие для студентов специальности «Автоматика и теле- механика» / под ред. В. А. Бесекерского. – Москва : Высшая школа, 1983. – 296 с.
12. Проектирование и надежность систем автоматики и телемеханики / А. Д. Горбачев [и др.]; – Минск : Высшая школа, 1981. – 334 с.
13. Основы проектирования следящих систем / под общ. ред. Н. А. Лакоты. – Москва : Машиностроение, 1978. – 391 с.
14. Кулаков, Г. Е. Анализ и синтез систем автоматического регулирования / Г. Е. Кулаков. – Минск : УП Технопринт, 2003. – 125 с.
15. Бесекерский, В. А. Цифровые системы управления / В. А. Бесекерский. – Москва : Наука, 1976. – 320 с.

16. Микропроцессорные системы автоматического управления / под ред. В. А. Бесекерского. – Москва : Машиностроение, 1988. – 365 с.
17. Мееров, В. М. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности / В. М. Мееров. – Москва : Наука, 1968. – 356 с.
18. Куропаткин, П. В. Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / П. В. Куропаткин. – Москва : Высшая школа, 1980. – 287 с.
19. Коновалов, Г. Ф. Радиоавтоматика : учебник для вузов по специальности «Радиотехника» / Г. Ф. Коновалов. – Москва : Высшая школа, 1990. – 335 с.
20. Лазарева, Т. Я. Основы теории автоматического управления : учеб. пособие / Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – Тамбов : Изд-во Тамбовского государственного технологического университета, 2003. – 308 с.
21. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – Санкт-Петербург : Наука, 2000. – 475 с.
22. Клиначев, Н. В. Теория систем автоматического регулирования. Учебно-методический комплекс, 2005. Электронный ресурс.
23. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д. П. Ким. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
24. Бажанов, В. USWO – новый способ формирования управления для замкнутых систем автоматического регулирования / В. Бажанов // Современные технологии автоматизации. – 1998. – № 4. – С. 28 – 32.
25. Денисенко, В. ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации / В. Денисенко // Современные технологии автоматизации. – 2006. – № 4. – С. 66 – 74; 2007. – № 1. – С. 78 – 86.