МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Ряды

Методические указания к практическим занятиям
для студентов второго курса заочной формы обучения

Витебск
2017

УДК 517 (075.8)

Составители:

Е.Б. Дунина, Т.В. Никонова, О.Е. Рубаник, Н.С. Статковский

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол №5 от 23.06.2017.

Высшая математика. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Ряды: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса заочной формы обучения / сост. Е.Б. Дунина, Т.В. Никонова, О.Е. Рубаник, Н.С. Статковский. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 82 с.

В методических указаниях изложены теоретические сведения и практические задания по четырем разделам курса «Высшая математика». Издание предназначено для студентов всех специальностей заочной формы обучения и может быть использовано на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов по высшей математике.

УДК 517 (075.8)

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей заочной формы обучения и дополняют лекционные курсы по дисциплине «Высшая математика».

Весь материал распределен по четырем разделам. Разделы состоят из подразделов. Вначале каждого подраздела даются краткие теоретические сведения, рассмотрены примеры решения задач и приводятся задачи для самостоятельной работы, которые помогают сформировать у студентов современные теоретические и практические знания по математике. Дополнительную информацию по каждому разделу можно найти в предложенном списке литературы.

Методические указания могут использоваться также и при дистанционном изучении данной дисциплины.

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексным нулем считают пару $(0,0)$. Число, противоположное комплексному числу $z = (x, y)$, определяется как $(-x, -y)$ и обозначается $-z$.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ – два комплексных числа. Арифметические операции над двумя комплексными числами, результатом выполнения которых является тоже комплексное число, определяются следующим образом:

1) сумма (разность): $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2)$;

2) произведение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) деление: $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$.

В частности:

$(x_1, 0) \pm (x_2, 0) = (x_1 \pm x_2, 0)$;

$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$;

$\dfrac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\dfrac{x_1}{x_2}, 0\right)$.

Следовательно, множество действительных чисел вкладывается в множество комплексных чисел и можно отождествлять комплексное число вида $(x, 0)$ и действительное число x:

$$(x, 0) \equiv x.$$

Введем обозначение: $i = (0,1)$. Тогда по правилу умножения

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

и введенное таким образом число i называют ***мнимой единицей***.

Теперь любое комплексное число можно записать в виде:
$z = (x,y) = (x,0) + (y,0)\cdot(0,1) = x + yi$ или $z = (x,y) = x + yi$.

Такую форму записи называют ***алгебраической формой записи комплексного числа***. При этом x называют ***действительной частью*** z и обозначают $Re\,z$, а y — ***мнимой частью*** z и обозначают $Im\,z$.

Алгебраическая форма имеет важное практическое значение: над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $i^2 = -1$.

Чтобы преобразовать в комплексное число дробь вида $\frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i}$, нужно и числитель, и знаменатель дроби умножить на число $x_2 - y_2 i$; числа $x_2 + y_2 i$ и $x_2 - y_2 i$ называются ***комплексно-сопряженными***.

Пример 1. Вычислить:

а) $(5-3i)-(1-i)$; б) $(2+i)\cdot(6-5i)$; в) $\dfrac{6-i}{3+2i}$; г) $(2-3i)^3$.

Решение

а) $(5-3i)-(1-i) = 5-3i-1+i = (5-1)+(-3+1)i = 4-2i$;

б) $(2+i)\cdot(6-5i) = 12-10i+6i-5i^2 = 12-4i-5\cdot(-1) = 12-4i+5$
$= 17-4i$;

в) $\dfrac{6-i}{3+2i} = \dfrac{(6-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{18-12i-3i+2i^2}{9-4i^2} = \dfrac{18-15i-2}{9+4} =$
$= \dfrac{16-15i}{13} = \dfrac{16}{13} - \dfrac{15}{13}i$;

г) $(2-3i)^3 = [(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3] = 8-36i+54i^2-27i^3 =$
$= [i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i] = 8-36i-54+27i = -46-9i$.

Пример 2. Найти все корни квадратного уравнения $x^2+4x+13=0$.

Решение

Воспользуемся формулами для нахождения корней квадратного уравнения:

$D = b^2-4ac = 16-52 = -36 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{-1\cdot 36} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{36} = 6i$,

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-4+6i}{2} = -2+3i, x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-4-6i}{2} = -2-3i$.

Задания для решения

1. Вычислить.

1.1 $(3-2i)+(7+8i)$; **1.2** $(20-7i)+(1-3i)$; **1.3** $(4-i)-(-1+9i)$;
1.4 $(-6+5i)\cdot(1-3i)$; **1.5** $(5-i)\cdot(-2+4i)$; **1.6** $(2+5i)\cdot(-2+3i)$;
1.7 $\dfrac{17-i}{1-3i}$; **1.8** $\dfrac{-5+4i}{6-3i}$; **1.9** $\dfrac{9+2i}{1+i}$; **1.10** $\dfrac{8-i}{5+7i} - \left(\dfrac{6-i}{1+6i}\right)^2$;

1.11 $(3-2i)^2$; **1.12** $(5+i)^3$; **1.13** i^{25}; **1.14** $(2+i)^3 \cdot i^9$.
2. Найти все корни квадратного уравнения.
2.1 $x^2-2x+10=0$; **2.2** $x^2-4x+5=0$; **2.3** $x^2+1=0$; **2.4** $x^2+10=0$;
2.5 $x^3+9x=0$; **2.6** $x^2-6x+13=0$; **2.7** $3x^2+2x+4=0$;
2.8 $2x^2-x+2=0$; **2.9** $4x^2+x+1=0$; **2.10** $2x^2-x+3=0$.

1.2 Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Геометрически каждое комплексное число $z=(x,y)=x+yi$ изображается точкой $M(x,y)$ на координатной плоскости XOY, и тогда плоскость xOy называется ***плоскостью комплексных чисел*** (рисунок 1.1).

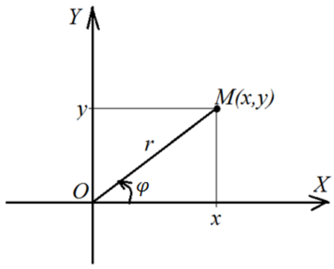

Рисунок 1.1 – Изображение комплексного числа на плоскости

Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется ***модулем комплексного числа*** $z=x+yi$ и обозначается $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию от точки M, изображающей это число, до начала координат.

Всякое решение φ следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}, \\ \sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

называется ***аргументом комплексного числа*** $z=x+yi$. Все аргументы числа z различаются на целые, кратные 2π, и обозначаются единым символом $Arg\, z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось OX до совпадения ее с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M (при этом $\varphi>0$, если поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и $\varphi<0$ в противном случае).

Значение $Arg\, z$, удовлетворяющее условию $0 \le Arg\, z < 2\pi$, называется ***главным значением аргумента*** и обозначается $arg\, z$.

Для любого комплексного числа $z=x+yi$ справедливо равенство

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arg\, z$. Такая форма записи называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа z.

Заметим, что если положить

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi + i\sin\varphi$$

(это соотношение называется формулой Эйлера), то приходим к ***показательной форме*** записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 1. Представить в тригонометрической и показательной форме число $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение

$$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad \begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{6}.$$

Тогда в тригонометрической форме число примет вид

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$$

в показательной

$$z = -\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

Операции над комплексными числами в тригонометрической форме имеют следующий вид:

1) $z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$
$+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

3) $z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число z_k, n-ая степень которого равна подкоренному числу. Справедлива формула:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень степени n; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Выше приведенные формулы для комплексных чисел в показательной форме приобретают вид

1) $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1}\cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

3) $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$;

4) $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Пример 2. Вычислить а)$(-1 + i)^5$; б) $\sqrt[3]{-1 + i}$.

Решение

а) запишем число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \begin{cases} \cos\varphi = -1/\sqrt{2} \\ \sin\varphi = 1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

тогда

$$(-1+i)^5=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right)=$$
$$=\left[\frac{15\pi}{4}=\frac{16\pi-\pi}{4}=4\pi-\frac{\pi}{4}\right]=4\sqrt{2}\left(\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4-4i;$$
б) запишем число $z=-1+i$ в тригонометрической форме (см. п. а)
$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$
тогда
$$z_k=\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=$$
$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right),\qquad k=0,1,2.$$
Подставляя поочередно $k=0,1,2$ в последнее равенство, получим
$$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4}{3}+i\sin\frac{3\pi/4}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+i\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$
$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Задания для решения

3. Записать в тригонометрической и показательной формах числа, заданные в алгебраической форме.

3.1 $z=i$; **3.2** $z=-2$; **3.3** $z=-\sqrt{3}+i$; **3.4** $z=-\sqrt{3}-3i$; **3.5** $z=\sqrt{3}+i$;
3.6 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **3.7** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **3.8** $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **3.9** $z=\frac{2}{1+i}$.

4. Найти все значения корней.

4.1 $\sqrt[4]{-64}$; **4.2** $\sqrt[4]{5+12i}$; **4.3** $\sqrt[4]{1}$; **4.4** $\sqrt[3]{-8}$; **4.5** $\sqrt[3]{2+2i}$; **4.6** $\sqrt[5]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

5. Вычислить.

5.1 $(1+i)^8$; **5.2** $(2-2\sqrt{3}i)^{20}$; **5.3** $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{21}$; **5.4** $(1-i)^{12}$; **5.5** $\frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{20}}$.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1 Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную *x,* искомую функцию $y = f(x)$ и её производные $y', y'', ..., y^{(n)}$

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0\,.$$

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***. ***Порядком*** дифференцируемого уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Например, уравнение $y''' - 3y'' - 2y = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его интегрированием, а график решения ДУ – ***интегральной кривой***.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно решить относительно первой производной, то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y).$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

– функция удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянного *c;*

– каково бы не было начальное условие $x = x_0, y = y_0$, всегда можно найти такое значение $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Функция $y = \varphi(x, c_0)$ называется ***частным решением*** дифференциального уравнения.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т. е. $\phi(x, y, c) = 0$, то такое решение называется ***общим интегралом дифференциального уравнения.*** Решение $\phi(x, y, c_0) = 0$ называется ***частным интегралом дифференциального уравнения.***

Теорема (Коши). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области *D* на плоскости *Oxy*, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая ДУ.

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка, является уравнение ***с разделенными переменными***

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \qquad (2.1)$$

В этом уравнении одно слагаемое зависит только от *x,* а другое от *y.* Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c.$$

Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \qquad (2.2)$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными.***

Уравнение (2.2) легко сводится к уравнению (2.1) путем почленного деления на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Далее решение сводится к интегрированию левой и правой части

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = c.$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

Решение

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, приходим к уравнению $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + c,$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c_1,$$

$$|y| = \left|\frac{c_1}{x}\right|.$$

Примечание: уравнение $y' = f_1(x) f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно записать $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Задания для решения

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $yy' = x3^{x^2}\sqrt{y^2+3};$

1.2 $dy = (x-1)ctgy\,dx;$

1.3 $y' = xe^{x}(1+y^2);$

1.4 $\frac{y+18}{\sin x}dy = xdx;$

1.5 $y' = (y^2+4y+4)\ln x;$

1.6 $(y^2+2y+1)y' = \cos(3x-55);$

1.7 $y' = \frac{\cos^2 x}{\ln y};$

1.8 $e^{2x+1}dy + 15xdx = 0;$

1.9 $y' = tgy\cos^2 y\sin(x+1);$

1.10 $(x^2y+y)dy+\sqrt{7+y^2}\,dx = 0.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $y'tgx = y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$

2.2 $(x+xy)dy+(y-xy)dx = 0,\ y(1)=1;$

2.3 $y' = 2e^{3x}-4x^2+6,\ y(0)=2;$

2.4 $y' = \sqrt[5]{4x-8},\ y(2)=2;$

2.5 $x^4y' = 5xy+7\sqrt{x}y,\ y(1)=1;$

2.6 $3yy' = 4e^{5y^2+2},\ y(0)=0;$

2.7 $y' = 7^{3y}tg(3-5x),\ y(0)=\pi;$

2.8 $\ln(y+6)e^{3x}y' = 1+e^{7x},\ y(0)=-1;$

2.9 $(x+1)ydx+(y+2)dy = 0,\ y(0)=1;$

2.10 $(1+e^{2x})y^2y' = e^{x},\ y(0)=1.$

3. Является ли функция $y(x,C)$, где C – произвольная постоянная, решением дифференциального уравнения.

3.1 $y = Cx+\frac{1}{x},\ xy'-y+\frac{1}{y}=0;$

3.2 $y = \frac{1}{C(x+1)},\ y' = 3y^2;$

3.3 $y = \ln(e^{x^2}+C),\ e^{y-x^2}y'-2x = 0;$

3.4 $y = x+Cx^2,\ xy'-2y+x = 0;$

3.5 $y = e^{\frac{C}{x}},\ xy' = -y\ln y;$

3.6 $y = \frac{Cx}{3x+1}+3,\ y-3 = (3x^2+x)y';$

3.7 $y = C(x^2+4),\ (x^2+4)y'-2xy = 0;$

3.8 $y = \frac{2+Cx}{2x+1},\ 2x^2y' = y-xy'-2;$

3.9 $y = C(1+e^{x}),\ (1+e^{x})y' = ye^{x};$

3.10 $y = Ce^{x}-e^{-x},\ xy''+2y'-xy = 0.$

2.2 Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией n-ого измерения*** относительно переменных *x* и *y,* если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{n} f(x,y).$$

Например, функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ – однородная функция первого измерения, так как

$$F(\lambda x,\lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3} = \sqrt[3]{\lambda^3(x^3+y^3)} = \lambda f(x,y).$$

Уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \tag{2.3}$$

называется ***однородным*** относительно *x* и *y,* если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения.

Однородное уравнение решают при помощи подстановки $\frac{y}{x} = u$. Тогда $y = xu$ и $y' = u + xu'$. Подставив y и y' в уравнение (2.3) получим уравнение с разделяющимися переменными $u + xu' = \varphi(u)$. Найдя его общее решение, необходимо заменить *u* на $\frac{y}{x}$.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{2.4}$$

Дифференциальное уравнение будет однородным только тогда, когда $P(x, y), Q(x, y)$ будут однородными функциями одного измерения.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Решение

Проверяем, является ли функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ однородной функцией нулевого измерения

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} = \lambda^0 f(x, y).$$

Функция является однородной функцией нулевого измерения, поэтому мы имеем дело с однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Сделаем подстановку $\frac{y}{x} = u, y = xu$, $y' = u + xu'$. После несложных преобразований получим уравнение с разделяющимися переменными $xu' = \frac{u^3}{1 - u^2}$. Разделяем переменные $\frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}$. Интегрируем последнее выражение

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{dx}{x} + C,$$

$$\int u^{-3} du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Получим

$$\frac{u^{-2}}{-2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln C,$$

$$\frac{1}{-2u^2} = \ln|Cxu|.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получим

$$\frac{x^2}{-2y^2} = \ln|Cy|.$$

Задания для решения

1. Решить уравнения.

1.1 $y' = \sin^2 \frac{3y}{x} + \frac{y}{x};$

1.2 $yy' = x - y;$

1.3 $4xy' = y\ln x - y\ln y;$

1.4 $x^2 y' = 3x^2 + xy - y^2;$

1.5 $y' = \sqrt{6\frac{y}{x} - 7} + \frac{y}{x};$

1.6 $5yy' = 3x + y;$

1.7 $3x^2 y' = x^2 + 3xy + 2y^2;$

1.8 $y' = 5e^{\frac{y}{x}} - 5 + \frac{y}{x};$

1.9 $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9;$

1.10 $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

2. Решить задачу Коши.

2.1 $xy' = 5y - 7x,\ y(1) = 2;$

2.2 $yy' = 5xe^{4y/x} + y^2/x,\ y(1) = 1;$

2.3 $3xy' = 2y + 9x,\ y(2) = 1;$

2.4 $y' = 8 \cdot 3^{\frac{y}{6x}} + y/x,\ y(1/6) = 0;$

2.5 $xy' = 5xe^{\frac{2y}{x}} - 4x + y,\ y(1) = 0;$

2.6 $2x^2 y' = x^2 + y^2,\ y(1) = 0;$

2.7 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2},\ y(1) = 0;$

2.8 $x^2 y' + xy - x^2 - y^2 = 0,\ y(1) = 0;$

2.9 $\left(y' - \frac{y}{x}\right) ctg \frac{y}{x} = 1,\ y(1) = \frac{\pi}{2};$

2.10 $y' - \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x} = 0,\ y(1) = 0.$

2.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{2.5}$$

где $p(x), g(x)$ – заданные функции, в частности постоянные.

В качестве метода решения линейного уравнения рассмотрим ***метод Бернулли***. Решение уравнения (2.5) будем искать в виде произведения двух других функций, то есть с помощью подстановки

$$y = u(x) \cdot \upsilon(x),$$

где $u = u(x), \upsilon = \upsilon(x)$.

Тогда

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon'.$$

Подставляем y' и y в (2.5), получаем

$$u'\upsilon + u(\upsilon' + \upsilon p(x)) = g(x). \qquad (2.6)$$

Мы имеем одно ДУ с двумя неизвестными функциями $u(x), \upsilon(x)$. Добавим еще одно условие. Подберем функцию $\upsilon = \upsilon(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю $\upsilon' + \upsilon p(x) = 0$. Получим ДУ с разделяющимися переменными, решая его получим

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -p(x)dx, \quad \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int p(x)dx + \ln c.$$

Положим c=1, тогда

$$\ln\upsilon = -\int p(x)dx$$

Отсюда

$$\upsilon = e^{-\int p(x)dx}. \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получаем

$$u'e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

или

$$\frac{du}{dx}e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Полученное уравнение также представляет собой ДУ с разделяющимися переменными, решая его, получим

$$u = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c. \qquad (2.8)$$

Возвращаясь к переменной y, общее решение запишем в виде

$$y = u \cdot \upsilon = (\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (2.9)$$

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \qquad (2.10)$$

где $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли.***

Данное уравнение можно свести к линейному. Разделим уравнение (2.10) на y^n, получим

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = g(x). \qquad (2.11)$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$, тогда

$$z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'.$$

Из полученного равенства выразим $y^{-n} \cdot y'$

$$y^{-n}y' = \frac{1}{-n+1}z'.$$

Уравнение (2.11) принимает вид

$$\frac{1}{-n+1}z' + p(x)z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z. Его решение хорошо известно.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x.$

Решение

Полагаем $y = u \cdot \upsilon$, $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$. Подставим y' и y в уравнение

$$u'\upsilon + u(\upsilon' + 2x\upsilon) = 2x. \tag{2.12}$$

Приравняем скобку к нулю $\upsilon' + 2x\upsilon = 0$. Решаем полученное уравнение

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -2x\upsilon, \ \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2\int x dx, \ \ln\upsilon = -x^2.$$

Таким образом

$$\upsilon = e^{-x^2}. \tag{2.13}$$

Подставим (2.13) в (2.12)

$$u'e^{-x^2} = 2x.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dx}e^{-x^2} = 2x, \ du = 2xe^{x^2}dx, \ \int du = 2\int xe^{x^2}dx + c, \ u = 2\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 + c.$$

Получаем

$$u = e^{x^2} + c.$$

Общее решение запишем в виде

$$y = u\upsilon = (e^{x^2} + c)e^{-x^2} = 1 + ce^{-x^2}.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$

Решение

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy},$$

откуда

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}. \tag{2.14}$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$, тогда $y = \sqrt{z}$, $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$. Подставив эти выражения в (2.14), получим

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2x} = -\frac{x}{2\sqrt{z}},$$

откуда

$$z' - \frac{z}{x} = -x.$$

Введем подстановку $z = u \cdot \upsilon$, $z' = u'\upsilon + u\upsilon'$. Подставим z' и z в последнее уравнение

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' - \frac{\upsilon}{x}\right) = -x. \tag{2.15}$$

Приравняем скобку к нулю $\upsilon' - \frac{\upsilon}{x} = 0$. Решаем полученное уравнение

$$\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{\upsilon}{x},\ \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{dx}{x},\ \ln \upsilon = \ln x.$$

Таким образом

$$\upsilon = x. \qquad (2.16)$$

Подставим (2.16) в (2.15)

$$u'x = -x.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dx} = -1,\ du = -dx,\ \int du = -\int dx + c.$$

Получаем

$$u = -x + c.$$

Общее решение запишем в виде

$$y = u\upsilon = (-x + c)x = -x^2 + cx.$$

Задания для решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $y' - 5x^4 y = x^4$;

1.2 $y' - y\sin x = \sqrt{1-x}e^{-\cos x}$;

1.3 $y' - \frac{y}{x-8} = \frac{1}{(x-8)^3}$;

1.4 $xy' - 4y = 4x^5$;

1.5 $(1-x)y' + y = 1$;

1.6 $x^2 y' = 5xy + 4$;

1.7 $y' + (3x^2 - 2x)y = e^{x^2 - x^3}\cos x$;

1.8 $x(y' - 1) + y = 2x\ln x$;

1.9 $y' + 7x^6 y = e^{-x^7}\sin x$;

1.10 $y' - 3x^2 y = (1 + x)e^{x^3}$.

2. Решить задачу Коши.

2.1 $y' + (2x+1)y = e^{-x^2-x}\cos^2 x,\ y(\pi) = 0$;

2.2 $y' + 3x^2 y = e^{-x^3} tgx,\ y(0) = 0$;

2.3 $y' - 2xy = e^{x^2}\sin 2x,\ y(0) = 0$;

2.4 $y' - \frac{y}{1+x^2} = \sqrt{1+x}e^{arctgx},\ y(0) = 0$;

2.5 $xy' + y = \sin x,\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$;

2.6 $y'\cos x - y\sin x = \sin x,\ y(\frac{\pi}{3}) = 2$;

2.7 $x^2 y' = 2xy + 5,\ y(1) = 2$;

2.8 $y' - y\sin x = \sqrt{1-x}e^{-\cos x},\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$;

2.9 $y' - 2xy = e^{x^2}\arcsin x,\ y(0) = 1$;

2.10 $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{7}{x^3},\ y(1) = 1$.

3. Решить дифференциальные уравнения.

3.1 $y' + \frac{y}{x} = y^5$;

3.2 $\sqrt{1-x^2}\,y' + y = y^2 e^{\arcsin x},\ y(0) = -1$;

3.3 $y' + yctgx = y^2\cos x$;

3.4 $y' + \frac{5y}{\sqrt{x}} = 3\cdot\sqrt[5]{y^4},\ y(1) = 2$;

3.5 $y' + 3y = y^2 e^{2x}$;

3.6 $y' + y = 3e^{-2x} y^2$, $y(0) = 1$;

3.7 $y' - \frac{2xy}{x^2 + 3} = 4xy^3$;

3.8 $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$, $y(0) = 1$;

3.9 $y' - \frac{y}{x} = y^4 (3 - x^2)$;

3.10 $y' + 2xy = 2xy^2$, $y(0) = 1$.

2.4 Уравнения в полных дифференциалах

Если дифференциальное уравнение имеет вид $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, то его надо сначала привести к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ и определить вид данного ДУ. Если же оно не является ни одним из рассмотренных четырех видов, то надо проверить, не будет ли выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ***полным дифференциалом*** некоторой функции $U(x,y)$. Т. е. проверить, существует ли такая функция $U(x,y)$, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ во всех точках области, в которой ищется решение данного ДУ. Такая функция $U(x,y)$ существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Если это условие выполнено, то дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется ***дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.***

Чтобы его решить, надо:

1. Найти функцию
   $U(x,y) = \int P(x,y)dx\Big|_{y=const} = F(x,y) + C(y)$.
2. Для нахождения функции *C(y)* надо найти $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + C'_y$ и приравнять полученное выражение функции $Q(x,y)$.
3. Когда функция $U(x,y)$ найдена, то общее решение ДУ записывают в виде $U(x,y) = C$.

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x + y + \sin y}{e^y + x + x\cos y}.$$

Это уравнение не принадлежит ни к одному из первых четырех типов. Проверим, является ли оно ДУ в полных дифференциалах. В нашем случае

$$P(x,y)=e^x+y+\sin y,\quad Q(x,y)=e^y+x+x\cos y.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$, т. е. условие $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

1. Находим функцию
   $U(x,y)=\int P(x,y)dx\Big|_{y=const}=\int(e^x+y+\sin y)dx=e^x+yx+x\sin y+C(y)$.
2. Находим $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x+x\cos y+C'_y$. Приравниваем полученное выражение к функции $Q(x,y)$, т. е. $x+x\cos y+C'_y=e^y+x+x\cos y$. Следовательно, $C'_y=e^y$. Это ДУ с разделяющимися переменными $\frac{dC(y)}{dy}=e^y$. Находим $\int dC(y)=\int e^y dy$. Или $C(y)=e^y$.

   Окончательно,
   $$U(x,y)=e^x+yx+x\sin y+e^y.$$
3. Решение дифференциального уравнения имеет вид
   $$e^x+yx+x\sin y+e^y=C_1.$$

Задания для решения

1. Найти обще решение дифференциальных уравнений первого порядка.

1.1 $(3e^{2-x}-4xy^2+5)dx+(\sin\pi y-4x^2y-2)dy=0;$

1.2 $(3x^2y+4xy-y^2)dx+(x^3+2x^2-2xy)dy=0;$

1.3 $(ye^x+2xy^3+3x^2)dx+(\cos y+e^x+3x^2y^2)dy=0;$

1.4 $\left(\frac{3y}{x^2+1}+xy^2-\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx+(3arctgx+e^{4y}+yx^2)dy=0;$

1.5 $\left(\frac{5y}{x-4}-4xy+3y^2\right)dx+(5\ln(x-4)-2x^2+6xy+\ln y)dy=0;$

1.6 $(6x^2y^4+x+5y)dx+(8x^3y^3+5x-y)dy=0;$

1.7 $(4x^3+6xy^2)dx+(6x^2y+10y^4)dy=0;$

1.8 $(2x+y+3x^2\sin y)dx+(x+x^3\cos y+2y)dy=0;$

1.9 $(\sin 2x+2e^{2x-y})dx+(\cos 3y-e^{2x-y})dy=0;$

1.10 $\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\right)dx+\left(2\cos 2y-\frac{2y}{\sqrt{x-y^2}}\right)dy.$

2.5 Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***дифференциальными уравнениями высшего порядка.***

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (2.17)$$

или

$$y''=f(x,y,y'). \qquad (2.18)$$

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка, называется функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$, где c_1,c_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

– функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения c_1 и c_2;

– каковы бы ни были начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, существуют единственные значения постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, такие, что функция $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ является решением уравнения (2.18) и удовлетворяет начальным условиям.

Функция $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ называется ***частным решением*** уравнения. Решения, записанные в виде

$$\phi(x_1,y_1,c_1,c_2)=0,$$
$$\phi(x_1,y_1,c_1^0,c_2^0)=0,$$

называются ***общим и частным интегралом*** соответственно.

Рассмотрим **методы понижения порядка** ДУ второго и высших порядков.

1. Простейшее дифференциальное уравнение *n*-ого порядка имеет вид $y^{(n)}=f(x)$, где $f(x)$ – известная функция. Решение такого ДУ находится *n*-кратным последовательным интегрированием функции $f(x)$, причем при каждом интегрировании добавляется аддитивная постоянная.

   Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV}=\sin 2x.$

   Решение. Последовательно находим:

$$\frac{dy'''}{dx}=\sin 2x,\ \ dy'''=\sin 2xdx,\ \int dy'''=\int\sin 2xdx+c_1,\ \ y'''=-\frac{1}{2}\cos 2x+c_1,$$

$$\frac{dy''}{dx}=-\frac{1}{2}\cos 2x+c_1,\quad \int dy''=-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\int c_1dx+c_2,\quad y''=-\frac{1}{4}\sin 2x+c_1x+c_2,$$

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2, \quad \int dy' = -\frac{1}{4}\int \sin 2x dx + c_1 \int x dx + c_2 \int dx + c_3$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$\int dy = \frac{1}{8}\int \cos 2x dx + c_1 \int \frac{x^2}{2} dx + c_2 \int x dx + c_3 \int dx + c_4,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

2. Уравнение, не содержащее явно переменную *y*

$$y'' = f(x, y'). \tag{2.19}$$

В этом случае используется ***подстановка***

$$y' = p, \ p = p(x), \ y'' = p'. \tag{2.20}$$

Уравнение (2.19) принимает вид

$$p' = f(x, p).$$

Это уравнение первого порядка. Проинтегрировав уравнение, получим

$$p = \varphi(x, c_1).$$

Заменяя функцию p на y', получаем

$$y' = \varphi(x, c_1).$$

Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение.

Частным случаем уравнения (2.19) является уравнение вида

$$y'' = f(y'). \tag{2.21}$$

Оно так же решается при помощи подстановки (2.20).

Пример 2. Решить уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Решение. Уравнение не содержит явно переменную y, поэтому относится к уравнению второго типа. Полагаем $y' = p$, $p = p(x)$, $y'' = p'$. Тогда уравнение примет вид

$$p' - \frac{p}{x} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \ \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \ \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + \ln c_1, \ \ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|, \ \ p = xc_1.$$

Возвращаемся к исходной переменной

$$y' = xc_1.$$

Решаем полученное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = xc_1, \ dy = xc_1 dx, \ \int dy = c_1 \int x dx + c_2, \ y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2.$$

3. Уравнение, не содержащее явно переменную *x*

Это уравнение вида

$$y'' = f(y, y'). \qquad (2.22)$$

Для его решения снова положим

$$y' = \frac{dy}{dx} = p. \qquad (2.23)$$

Но теперь мы будем считать ***p* функцией от *y***. Тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Таким образом, при решении используем ***подстановку***

$$y' = p, \; p = p(y), \; y'' = p\frac{dp}{dy}. \qquad (2.24)$$

Подставляя y' и y'' в (2.22), получим уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Интегрируя его, найдем p как функцию от y и произвольного постоянного c_1

$$p = \varphi(y, c_1).$$

Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем

$$y' = \varphi(y, c_1).$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого хорошо известно.

Частным случаем уравнения (2.22) является уравнение вида

$$y'' = f(y).$$

Оно решается при помощи аналогичной подстановки.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.

Решение. Это уравнение третьего типа. Введем подстановку $y' = p \;\; p = p(y), \; y'' = p\dfrac{dp}{dy}.$

$$p\frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0,$$

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y.$$

После замены получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем его решать методом Бернулли. Полагаем $p = u(y) \cdot \upsilon(y)$, $p' = u'\upsilon + u\upsilon'$. Тогда

$$u'\upsilon + u(\upsilon' - \upsilon) = 1 - y. \qquad (2.25)$$

Приравняем скобку к нулю

$$\upsilon' - \upsilon = 0;\ \frac{d\upsilon}{\upsilon} = dy;\ \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int dy;\ \ln|\upsilon| = y;\ \upsilon = e^{y}.$$

Подставим υ в (2.25)

$$u'e^{y} = 1 - y;\ du = (1-y)e^{-y}dy;\ \int du = \int (1-y)e^{-y}dy + c_1.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим $u = ye^{-y} + c$.

Так как $p = u \cdot \upsilon,$ то

$$p = (ye^{-y} + c_1)e^{y}.$$

Учитывая подстановку $y' = p,$ запишем

$$y' = y + c_1 e^{y}.$$

Подставив в последнее равенство начальные условия $y(0) = 2,\quad y'(0) = 2$, определим значение константы c_1

$$2 = 2 + c_1 e^{2};\ c_1 = 0.$$

Уравнение в этом случае примет вид

$$y' = y;\ \frac{dy}{y} = dx;\ \int \frac{dy}{y} = \int dx + \ln c_2;\ \ln|y| = x + \ln c_2;\ y = c_2 e^{x}.$$

Константа c_2 так же определяется из начальных условий

$$2 = c_2 e^{0};\ c_2 = 2.$$

Частное решение дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y = 2e^{x}.$$

Задания для решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

1.1 $y'' = x^3 - 5x;$

1.2 $y''' = \dfrac{6}{x^3} + 15x^2 - 10;$

1.3 $x^3 y''' = 6;$

1.4 $xy'' = 9x^3 - 2x^2 + 7x;$

1.5 $y'' = \sin x + \cos x;$

1.6 $y'' = 2x^2 + 7\sin x;$

1.7 $y'' = x + e^{3x} + 2;$

1.8 $y^{IV} = \dfrac{1}{x^3};$

1.9 $y'' = \sin 2x;$

1.10 $y''' = \cos 5x - 11.$

2. Указать тип дифференциального уравнения, методы его решения и решить задачу Коши.

2.1 $y''' = e^{2x},\ y(0) = \dfrac{9}{8}, y'(0) = \dfrac{1}{4}, y''(0) = -\dfrac{1}{2};$

2.2 $y'' = x^2,\ y(0) = 4, y'(0) = -5;$

2.3 $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2},\ y(1) = 3, y'(1) = 1$

2.4 $y'' + 2y' = 6x,\ y(0) = 6, y'(0) = 1;$

2.5 $8xy'' + 8y' = x(y')^2,\ y(1) = 4, y'(1) = 7$

2.6 $y'' + 5y' = 7,\ y(0) = y'(0) = 1;$

2.7 $yy'' = 5(y')^2,\ y(1) = 2, y'(1) = 32;$

2.8 $y'' = \sqrt{yy'},\ y(0) = y'(0) = 0;$

2.9 $(y+1)y'' = 2(y')^2,\ y(1) = -3, y'(1) = 1;$

2.10 $y'' + \sqrt{1-(y')^2} = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. Решить дифференциальные уравнения.

3.1 $y''' + \frac{y'}{x+1} = \frac{9}{x+1}$;

3.2 $y'' tgx = y' + 1$;

3.3 $y'' - 2y' ctgx = \sin^3 x$;

3.4 $xy'' - y' = e^x x^2$;

3.5 $\sqrt{x} y'' = (y')^2$;

3.6 $x(y'' + 1) + y' = 0$;

3.7 $(1 + \sin x)y''' = \cos x y''$;

3.8 $xy'' + y' = x + 1$;

3.9 $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$;

3.10 $x^2 y''' = y''^2$.

4. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

4.1 $y'' = 2yy'$;

4.2 $2yy'' = 1 + y'^2$;

4.3 $y^3 y'' - 3 = 0$;

4.4 $yy'' = y'^2$;

4.5 $yy'' + 1 = y'^2$;

4.6 $y'^2 + 2yy'' = 0$;

4.7 $1 + y'^2 + yy'' = 0$;

4.8 $y'' = 2 - y$;

4.9 $y'' = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{y}}$;

4.10 $yy'' = y'^2 - y^2$;

2.6 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Основные сведения

Линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) второго порядка имеет вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \qquad (2.26)$$

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением*** (ЛНДУ) или уравнением с правой частью. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) или уравнением без правой части.

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \qquad (2.27)$$

Функции $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале (a,b), если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \qquad (2.28)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля, то функции y_1 и y_2 называются ***линейно зависимыми.*** Очевидно, что функции линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. $\frac{y_1}{y_2} = \lambda = const$.

Например, пусть дано уравнение: $y'' - y' = 0$. Легко показать, что функции $e^x, e^{-x}, 3e^x$ являются решениями этого уравнения. При этом функции e^x, e^{-x} линейно независимы, т. к. $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const$. Функции $e^x, 3e^x$ линейно зависимы, т. к. $\dfrac{e^x}{3e^x} = \dfrac{1}{3} = const$.

Пусть y_1 и y_2 являются функциями от *x*: $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, тогда определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского или вронскианом*** данных функций.

Теорема 1. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского на этом отрезке равен нулю. Если же решения y_1 и y_2 линейно независимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.

Совокупность любых двух линейно независимых частных решений y_1 и y_2 ЛОДУ второго порядка определяет фундаментальную систему решений этого уравнения.

Теорема 2. Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (2.27), то

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где $c_1, c_2 = const$, есть его общее решение.

Пример 1. Исследовать на линейную зависимость функции $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$ в их области определения.

Решение. Областью определения данных функций есть вся числовая прямая, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x \cdot (e^x + xe^x) - 1 \cdot xe^x = x^2 e^x.$$

Так как существует хотя бы одно значение $x \in R$, при котором $W \neq 0$ (например, при $x = 1$ имеем $W = e$), то функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = xe^x$ линейно независимы на *R*.

Задания для решения

1. Исследовать в области определения функции на линейную зависимость.

1.1 $y_1 = 3,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2$;

1.2 $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, y_4 = x^3, y_5 = x^4$;

1.3 $y_1 = x,\ y_2 = |x|$;

1.4 $y_1 = 10, y_2 = 2x, y_3 = 3x^2, y_4 = x^3$;

1.5 $y_1 = 4,\ y_2 = x,\ y_3 = \arcsin x$ в интервале $(-1,1)$.

2.7 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дано линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.29}$$

где p,q – постоянные действительные числа.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$, где k – const. Подставляя данную функцию и ее производные в уравнение (2.29), получим $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Т. к. $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) называют ***характеристическим уравнением.*** При решении характеристического уравнения (2.30) возможны три случая:

1. $D > 0; k_1 \neq k_2; k_1, k_2 \in R$. В этом случае частными решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Эти решения будут линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (2.29) имеет вид
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}. \tag{2.31}$$
2. $D = 0; k_1 = k_2 = k; k \in R$. В этом случае одно частное решение имеет вид $y_1 = e^{kx}$. В качестве второго частного решения можно взять функцию $y_2 = xe^{kx}$. Эти функции будут линейно независимыми. Поэтому общее решение уравнения (2.29) в данном случае можно записать
$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}. \tag{2.32}$$
3. $D < 0; k_1, k_2 = \alpha \pm \beta i$. В этом случае будет два линейно независимых решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Общее решение в этом случае записывается в виде
$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x). \tag{2.33}$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Дискриминант $D > 0$, поэтому имеем два различных корня $k_1 = 1,\ k_2 = -2$. Тогда $y_1 = e^{k_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{k_2 x} = e^{-2x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$. Дискриминант $D = 0$, поэтому имеем два одинаковых корня $k_1 = k_2 = k = 2$. Тогда $y_1 = e^{2x}$ $y_2 = xe^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 9 = 0,\ k^2 = -9$. Поэтому $k = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\alpha = 0,\ \beta = 3$. Тогда

$$y_1 = e^0 \cos 3x = \cos 3x,\ y_2 = e^0 \sin 3x = \sin 3x.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Задания для решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.1 $3y'' + y' - 4y = 0$;

1.2 $4y'' + 12y' + 9y = 0$;

1.3 $y'' - 5y' = 0$;

1.4 $y'' - 7y = 0$;

1.5 $y'' + 7y = 0$;

1.6 $y'' - 4y + 13y = 0$;

1.7 $4y'' - 2y' + y = 0$;

1.8 $9y'' - 6y' + y = 0$;

1.9 $y'' - 7y' + 3y = 0$;

1.10 $y'' + 2y' + 5y = 0$;

2. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1 $3y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4$;

2.2 $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$;

2.3 $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2.4 $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 1$;

2.5 $2y'' + 12y' + 18y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0$;

2.6 $y'' + 5y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2.8 Линейные однородные дифференциальные уравнения n- порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением n-порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (2.34)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа.

Для решения уравнения составляем характеристическое уравнение

$$k^{(n)} + a_1 k^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0.$$

Далее находим корни характеристического уравнения $k_1, \ldots, k_n$, по характеру корней записывают частные линейно независимые решения уравнения (2.34):

1) каждому действительному однократному корню k соответствует решение e^{kx};
2) если корень k встречается r-раз (кратность корня), то мы получим r линейно-независимых частных решений: $e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$;
3) каждой паре комплексных корней $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствует два частных решения: $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$;
4) если пары комплексных чисел встречаются μ-раз, то мы получим 2μ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение
$$k^4 - 1 = 0,\ (k^2-1)(k^2+1) = 0,\ (k-1)(k+1)(k^2+1) = 0.$$
Находим корни: $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_{34} = \pm i,\quad \alpha = 0, \beta = 1$. В этом случае частными линейно независимыми решениями уравнения будут функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$. Общий интеграл имеет вид
$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

Задания для решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.1 $y''' - 3y' - 2y = 0$;

1.2 $27y''' + 8y = 0$;

1.3 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

1.4 $y^{IV} - 2y'' + y = 0$;

1.5 $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$;

1.6 $y^{IV} - 2y''' - 3y'' = 0$;

1.7 $y^{IV} - 5y'' - 36y = 0$;

1.8 $y''' - 5y'' + 16y' - 12y = 0$;

1.9 $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$;

1.10 $y^{IV} - 8y'' + 7y = 0$.

2.9 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения
$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{2.35}$$
представляется как сумма общего решения однородного уравнения
$$y'' + py' + qy = 0$$
и частного решения неоднородного уравнения.

Символически это можно записать
$$y = y_{oo} + y_{чн} \tag{2.36}$$

Теорема (о наложении решений). Если правая часть уравнения (2.35) представляет сумму двух функций
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{2.37}$$
а $y_{1чн}, y_{2чн}$ – частные решения уравнений $y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$ и $y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x)$, то функция $y_{чн} = y_{1чн} + y_{2чн}$ является частным решением данного уравнения.

Для подбора частного решения уравнения (2.35) по виду правой части *f(x)* и корням характеристического уравнения удобно пользоваться следующей таблицей.

Таблица 1 – Определение вида частного решения по виду правой части дифференциального уравнения

Правая часть ДУ	**Корни характеристического уравнения**	**Вид частного решения**
$f(x)=P_n(x)$ (многочлен n-степени)	а) число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}=Q_n(x)$ (многочлен n-степени)
	б) число 0 является корнем характеристического уравнения кратности ℓ	$y_{чн}=x^{\ell}Q_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$	а) α не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}=e^{\alpha x}Q_n(x)$
	б) α является корнем характеристического уравнения кратности ℓ	$y_{чн}=x^{\ell}e^{\alpha x}Q_n(x)$
$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$ (пусть $n\ge m$)	а) число βi не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}=M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x$
	б) число βi является корнем характеристического уравнения кратности ℓ.	$y_{чн}=x^{\ell}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$ $(n\ge m)$	а) число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}=e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$
	б) число $\alpha+\beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности ℓ	$y_{чн}=x^{\ell}e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''-3y'=x^2+1$.

Решение. Решение будем искать в виде

$$y=y_{оо}+y_{чн},$$

где $y_{оо}$ – общее решение однородного уравнения, а $y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' = 0$. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$k^2 - 3k = 0$, $k(k-3) = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$y_{00} = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$.

Поскольку нуль является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде (см. таблицу 1)

$y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

Найдем производные $y_{чн}$ и подставим их в исходное уравнение

$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y''_{чн} = 6Ax + 2B$

и подставим их в исходное уравнение

$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 1$.

Раскроем скобки и запишем в удобном виде левую часть выражения

$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C = x^2 + 1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x,* найдем неизвестные коэффициенты

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -9A = 1, A = -1/9, \\ x & 6A - 6B = 0, B = -1/9, \\ & 2B - 3C = 1, \mathrm{C} = \text{-}11/27. \end{array}$$

Частное решение запишется в виде

$$y_{чн} = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x.$$

Окончательно получаем

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x.$$

Задания для решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.1 $y'' + 7y' - 18y = 19$;

1.2 $y'' + 3y' - 10y = 6x^2 - 12x$;

1.3 $y'' + 6y' = 12x - 1$;

1.4 $y'' - 4y' + 4y = 30e^{2x}$;

1.5 $y'' + y = -8e^{-x}$;

1.6 $y'' + 4y' + 13y = -10\cos 3x$;

1.7 $y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}$;

1.8 $y'' + 9y = x\sin x$;

1.9 $y'' - 4y' + 10y = 22\cos x - \sin x$;

1.10 $y'' + 4y = 5x^2 - 6\sin 2x$.

3 КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1 Двойной интеграл

Пусть в области D с кусочно-гладкой границей Г задана непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем D кусочно-гладкими дугами на n частичных областей (рисунок 3.1), площади которых Δs_i $i=\overline{1..n}$.

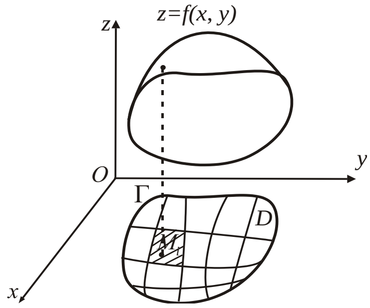

Рисунок 3.1 – Разбиение области D на части

В каждой частичной области выберем произвольную точку M_i и составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$. Пусть Δ – наибольший из диаметров всех областей. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$, независящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек M_i, то его называют ***двойным интегралом от функции*** $f(x, y)$ ***по области*** D и обозначают

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (3.1)$$

Свойства двойного интеграла

Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – интегрируемые в области D функции.

1. $\iint\limits_D dxdy = S$, где S – площадь области D. (3.2)

2. *Линейность*. Для $\forall\alpha, \beta\in\mathbf{R}$

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy. \qquad (3.3)$$

3. *Аддитивность*. Пусть область D является объединением двух областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек (рисунок 3.2). Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.

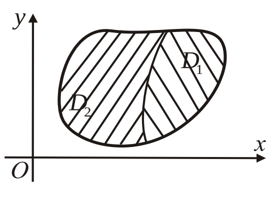

Рисунок 3.2 – Область $D=D_1\cup D_2$

Вычисление двойных интегралов сводится к последовательному вычислению однократных интегралов.

1. ***Случай прямоугольной области.***

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $D=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ со сторонами параллельными координатным осям (рисунок 3.3). Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (3.4)$$

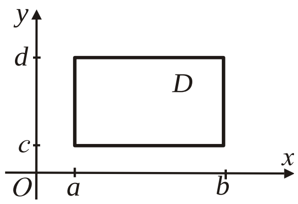

Рисунок 3.3 – Прямоугольная область D

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ по области D, заданной линиями: x=0, x=1, y=0, y=1.

Решение. Построим область D, она представляет собой квадрат со стороной 1 (рисунок 3.4).

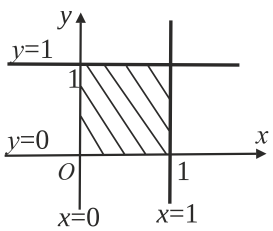

Рисунок 3.4 – Область D для примера 1

Запишем границы области D: $\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1.\end{cases}$

Воспользовавшись формулой (3.4), имеем

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3(1+y^2)}x^3\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1\frac{1}{3(1+y^2)}(1^3-0^3)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{1}{3(1+y^2)}dy=\left(\frac{1}{3}\mathrm{arctg}y\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}(\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}0)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{12}.$$

2. ***Случай криволинейной области.***

Пусть область D ограничена двумя непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, и вертикальными отрезками $x=a$ и $x=b$ (рисунок 3.5 а). Пусть любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области D не более чем в двух точках. Тогда справедлива формула

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3.5)$$

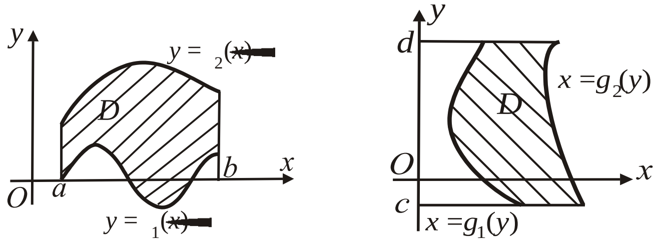

Рисунок 3.5 – Криволинейная область D

Если же область D определяется неравенствами $c \le y \le d$, $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, где $g_1(y)$ и $g_2(y)$ – непрерывные на отрезке $[c, d]$ функции, и любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу области не более чем в двух точках (рисунок 3.5 б), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3.6)$$

Известно, что прямоугольные декартовые координаты (x, y) и полярные (ρ, φ) координаты связаны между собой следующими соотношениями:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho \ge 0,\ 0 \le \varphi \le \pi. \qquad (3.7)$$

Следовательно,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (3.8)$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^4 dx \int_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

Решение. Область интегрирования D расположена между прямыми $x=0$ и $x=4$, ограничена снизу параболой $y=\frac{3x^2}{8}$, сверху графиком функции $y=3\sqrt{x}$ (рисунок 3.6).

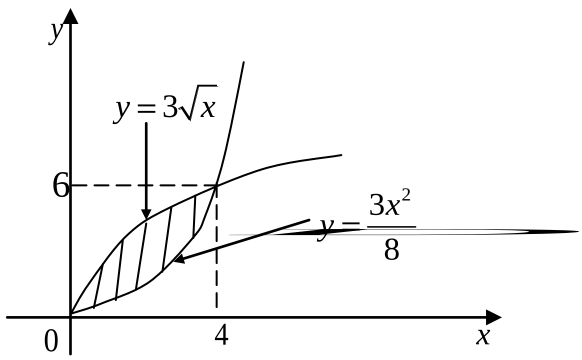

Рисунок 3.6 – Область интегрирования D для примера 2

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми y=0 и y=6, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x=\frac{y^2}{9}$ до точек параболы $x=\sqrt{\frac{8y}{3}}$, то есть имеем $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{\frac{8y}{3}}} f(x,y)dx.$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x-y+1)dxdy$ по области D, заданной неравенствами: $0\le x\le 1$, $x\le y\le 2x$.

Решение. Построим криволинейную область D (рисунок 3.7).

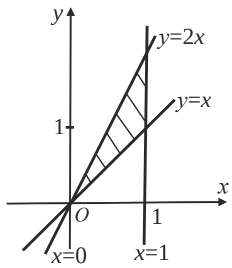

Рисунок 3.7 – Область D для примера 3

Запишем границы области D: $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ x\le y\le 2x. \end{cases}$

Воспользовавшись формулой (3.5), имеем

$$\iint\limits_D (x-y+1)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (x-y+1)dy = \int\limits_0^1 \left(xy - \frac{1}{2}y^2 + y \right)\Bigg|_x^{2x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left((2x^2 - 2x^2 + 2x) - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x \right) \right) dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2)dy$, используя полярные координаты.

Решение. Запишем границы области D: $\begin{cases} -1\le x\le 0, \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le 0. \end{cases}$

Построим криволинейную область D (рисунок 3.8). Она представляет собой часть окружности $x^2+y^2=1$, ограниченную слева и справа прямыми x= -1, x=0, а сверху и снизу прямой y=0 и нижней полуокружностью $y=-\sqrt{1-x^2}$, соответственно.

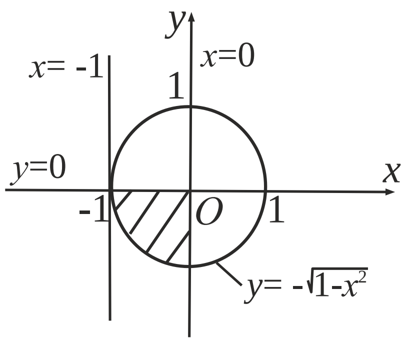

Рисунок 3.8 – Область D для примера 4

Если область D – круг или его часть, то интеграл проще вычислять в полярных координатах. Перейдем к полярным координатам по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности $x^2+y^2=1$ примет вид

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1 \Leftrightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1$, а значения полярного угла $\varphi_1=\pi$, $\varphi_2=\dfrac{3\pi}{2}$.

Запишем границы области $D'\colon \begin{cases} \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 1. \end{cases}$ Тогда по формуле (3.8) искомый интеграл

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)dy = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{1} \cos(\rho^2)\rho d\rho = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{1} \cos(\rho^2) d(\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(\rho^2)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2}\sin 1 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}\sin 1\, \varphi\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin 1\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right) = \frac{\pi}{4}\sin 1.$$

Задания для решения

1. Вычислить указанный двойной интеграл по области D, заданной линиями.

1.1 $\iint\limits_D (x+2y)\, dxdy$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$;

1.2 $\iint\limits_D xy\, dxdy$, $x=1$, $x=2$, $y=-1$, $y=0$;

1.3 $\iint\limits_D (3x-y)\, dxdy$, $x=-1$, $x=0$, $y=1$, $y=2$;

1.4 $\iint\limits_D (x^2+y)\, dxdy$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$;

1.5 $\iint\limits_D y^2 dxdy$, $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$;

1.6 $\iint\limits_D (5+2y)\, dxdy$, $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=1$;

1.7 $\iint\limits_D (\sqrt{x}-y)\, dxdy$, $x=1$, $x=4$, $y=-1$, $y=1$;

1.8 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\, dxdy$, $x=0$, $x=1$, $y=1$, $y=9$;

1.9 $\iint\limits_D (x-3^y)\, dxdy$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$;

1.10 $\iint\limits_D (4x-y)\, dxdy$, $x=-1$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах.

2.1 $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$;

2.6 $\int_{0}^{1} dy \int_{2y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x,y)dx$;

2.2 $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx;$

2.7 $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx;$

2.3 $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y}^{4} f(x,y)dx;$

2.8 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x,y)dy;$

2.4 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy;$

2.9 $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$

2.5 $\int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)dx;$

2.10 $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{x-2}^{4+3x} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{-2}^{4-2x} f(x,y)dy.$

3. Вычислить указанный двойной интеграл по области *D*, заданной линиями.

3.1 $\iint\limits_{D} (x-y+1)dxdy,\ y=x,\ y=2x,\ x=1;$

3.6 $\iint\limits_{D} (x^2+y)dxdy,\ x^2=y,\ y^2=x;$

3.2 $\iint\limits_{D} (xy^2+1)dxdy,\ x=2y^2,\ y=\frac{x}{2};$

3.7 $\iint\limits_{D} x^4 y dxdy,\ xy=1,\ y=x,\ x=2;$

3.3 $\iint\limits_{D} e^{x+y} dxdy,\ x=2,\ y=1,\ x+y=6;$

3.8 $\iint\limits_{D} xy^2 dxdy,\ y=x^2,\ y=x;$

3.4 $\iint\limits_{D} \cos(x+y)dxdy,\ x=0,\ y=x,\ y=\frac{\pi}{2};$

3.9 $\iint\limits_{D} x^3 dxdy,\ y=x+2,\ y=x^2;$

3.5 $\iint\limits_{D} (x+2y)dxdy,\ x=2,\ x=2y,\ y=x;$

3.10 $\iint\limits_{D} \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy,\ x=y,\ x=0,\ y=-2,\ y=4.$

4. Вычислить повторные интегралы, используя полярные координаты.

4.1 $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

4.6 $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

4.2 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

4.7 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\ x^2+y^2}\ dy.$

4.3 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$

4.8 $\int\limits_{-5}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2} dy.$

4.4 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

4.9 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$

4.5 $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sin\ x^2+y^2\ dy.$

4.10 $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln\ 1+x^2+y^2\ dy.$

3.2 Применение двойных интегралов

Вычисление площадей плоской области

Площадь *S* плоской области *D* в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (3.9)$$

Для полярной системы координат соответствующая формула примет вид

$$S = \iint_{D'} \rho d\rho d\varphi. \qquad (3.10)$$

Пример 1. Вычислить площадь области D, ограниченной кривыми $y=2-x^2$, $y=x$.

Решение. Определим точки пересечения кривых, ограничивающих область D. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ 2 - x^2 = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 + x - 2 = 0. \end{cases}$

Мы получили две точки пересечения $M_1(1, 1)$ и $M_2(-2, -2)$. Выполним чертеж области D (рисунок 3.9), предварительно составив таблицу значений функций.

$y=x$

x	-2	1
y	-2	1

$y=2-x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-7	-2	1	2	1	-2

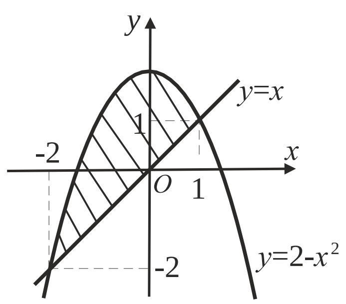

Рисунок 3.9 – Область D для примера 1

Запишем границы области D: $\begin{cases} -2 \le x \le 1, \\ x \le y \le 2 - x^2. \end{cases}$

Искомая площадь

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} y\Big|_x^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

Пример 2. Вычислить в полярных координатах площадь фигуры, которая ограничена линиями: $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=x$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Решение. Выделив полный квадрат относительно переменной x, уравнение $x^2-4x+y^2=0$ примет вид $(x-2)^2+y^2=4$. Данное уравнение задает окружность с центром в точке (2, 0) и радиусом R=2. Аналогично, уравнение $x^2-6x+y^2=0$ примет вид $(x-3)^2+y^2=9$ – окружность с центром в точке (3, 0) и радиусом R=3. Уравнения y=x и $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ задают прямые, проходящие через начало координат. Изобразим область D, ограниченную заданными кривыми, в декартовой системе координат (рисунок 3.10).

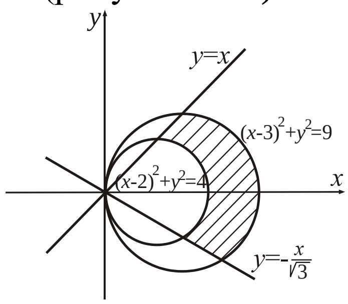

Рисунок 3.10 – Область D для примера 2

Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда уравнение первой окружности примет вид $\rho^2\cos^2\varphi-4\rho\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=0 \Leftrightarrow \rho^2=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=4\cos\varphi$. Аналогично, для второй окружности имеем $\rho=6\cos\varphi$. Из уравнения первой прямой следует, что $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi=1$ или $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, для второй прямой – $\mathrm{tg}\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

Запишем границы области D': $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 4\cos\varphi\le\rho\le 6\cos\varphi. \end{cases}$

Искомая площадь $S=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\rho d\rho=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\Big|_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}d\varphi=$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(36\cos^2\varphi-16\cos^2\varphi)d\varphi=10\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=5\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=5\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1-\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=5\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 11.21.$$

Вычисление объемов тел

Объем V тела, ограниченного поверхностью $z=f(x, y)\ge 0$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница Г области D, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy. \tag{3.11}$$

Это свойство выражает ***геометрический смысл двойного интеграла***.

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: параболическим цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости z=4-x-y, а снизу – частью плоскости Oxy, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой y=1 (рисунок 3.11).

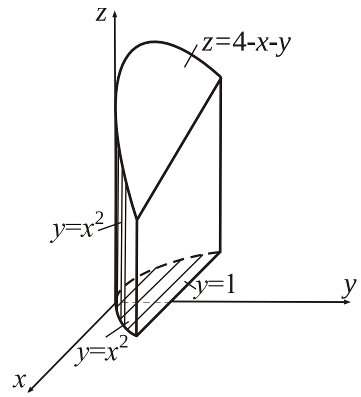

Рисунок 3.11 – Тело V для примера 3

Запишем границы области D: $\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le 1. \end{cases}$ Объем этого тела

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D (4-x-y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (4-x-y)dy = \int_{-1}^{1} \left((4-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - x - \frac{1}{2} - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{68}{15}.$$

Вычисление массы материальной пластинки

Пусть D – плоская пластинка, по поверхности которой непрерывно распределена масса с плотностью $\mu(x, y)$. Точная масса m всей пластинки определяется по формуле

$$m = \iint_D \mu(x,y)dxdy. \qquad (3.12)$$

В этом заключается ***физический смысл двойного интеграла***.

Пример 4. Вычислить массу пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$, если ее плотность $\mu(x, y)=xy$.

Решение. Изобразим пластину D в декартовой системе координат (рисунок 3.12).

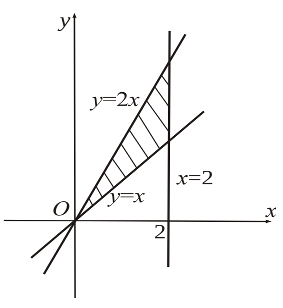

Рисунок 3.12 – Пластина D для примера 4

Запишем границы области D: $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ x \le y \le 2x. \end{cases}$ Масса этой пластины

$$m = \iint_D \mu(x, y)dxdy = \iint_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_x^{2x} ydy = \int_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^3dx = \left(\frac{3x^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 = 6.$$

Задания для решения

1. Вычислить площадь области D, заданной линиями.

1.1 $y=x^2$, $y=-x$;
1.2 $y=x^2+1$, $x+y=3$;
1.3 $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;
1.4 $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$;
1.5 $2y=\sqrt{x}$, $x+y=5$, $x\ge 0$;
1.6 $y=\cos x$, $y\ge x+1$, $y\ge 0$;
1.7 $x^2=3y$, $y^2=3x$;
1.8 $x=y^2+1$, $x+y=3$;
1.9 $y^2=x+2$, $x=2$;
1.10 $y^2=4x$, $x^2=4y$.

2. Вычислить площадь области D, заданной линиями.

2.1 $x^2+y^2=2y$, $y\ge -x$;
2.2 $x^2+y^2=6y$, $y\ge x$, $x\ge 0$;
2.3 $x^2+y^2=4x$, $y\le -\sqrt{3}x$;
2.4 $x^2+y^2=-4x$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y\le 0$;
2.5 $x^2+y^2=2y$, $y\ge -x$, $x\le 0$;
2.6 $x^2+y^2=-4y$, $y\ge x$, $y\ge -x$;
2.7 $x^2+y^2=8x$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$;
2.8 $x^2+y^2=4y$, $x^2+y^2=2y$, $x\le 0$;
2.9 $x^2+y^2=-4x$, $x^2+y^2=-4y$;
2.10 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=-2x$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

3.1 $x^2+y^2-z=0$, $x=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
3.2 $y=x^2$, $x=y^2$, $z=12-x^2-y^2$;
3.3 $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $z=0$;
3.4 $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$;
3.5 $z=1+x^2+y^2$, $z=0$, $y^2=4-x$, $y=0$, $x=3$;
3.6 $x+y+z=4$, $y=\frac{x^2}{2}$, $z=0$;
3.7 $2x+z=4$, $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$;
3.8 $x^2+y^2=9$, $z\ge 0$, $z\le y+3$;
3.9 $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$, $z=0$;
3.10 $z=y^2-x^2$, $z=0$, $y=\pm 2$.

4. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu=\mu(x, y)$.

4.1 $y^2=x$, $x=4$, $\mu=x$;
4.2 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $\mu=x^2$;
4.3 $x=0$, $y=1$, $y=x$, $\mu=x^2+2y^2$;
4.4 $y=x^2$, $x=y^2$, $\mu=3x+2y+6$;
4.5 $y=x^2+1$, $x+y=3$, $\mu=4x+5y+2$;
4.6 $x=0$, $y=2x$, $x+y=2$, $\mu=2-x-y$;
4.7 $x=1$, $x=y^2$, $\mu=4-x-y$;
4.8 $y=\sqrt{x}$, $y=x$, $\mu=2-x-y$;
4.9 $x^2+y^2=1$, $\mu=2-x-y$.
4.10 $x^2+y^2=4x$, $\mu=4-x$.

3.3 Тройной интеграл

Пусть функция $f(x, y, z)$ ограничена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $V \subset \mathbf{R}^3$, граница Г которой является кусочно-гладкой поверхностью. Разобьем V кусочно-гладкими поверхностями на n частичных областей, объемы которых Δv_i $i=\overline{1..n}$. В каждой частичной области выберем произвольную точку M_i и составим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$.

Пусть Δ – наибольший из диаметров всех областей. Если существует предел $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$, не зависящий ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек M_i, то его называют ***тройным интегралом от функции*** $f(x, y, z)$ ***по области*** V и обозначают

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz. \qquad (3.13)$$

Свойства тройного интеграла

Пусть $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ – интегрируемые в области V функции.

1. $\iiint_V dxdydz = v$, где v – объем области V.

2. *Линейность*. Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$\iiint_V [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dxdydz = \alpha \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

3. *Аддитивность*. Пусть область V является объединением двух областей V_1 и V_2, не имеющих общих внутренних точек. Тогда

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Вычисление тройных интегралов сводится к последовательному вычислению однократных интегралов.

1. *Случай прямоугольной области.*

Пусть область интегрирования есть параллелепипед $V=\{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ p \le z \le q\}$ со сторонами параллельными координатным осям (рисунок 3.13).

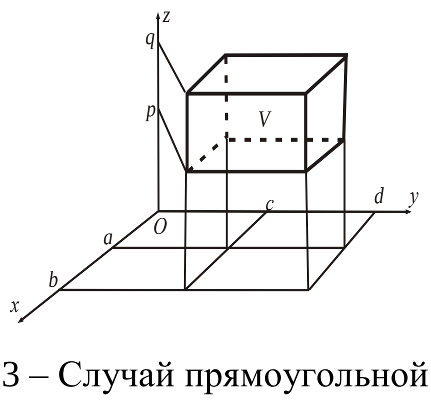

Рисунок 3.13 – Случай прямоугольной области

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b dx\int\limits_p^q f(x,y,z)dz = \int\limits_p^q dz\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y,z)dx. \qquad (3.14)$$

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x-y-z)dxdydz$ по прямоугольной области V, заданной неравенствами: $0\le x\le 3$, $0\le y\le 1$, $-2\le z\le 1$.

Решение. По формуле (3.14) имеем

$$\iiint\limits_V (x-y-z)dxdydz = \int\limits_{-2}^1 dz\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^3 (x-y-z)dx = \int\limits_{-2}^1 dz\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2}-xy-xz\right)\Big|_0^3 dy =$$
$$= \int\limits_{-2}^1 dz\int\limits_0^1 \left(\frac{9}{2}-3y-3z\right)dy = \int\limits_{-2}^1 \left(\frac{9}{2}y-\frac{3}{2}y^2-3yz\right)\Big|_0^1 dz = \int\limits_{-2}^1 (3-3z)dz = \left(3z-\frac{3}{2}z^2\right)\Big|_{-2}^1 =$$
$$=13{,}5.$$

2. ***Случай криволинейной области.***

Пусть область V задана неравенствами $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, $g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)$ (рисунок 3.14).

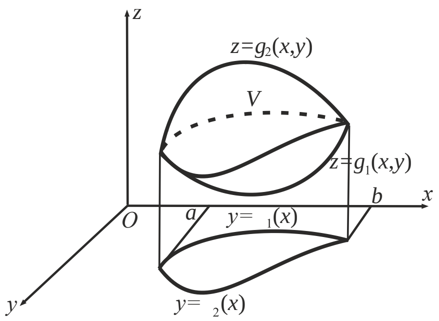

Рисунок 3.14 – Случай криволинейной области

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \qquad (3.15)$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^3y^3zdxdydz$ по области V, заданной неравенствами $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$, $0\le z\le xy$.

Решение. По формуле (3.15) имеем

$$\iiint\limits_V x^3y^3zdxdydz = \int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^x y^3dy\int\limits_0^{xy} zdz = \int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^x y^3\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{xy} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5dx\int\limits_0^x y^5dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5\left(\frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^x dx = \frac{1}{12}\int\limits_0^1 x^{11}dx = \frac{1}{144}\left(x^{12}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{144}\,.$$

Задания для решения

1. Вычислить тройной интеграл по прямоугольной области V, заданной неравенствами.

а) $\iiint\limits_V (x+2y+3z+4)dxdydz$, $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 1$;

б) $\iiint\limits_V (3x+y+5z)dxdydz$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$;

в) $\iiint\limits_V (x-y+z)dxdydz$, $0\le x\le 3$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$;

г) $\iiint\limits_V 6dxdydz$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le x+3y$.

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^3y^3zdxdydz$ по области V, заданной поверхностями.

а) $\iiint\limits_V xe^y dxdydz$, $x=0$, $y=x$, $y=1$, $z=0$, $z=8$;

б) $\iiint\limits_V xdxdydz$, $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $x+z=3$;

в) $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz$, $x=1$, $y=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=4\pi$;

г) $\iiint\limits_V x^2ydxdydz$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-2=0$;

д) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, $x=1$, $y=x$, $z=0$, $z=xy$;

е) $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=3$, $z=4$.

3.4 Вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат

В цилиндрической системе координат положение произвольной точки $M(x,\ y,\ z)$ однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, z), где z – аппликата точки M, а ρ, φ) – полярные координаты точки $M'(x, y)$, являющейся проекцией точки M на плоскость Oxy (рисунок 3.15).

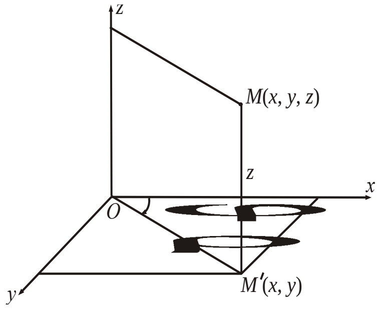

Рисунок 3.15 – Цилиндрическая система координат

Формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi;\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \rho\ge 0 \\ z = z; \end{cases} \qquad (3.16)$$

устанавливают связь между декартовыми и цилиндрическими координатами.

При переходе к цилиндрической системе координат тройной интеграл преобразуется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (3.17)$$

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область интегрирования V ограничена поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=1$, $z=2+x^2+y^2$.

Решение. Область интегрирования V ограничена круговым цилиндром $x^2+y^2=4$, плоскостью $z=1$, эллиптическим параболоидом $z=2+x^2+y^2$ и изображена на рисунке 3.16.

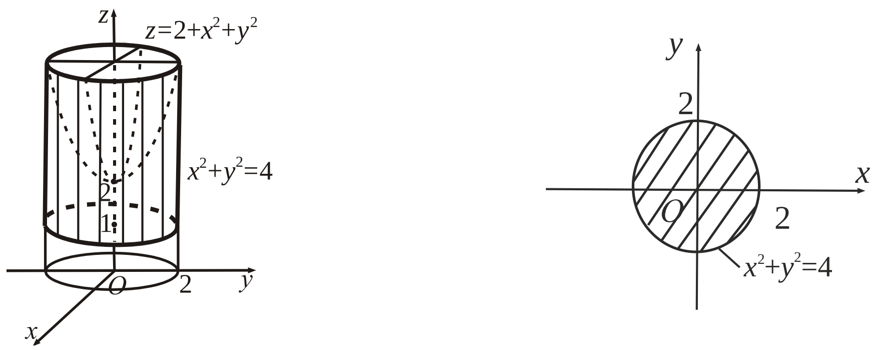

Рисунок 3.16 – Область интегрирования V и ее проекция на плоскость Oxy для примера 1

Перейдем в заданном интеграле к цилиндрической системе координат по формулам (3.16). Тогда уравнение цилиндрической поверхности $x^2+y^2=4$ примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2$. Аналогично, уравнение эллиптического параболоида $z=2+x^2+y^2$ примет вид $z=2+\rho^2$. Запишем границы области V': $\begin{cases} 0\le\rho\le 2, \\ 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 1\le z\le 2+\rho^2. \end{cases}$ С учетом формулы (3.17) получим

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = = \iiint\limits_{V'} \rho\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^2 d\rho \int\limits_1^{2+\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^2 \left(z\right)\Big|_1^{2+\rho^2} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} (\rho^2+\rho^4)d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{136}{15}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{136}{15}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{272}{15}\pi.$$

Пусть в пространстве R^3 дана точка $M(x, y, z)$. Обозначим через r – расстояние от начала координат до точки M ($r\ge 0$), а через θ – угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от оси Oz ($0\le\theta\le\pi$). Пусть M' – проекция точки M на плоскость Oxy, а φ – угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM'}$, отсчитываемый от оси Ox.

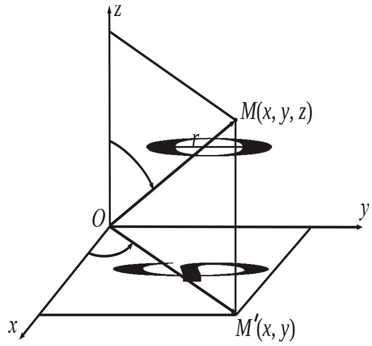

Рисунок 3.17 – Сферическая система координат

Тогда декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через r, θ, φ следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi; \\ z = r\cos\theta; \end{cases} \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ r\ge 0.\ \text{Причем } x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (3.18)$$

Числа r, θ, φ называются ***сферическими координатами*** точки M.

При переходе к сферической системе координат тройной интеграл преобразуется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi. \qquad (3.19)$$

Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz$, где V – область задаваемая неравенствами $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x^2+y^2+z^2\le 9$.

Решение. Область V представляет собой часть шара радиусом 3, расположенную в первом октанте. Перейдем к сферической системе координат. Тогда уравнение сферической поверхности $x^2+y^2+z^2=9$ примет вид $r=3$, а область интегрирования V' будет иметь следующие границы:
$V' = \{0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le r\le 3\}$. И с учетом формулы (3.19) получим

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} (r^2)^2 r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^3 r^6 dr \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^3 r^6 \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^3 r^6 dr = \frac{1}{7}\int\limits_0^{\pi/2} \left(r^7\right)\Big|_0^3 d\varphi = \frac{2187}{7}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{2187}{14}\pi.$$

Задания для решения

1. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

1.1 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=5.$

1.2 $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ z=5.$

1.3 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+z=2.$

1.4 $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: x^2+y^2=16y,\ y+z=16,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$;

1.5 $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: z=2x^2+2y^2,\ y\ge 0,\ y\le \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ z=5.$

1.6 $\iiint\limits_V ydxdydz$, $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

1.7 $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

1.8 $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le x.$

1.9 $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\le \sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

1.10 $\iiint\limits_V zdxdydz$, $V: z=x^2+y^2+z^2=36,\ z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0.$

3.5 Применение тройного интеграла

Как мы видели в свойстве **1.** из пункта **3.3** объем тела

$$v=\iiint\limits_V dxdydz. \tag{3.20}$$

В цилиндрической и сферической системах координат объем тела находится по формулам

$$v=\iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dz \ \text{ и } v=\iiint\limits_{V'} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi, \tag{3.21}$$

соответственно.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y=1$, $z=2x^2+2y^2$.

Решение. Тело, ограниченное эллиптическим параболоидом $z=2x^2+2y^2$, плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, и проекция этого тела на плоскость Oxy изображены на рисунке 3.18.

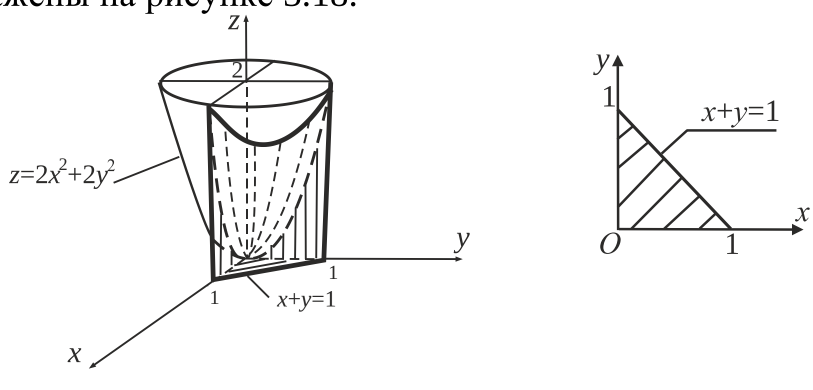

Рисунок 3.18 – Тело V и его проекция на плоскость Oxy для примера 1

Тогда область интегрирования V будет иметь следующие границы $V=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 2x^2+2y^2\}$.

Используя формулу (3.20), получим

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{2x^2+2y^2}dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} z\Big|_0^{2x^2+2y^2}dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(2x^2+2y^2)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2y+\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\int\limits_0^1\left(2x^2(1-x)+\frac{2(1-x)^3}{3}\right)dx=\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}-\frac{(1-x)^4}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.

Решение. Тело, ограниченное двумя данными параболоидами вращения, изображено на рисунке 3.19.

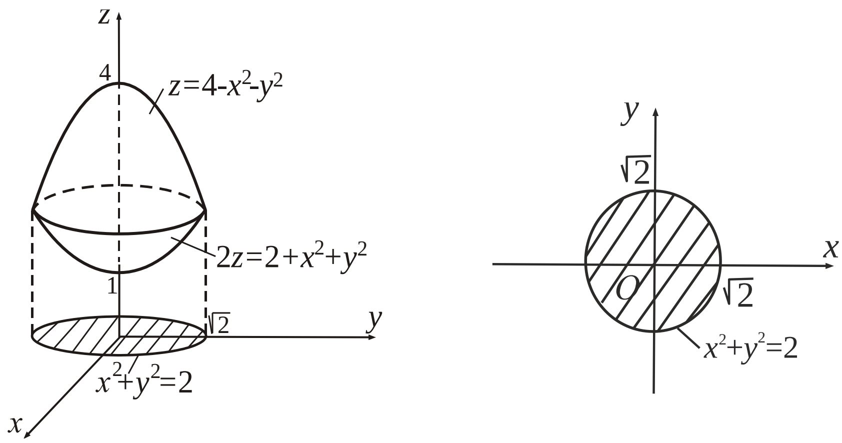

Рисунок 3.19 – Тело V и его проекция на плоскость Oxy для примера 2

Линия пересечения данных поверхностей определяется системой из их уравнений $\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ 2z=2+x^2+y^2 \end{cases}$. Исключая из этой системы z, получим $x^2+y^2=2$ – уравнение вертикальной цилиндрической поверхности, которая проходит через линию пересечения поверхностей и проектирует ее на плоскость Oxy. Таким образом, область D на плоскости Oxy является окружностью $x^2+y^2=2$. Чтобы упростить вычисление интеграла, перейдем к цилиндрической системе координат. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим $z=4-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2 \Leftrightarrow z=4-\rho^2$, аналогично $2z=2+x^2+y^2 \Leftrightarrow 2z=2+\rho^2$. Тогда область интегрирования V' будет иметь следующие границы $V'=\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{2}, 1+\frac{\rho^2}{2}\le z\le 4-\rho^2\right\}$.

Используя формулу (3.21) для цилиндрической системы координат, получим

$$v=\iiint\limits_{V'}\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}d\rho\int\limits_{1+\frac{\rho^2}{2}}^{4-\rho^2}\rho dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho z\Big|_{1+\frac{\rho^2}{2}}^{4-\rho^2}d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(3\rho-\frac{3\rho^3}{2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi.$$

Задания для решения

1. Найти объем тела, если область V ограничена указанными поверхностями.

а) $V: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,\ z=x^2+y^2, x+y=2.$

б) $V: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,\ z=5-x^2-y^2, y\ge x.$

в) $V: z\ge 0, y=x, y=-2x, y=1,\ z=x^2+4y^2.$

г) $V: z\ge 0, y=2x, y=3x, x=1,\ z=x^2+2y^2.$

д) $V: z\ge 0, y=0, y=2x,\ z=4-x^2-y^2.$

2. Вычислить с помощью тройного интеграла (в прямоугольных координатах) объёмы тел, ограниченных заданными поверхностями.

а) параболоидами $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2$, цилиндром $y=x^2$ и плоскостью $y=x$;

б) цилиндрами $z=4-y^2,\ z=y^2+2$ и плоскостями $x=-1,\ x=2$.

3. Вычислить с помощью тройного интеграла (в цилиндрических координатах) объёмы тел, ограниченных заданными поверхностями.

а) конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоидом $3z=x^2+y^2$;

б) конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z = 1$.

4. Вычислить с помощью тройного интеграла (в цилиндрических координатах) объём тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=22$ и параболоидом $x^2+y^2=9z$.

4 ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

4.1 Сходимость и сумма числового ряда. Свойства числовых рядов. Ряд геометрической прогресии

Числовым рядом называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

где $u_1, u_2, \ldots$ −действительные или комплексные числа. Слагаемые $u_1, u_2, \ldots$ называются ***членами ряда***, а u_n − ***общим членом ряда***.

Ряд считается заданным, если известен общий член u_n, выраженный как функция его номера n

$$u_n = f(n).$$

Сумма n первых членов ряда называется ***n-ой частичной суммой ряда*** и обозначается S_n, то есть

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Частичные суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n$ образуют числовую последовательность. Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

то этот предел называют ***суммой ряда*** и говорят, что ***ряд сходится***. Записывают

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Если же $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не существует или $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$, то ряд называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$, где c − число, также сходится и его сумма равна cS.

2. Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n,$$

и их суммы равны соответственно S_1 и S_2, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n),$$

и их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

Замечание 1. Из свойства 2 следует, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Замечание 2. Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Если от ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ отбросить или прибавить конечное число членов, то полученный и исходный ряды сходятся или расходятся одновременно.

При исследовании на сходимость рядов часто используется ***ряд геометрической прогрессии***

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1},$$

где a, q – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Ряд геометрической прогрессии расходится при $|q| \geq 1$ и сходится при $|q| < 1$, причем его сумма в этом случае равна $\frac{a}{1-q}$.

Пример 1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n}$.

Решение

а) в данном случае общий член ряда $u_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$ представляет собой правильную рациональную дробь, которую разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \Rightarrow 1 = A(n+1) + Bn$$

$$\left.\begin{matrix} n = -1{:}\, 1 = -B \\ n = 0{:}\ 1 = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B = -1 \\ A = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Таким образом,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1,$$

то есть ряд сходится и его сумма $S = 1$;

б) общий член ряда $u_n = \frac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n}$ представим в виде

$$\frac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n} = \frac{5 \cdot 9^n}{18^n} + \frac{2^n}{18^n} = 5 \cdot \left(\frac{9}{18}\right)^n + \left(\frac{2}{18}\right)^n = \frac{5}{2^n} + \frac{1}{9^n}.$$

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2^n} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n}.$$

Оба ряда – ряды геометрической прогрессии, причем для первого $a = \frac{5}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, а для второго $a = \frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{9}$. Значит, они сходятся ($|q| < 1$), причем их суммы равны соответственно

$$S_1 = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5, \qquad S_2 = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{8}.$$

Тогда, согласно свойству 2 числовых рядов, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{9^n}\right)$$

тоже сходится и его сумма S равна $S_1 + S_2$, то есть $S = 5 + \frac{1}{8} = \frac{41}{8}$.

Задания для решения

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

1.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\cdot 4^n-2^n}{8^n}$.

1.2 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n+7)(2n+9)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5\cdot 3^n+7\cdot 6^n}{36^n}$.

1.3 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9^n-4\cdot 3^n}{27^n}$

1.4 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5\cdot 8^n-3\cdot 2^n}{32^n}$.

1.5 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7\cdot 4^n-2^n}{6^n}$.

1.6 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n+2\cdot 5^n}{25^n}$.

1.7 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cdot 3^n+3\cdot 4^n}{18^n}$.

1.8 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7^n+2^n}{21^n}$.

1.9 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n-3\cdot 2^n}{20^n}$.

1.10 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n-2\cdot 3^n}{15^n}$.

4.2 Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд

Нахождение *n*-ой суммы ряда и ее предела во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости числового ряда используют специальные признаки сходимости.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{4.1}$$

сходится, то

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0, \tag{4.2}$$

то есть его общий член стремится к нулю.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$$

или этот предел не существует, то ряд (4.1) расходится.

Заметим, что теорема 1 не позволяет определять сходимость рядов: из условия (4.2) не следует, что ряд (4.1) сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых выполняется условие (4.2) Одним из примеров такого ***расходящегося*** ряда является ***гармонический ряд***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Примеры. Исследовать на сходимость числовые ряды

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n+1}$.

Решение

Найдем предел общего члена ряда.

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{5n+3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{2-\frac{1}{+\infty}}{5+\frac{3}{+\infty}} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5} \neq 0 \Rightarrow$

ряд расходится согласно достаточному условию расходимости.

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n+1} = [1^{\infty}] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+2-2-1}{3n+2}\right)^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(3n+2)-3}{3n+2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{-3}{3n+2}\right)^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{-3}}\right)^{\frac{3n+2}{-3}\cdot\frac{-3}{3n+2}\cdot(n+1)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3(n+1)}{3n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n-3}{3n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3-\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}} =$

$= e^{\frac{-3-0}{3+0}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$

ряд расходится согласно достаточному условию расходимости.

Заметим, что при вычислении предела для раскрытия неопределенности $[1^{\infty}]$ воспользовались вторым замечательным пределом

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Задания для решения

2. Исследовать на сходимость числовые ряды.

2.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{5n^2+9}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+8}\right)^{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n^2}{n^2+n+3}\right)^{n+6}$.

2.2 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7n^2+n+6}{8n+9}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5n+2}{3n-1}\right)^{4n+1}$.

2.3 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^3+4n^2-3}{n^2+n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n-4}{9n+5}\right)^{3n-2}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n^2+n+1}{8n^2+3}\right)^{n^2}$.

2.4 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n^3+n^2-5}{5n^3+n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+8}{3n-1}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^3+6}{n^2+3}\right)^{n+6}$.

2.5 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+9}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+8}{n+3}\right)^{2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7n-2}{n+5}\right)^{n^2}$.

2.6 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4+4n^2-3}{n^2+5n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n+7}{5n}\right)^{2n+9}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n^2+n-3}{5n^2+n+7}\right)^{7n-2}$.

2.7 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^5+n+6}{2n^5+9n^2-3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7n+1}{7n+8}\right)^{n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^3-2}{n^2+2n+3}\right)^{n+9}$.

2.8 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5n^2+n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{6n+11}{6n-1}\right)^{5n-2}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{10n-3}{n+4}\right)^{n^2+1}$.

2.9 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n-1}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n+9}{8n+3}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n^2+4n-3}{4n^2+5n+3}\right)^{3n+1}$.

2.10 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n^5+n-6}{n^3+n^2+n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+10}{n+1}\right)^{5n-4}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n^3-5}{8n^2+13}\right)^{5n-2}$.

4.3 Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad u_n > 0 \ \forall n \in \boldsymbol{N} \qquad (4.3)$$

Теорема 2 (признак Даламбера). Если для ряда (4.3)

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = r,$$

то при

$r < 1 -$ ряд сходится,

$r > 1 -$ ряд расходится,

$r = 1 -$ вопрос о сходимости не решён (надо применять другой признак).

В примерах часто применяется обозначение $n!$ (! – факториал): $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$

Например,

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24,$

$(n+1)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}_{n!}\cdot (n+1) = n!\cdot (n+1),$

$(2n+2)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n)}_{(2n)!}\cdot (2n+1)\cdot (2n+2) = (2n)!\cdot (2n+1)\cdot (2n+2).$

Пример. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot \sin\frac{\pi}{3^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

а) $u_n = \frac{2n+1}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)!} = \frac{2n+2+1}{(n+1)!} = \frac{2n+3}{n!\,(n+1)}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n!\,(n+1)} : \frac{2n+1}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)\cdot n!}{n!\,(n+1)\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{2n^2+3n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}} =$$

$$= \frac{0+0}{2+0+0} = \frac{0}{2} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

б) $u_n = n\cdot \sin\frac{\pi}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)\cdot \sin\frac{\pi}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{3^n}} = \left[1\cdot\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)'}{\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\right)'} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{3^{n+1}}\cdot\pi\cdot 3^{-(n+1)}\ln 3\,(-1)}{\cos\frac{\pi}{3^n}\cdot\pi\cdot 3^{-n}\ln 3(-1)} = \left[\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\pi}{3^n} = 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Теорема 3 (радикальный признак Коши). Если для ряда (4.3)

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = r,$$

то при

$r < 1 -$ ряд сходится,

$r > 1 -$ ряд расходится,

$r = 1 -$ вопрос о сходимости не решён (надо применять другой признак).

Радикальный признак Коши удобно применять в случае, если, например: $u_n = (\ldots)^n, (\ldots)^{3n}, (\ldots)^{5n-1}, (\ldots)^{n^2}$ и т.д.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{5n^2-2}\right)^n.$$

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$u_n=\left(\frac{3n^2+n+1}{5n^2-2}\right)^n\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+n+1}{5n^2-2}\right)^n}=\frac{3n^2+n+1}{5n^2-2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n+1}{5n^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}}=\frac{3+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{5-\frac{2}{\infty}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{5-0}=\frac{3}{5}<0\Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Теорема 4 (интегральный признак Коши). Если члены ряда (4.3) можно представить как числовые значения некоторой непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $f(n)=u_n$, то

$$\text{1) если }\int_1^{+\infty}f(x)dx\text{ сходится, то сходится и ряд }\sum_{n=1}^{+\infty}u_n;$$

$$\text{2) если }\int_1^{+\infty}f(x)dx\text{ расходится, то расходится и ряд }\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ***обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)***

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0.$$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Поскольку $u_n=\frac{1}{n^p}$, то введем в рассмотрение функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$ $(p>0)$, которая является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ и $f(n)=\frac{1}{n^p}=u_n$. При $p\neq 1$ имеем

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=$$

$$=\begin{bmatrix}p>1\Rightarrow 1-p<0\Rightarrow \text{при } b\to+\infty\quad b^{1-p}\to 0\\ p<1\Rightarrow 1-p>0\Rightarrow \text{при } b\to+\infty\quad b^{1-p}\to+\infty\end{bmatrix}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, p>1\\ +\infty,\ p<1\end{cases}.$$

Заметим, что при $p=1$ получим ***гармонический ряд***, который ***расходится***.

Вывод: обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0$$

расходится при $0<p\leq 1$ **и сходится при** $p>1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2n+3)(2n+3)}.$$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Поскольку $u_n = \frac{1}{\ln(2n+3)(2n+3)}$, то введем в рассмотрение функцию $f(x) = \frac{1}{\ln(2x+3)(2x+3)}$, которая является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$. Находим

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(2x+3)(2x+3)} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\ln(2x+3)} \cdot \frac{1}{2x+3} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} d(\ln(2x+3)) \right] = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\ln(2x+3)} \cdot d(\ln(2x+3)) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \ln(\ln(2x+3))|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} [\ln(\ln(2b+3)) - \ln \ln 5] = +\infty \Rightarrow$$

несобственный интеграл расходится, а, значит, расходится и исследуемый ряд.

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad u_n > 0 \ \forall n \in \boldsymbol{N}, \qquad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \quad v_n > 0 \ \forall n \in \boldsymbol{N}. \qquad (4.5)$$

Теорема 5 (признак сравнения). Пусть каждый член ряда (4.4) не превосходит соответствующего члена ряда (4.5), то есть

$$0 < u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда:

1) если ряд (4.5) сходится, то и ряд (4.4) сходится, то есть из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами;

2) если ряд (4.4) расходится, то и ряд (4.5) расходится, то есть из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^5 + 3}.$$

Решение. Поскольку для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2n^5 + 3} < \frac{1}{n^5},$$

причем $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ – сходящийся ряд Дирихле $(p = 5 > 1)$, то и исходный ряд тоже сходится.

Теорема 6 (предельный признак сравнения). Если существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = A, \qquad 0 < A < +\infty,$$

то ряды с положительными членами (4.4) и (4.5) сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7n+3}{4n^3+n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} tg\frac{\pi}{6n}$.

Решение

а) воспользуемся предельным признаком сравнения. Для исследуемого ряда подберём подходящий ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

который сходится, поскольку $p=2>1$.

В нашем случае

$$u_n=\frac{7n+3}{4n^3+n^2-2},\qquad v_n=\frac{1}{n^2}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7n+3}{4n^3+n^2-2}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(7n+3)\cdot n^2}{4n^3+n^2-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^3+3n^2}{4n^3+n^2-2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{7+\frac{3}{n}}{4+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\frac{7+\frac{3}{\infty}}{4+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{7+0}{4+0-0}=\frac{7}{4}=A,\qquad 0<A<+\infty\Rightarrow$$

исходный ряд тоже сходится;

б) применим предельный признак сравнения. Исходный ряд сравним с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{tg\frac{\pi}{6n}}{\frac{1}{n}}=\left[tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\left[\text{при } n\to+\infty\ \ \frac{\pi}{6n}\to 0\Rightarrow\cos\frac{\pi}{6n}\to 1\right]=$$

$$=1\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}\cdot\frac{6}{\pi}}=\frac{\pi}{6}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}=\frac{\pi}{6}\cdot 1=\frac{\pi}{6}=A, 0<A<+\infty\Rightarrow$$

исходный ряд тоже расходится.

Заметим, что при вычислении последнего придела воспользовались первым замечательным пределом

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Задания для решения

3. Исследовать на сходимость числовые ряды.

3.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n+3)}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\cdot\sin\frac{6}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{5n^2-3}\right)^{3n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^3(6n+5)(6n+5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{\sqrt{7n^3+n^2+4}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{8n^2+n+2}{n^3+3n-1}$.

3.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)!}{5n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{\pi}{5n^2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9n^2+2}{5n^2-2}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^4(2n+9)(2n+9)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n-2}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{8n+1}{n^7+3n-2}$.

3.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-1}{5^n \cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{2}{4n^3}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^5-3n+10}{6n^6-3}\right)^{n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(10n+5)(10n+5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{4n^2-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{11n-2}{n^7+3n^5-1}$.

3.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{3^n \cdot (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{4\pi}{2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+5n-4}{9n^3-3}\right)^{3n+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)\cdot \ln n \cdot n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{4n^3+2n+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{7n^2+3n-5}$.

3.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+2)!}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n+4)\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{7n-3}\right)^{n^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(12n-5)(12n-5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{6n-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{25}{6n^3+3n-7}$.

3.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)^2}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin\frac{2\pi}{n^4}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n-1}{2n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^5(4n-2)(4n-2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{\sqrt{n^6+2n^2+8}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7+n^2+20}{9n^{10}+3n-1}$.

3.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{5n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n^2+1)\cdot \sin\frac{1}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+3n-2}{2n^2-3n+1}\right)^{5n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^3(n+2)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{2n^8+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+9}{5n^3+3n-3}$.

3.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\cdot n!}{8^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{10}{5^n}\right)^{7n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^4+3n^2-1}{5n^2-3}\right)^{3n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^8(2n+5)(2n+5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{10n^8+n^2+1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+9}{4n^3+3n-1}$.

3.9 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} (3n-2)\cdot \mathrm{tg}\frac{3}{4^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+3}{4n^2-1}\right)^{3n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^9(4n-3)\,(4n-3)}$; д) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{5n-2}}$; е) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5+n^4+2}{4n^6+3n+5}$.

3.10 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+5)!}{n^3\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{arctg}\frac{n}{n^2+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8n-5}{3n+2}\right)^{n+2}$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^4(3n+1)\,(3n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{\sqrt{n^6+4}}$; е) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n+3}{n^7+3n-2}$.

4.4 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов.

Рассмотрим числовой ряд, составленный из модулей членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Теорема 7 (общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов). Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится соответствующий ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, то сходится и сам знакопеременный ряд. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся.***

Обратное утверждение неверно: если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, то это не означает, что будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называют ***условно сходящимся.***

Следует отметить, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ содержит положительные члены, поэтому для исследования его сходимости можно применять рассмотренные ранее признаки Даламбера, радикальный и интегральный Коши, сравнения.

Знакочередующимся рядом называют ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}u_n\,, u_n > 0. \qquad (4.6)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 8 (признак Лейбница). Если для членов знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n\,,u_n>0$$

выполняются следующие два условия:

1) $u_1>u_2>\cdots>u_n>\cdots$, то есть последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает;

2) $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$, то есть общий член ряда стремится к нулю,

то ряд сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству

$0<S<u_1$.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{7n^2+n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{5n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(3n-2)!}$.

Решение

а) воспользуемся признаком Лейбница. Проверим выполнение условия 2):

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{7n^2+n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{7+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{7+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{7}\neq0\Rightarrow$$

ряд расходится;

б) воспользуемся признаком Лейбница. Проверим выполнение условий 1)-2):

1) $u_1=\frac{1}{2}>u_2=\frac{1}{7}>u_3=\frac{1}{12}\ldots>u_n=\frac{1}{5n-3}>\cdots$ – выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{5n-3}=\dfrac{1}{\infty}=0$ – выполняется.

Таким образом, ряд сходится. Исследуем на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5n-3}$$

и к нему применим предельный признак сравнения. Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5n-3}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5n-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5-\frac{3}{n}}=\frac{1}{5-\frac{3}{\infty}}=$$

$$=\frac{1}{5-0}=\frac{1}{5}\left(0<\frac{1}{5}<+\infty\right)\Rightarrow$$

ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5n-3}$ расходится.

Таким образом, исходный знакочередующийся ряд сходится условно;

в) составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)!}$$

и к нему применим признак Даламбера.

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)-2)!} = \frac{1}{(3n+3-2)!} = \frac{1}{(3n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} : \frac{1}{(3n-2)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n-2)!}{(3n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n-2)!}{(3n-2)! \cdot (3n-1) \cdot (3n) \cdot (3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n) \cdot (3n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \Rightarrow$$

ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)!}$ сходится, а, значит, сам знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задания для решения

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

4.1 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5^n}$. **4.2** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{(2n)!}$. **4.3** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n+1}{5n-1}$.

4.4 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{2n+1}}$. **4.5** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{(2n-1)!}$. **4.6** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n^3-2}$.

4.7 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}$. **4.8** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. **4.9.** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(3n+1)!}$.

4.5 Функциональные ряды. Область сходимости

Пусть функции $u_n(x), n \in \boldsymbol{N}$ определены в области $\boldsymbol{D}$. Тогда ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,,\ x \in \boldsymbol{D} \qquad (4.7)$$

называется ***функциональным рядом***.

При фиксированном значении $x_0 \in \boldsymbol{D}$ функциональный ряд (4.7) становится числовым и может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если для $x_0 \in \boldsymbol{D}$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (4.7) сходится в точке x_0, и точку x_0 называют ***точкой сходимости***.

Если функциональный ряд (4.7) сходится в каждой точке $x \in \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{D}$, то этот ряд называется сходящимся на множестве $\boldsymbol{E}$, а множество $\boldsymbol{E}$ называется ***областью сходимости*** ряда.

Для функционального ряда (4.7) составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|. \tag{4.8}$$

Если ряд (4.8) сходится при $x \in \boldsymbol{E_1} \subset \boldsymbol{D}$, то ряд (4.7) называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве $\boldsymbol{E_1}$.

Таким образом, для нахождения области сходимости функционального ряда (4.7) можно составить ряд из модулей (4.8) и воспользоваться признаками сходимости числовых рядов. Например, при использовании признаков Даламбера или радикального Коши сходимости рядов нужно

1) найти $\varphi(x)$ по одной из формул

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \varphi(x) \text{ или } \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \varphi(x);$$

2) решив неравенство $\varphi(x) < 1$, получить ***интервал сходимости***, то есть множество всех значений переменной x, при которых ряд (4.7) сходится абсолютно (соответственно, на множестве решений неравенства $\varphi(x) > 1$ ряд расходится);

3) исследовать сходимость функционального ряда (4.7) в граничных точках интервала сходимости. Пусть для определённости этими точками являются числа x_i. Для каждого значения x_i составить числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_i)$ и исследовать его на абсолютную или условную сходимость;

4) объединить интервал сходимости с теми значениями x_i, при которых соответствующий ряд сходится. Полученный результат будет областью сходимости функционального ряда (4.7).

Также следует отметить, что для определения области сходимости иногда полезно применять признак сравнения.

Пример. Найти области сходимости функциональных рядов

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n(x-2)^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$.

Решение

а) применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}(x-2)^{n+1}}\cdot\frac{3^n(x-2)^n}{n^2}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2 3^n(x-2)^n}{n^2 3^n 3(x-2)^n(x-2)}\right| = \frac{1}{3|x-2|}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3|x-2|}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3|x-2|}\cdot 1 = \frac{1}{3|x-2|}.$$

Найдём интервал сходимости.

$$\frac{1}{3|x-2|} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 3 \Leftrightarrow |x-2| > \frac{1}{3}.$$

Последнее неравенство представим в виде объединения двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x-2<-\dfrac{1}{3} \\ x-2>\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{5}{3} \\ x>\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$ −интервал сходимости функционального ряда.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости, то есть при $x = \frac{5}{3}$ и $x = \frac{7}{3}$.

Подставим $x = \frac{7}{3}$ в исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n\left(\frac{7}{3}-2\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \frac{1}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 -$$

знакоположительный ряд, который расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости числовых рядов

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \neq 0.$

Подставим $x = \frac{5}{3}$ в исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n\left(\frac{5}{3}-2\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n(-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2 -$$

знакочередующийся ряд, который расходится, так как для него тоже не выполняется необходимый признак сходимости числовых рядов.

Таким образом, для данного функционального ряда область сходимости совпадает с интервалом сходимости, то есть $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right) -$ область сходимости;

б) применим признак сравнения к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|$. Сравним этот ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, который, как известно, сходится, так как $p = 4 > 1$. Поскольку при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ и $n \in \boldsymbol{N}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4},$$

то по признаку сравнения исследуемый ряд с меньшими слагаемыми сходится при любых x. То есть его область сходимости – вся числовая ось: $(-\infty; +\infty)$.

Задания для решения

5. Найти области сходимости функциональных рядов.

5.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$. **5.2** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}(x^2-4x+6)^n$. **5.3** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!\,(x+5)^n}$.

5.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln(2x-1))^n$. **5.5** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^{n+1}(n^3+2)}$. **5.6** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{tg\,\frac{1}{4^n}}{(x+3)^n}$.

5.7 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n}{4n^2+1}}{(x+1)^n}$. **5.8** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+4}{n(x-2)^{3n}}$. **5.9** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n(x-3)^{3n}}$. **5.10** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+1}{e^{nx}}$.

4.6 Степенные ряды

Степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{4.9}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – числа, называемые ***коэффициентами ряда.***

Очевидно, что область сходимости степенного ряда содержит, по крайней мере, одну точку $x = x_0$.

Исследования сходимости степенных рядов основаны на применении следующей теоремы.

Теорема Абеля (основное свойство степенных рядов). Если степенной ряд (4.9) сходится при некотором значении $x = r \neq x_0$, то он сходится абсолютно при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x-x_0| < |r-x_0|$. Если же ряд (4.9) расходится при некотором значении $x = r_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0| > |r_1-x_0|$.

Следствие. Для всякого степенного ряда (4.9) существует ***интервал сходимости*** с центром в точке x_0:

$$|x-x_0| < R \text{ или } (x_0-R; x_0+R),$$

внутри которого степенной ряд сходится и вне которого ряд расходится.

На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ различные степенные ряды ведут себя по-разному, то есть могут как сходиться, так и расходиться.

Неотрицательное число $R-$ половина длины интервала сходимости – называется ***радиусом сходимости*** этого ряда. В частности, когда ряд (4.9) сходится только лишь в одной точке $x = x_0$, то считается, что радиус сходимости равен нулю: $R = 0$; если же ряд (4.9) сходится при всех значениях $x \in (-\infty, +\infty)$, то радиус сходимости равен бесконечности: $R = +\infty$.

Если среди коэффициентов $a_1, \dots, a_n, \dots$ степенного ряда (4.9) нет равных нулю, то есть ряд содержит все положительные степени $(x-x_0)$, то область сходимости можно находить по следующему **алгоритму**:

1) найти радиус сходимости по одной из формул

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $R = 0$, то областью сходимости является одна точка $x = x_0$.

Если $R = +\infty$, то областью сходимости является интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) если $R \neq 0$ и $R \neq +\infty$, то нужно составить интервал сходимости, подставив найденное значение R в выражение:

$(x_0 - R; x_0 + R)$;

3) провести исследование на концах интервала сходимости. Для этого подставить поочерёдно $x = x_0 + R$, затем $x = x_0 - R$ в выражение ряда (4.9). В том случае, если ряд сходится в каком-либо из концов интервала сходимости, эта точка будет входить в область сходимости (то есть круглую скобку надо поменять на квадратную). В противном случае скобка остаётся без изменений.

Замечание. Если степенной ряд (4.9) содержит не все степени $(x - x_0)$, то есть является неполным, то интервал сходимости ряда находят, непосредственно, применяя признак Даламбера или радикальный Коши к функциональному ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример. Найти область сходимости степенных рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{n!}(x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2} \cdot (x-5)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n-5}(x+4)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3n+1} x^{2n}$.

Решение

а) в данном случае $a_n = \frac{2n+5}{n!}$, $x_0 = 3$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

$$a_n = \frac{2n+5}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)!} = \frac{2n+7}{(n+1)!}$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+5}{n!} : \frac{2n+7}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5) \cdot (n+1)!}{n! \cdot (2n+7)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5) \cdot n! \cdot (n+1)}{n! \cdot (2n+7)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5)(n+1)}{2n+7} =$$

$$= \left[\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c} \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+5)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{7}{n}} = \frac{+\infty \cdot 1}{2} = +\infty \Rightarrow$$

область сходимости – вся числовая ось, то есть промежуток $(-\infty; +\infty)$;

б) в данном случае $a_n = \left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2}$, $x_0 = 5$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n-1}{8n+9}\right)^{5n} = \left[\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{+\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4-\frac{1}{n}}{8+\frac{9}{n}}\right)^{5n} = \left(\frac{4}{8}\right)^{+\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$$

Поскольку $R = 0$, то областью сходимости является только одна точка $x = 5$;

в) в данном случае $a_n = \frac{1}{9n-5}$, $x_0 = -4$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

$$a_n = \frac{1}{9n-5} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{9(n+1)-5} = \frac{1}{9n+4}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{9n-5} : \frac{1}{9n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9n+4}{9n-5} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{9+\frac{4}{n}}{9-\frac{5}{n}} = \frac{9+0}{9-0} = 1.$$

Составим интервал сходимости. Для этого подставим $R = 1$ и $x_0 = -4$ в выражение $(x_0 - R; x_0 + R)$:

$$(x_0 - R; x_0 + R) = (-4-1; -4+1) = (-5; -3).$$

Проведём исследование на концах интервала сходимости.

1) при $x = -3$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n-5}(-3+4)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n-5} 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n-5},$$

являющийся знакоположительным. Применим к нему предельный признак сравнения. В качестве сравниваемого ряда возьмём расходящийся гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{9n-5} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{9n-5} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{9-\frac{5}{n}} = \frac{1}{9-0} = \frac{1}{9},$$

$0 < \frac{1}{9} < +\infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n-5}$ тоже расходится. Поэтому точка $x = -3$ не входит в область сходимости;

2) при $x = -5$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}(-5+4)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}(-1)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{9n-5},$$
являющийся знакочередующимся. Поскольку соответствующий ряд из модулей расходится (см. п. 1), то проверим выполнение условий признака Лейбница

1) $u_1=\frac{1}{4}>u_2=\frac{1}{13}>u_3=\frac{1}{22}>\cdots>u_n=\frac{1}{9n-5}>\cdots$ – выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{9n-5}=\frac{1}{+\infty}=0$ – выполняется.

Значит, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{9n-5}$ сходится условно, поэтому точка $x=-5$ входит в область сходимости.

Таким образом, область сходимости: $[-5;-3)$;

г) заданный ряд является неполным. Для нахождения интервала сходимости применим признак Даламбера для соответствующего ряда, составленного из абсолютных величин.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{2(n+1)}}{3(n+1)+1}\cdot\frac{3n+1}{n^2x^{2n}}\right|=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{3n+1}{3n+4}\cdot x^2\right|=x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{3n+4}=$$
$$=x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}=x^2\cdot1\cdot1=x^2,$$
$x^2<1\Leftrightarrow-1<x<1.$

Итак, $(-1;1)$ – интервал сходимости.

Проведем исследование на концах интервала сходимости.

1) при $x=1$ получим числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}1^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1},$$
который расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3+\frac{1}{n}}=\frac{+\infty}{3+0}=+\infty\neq0;$$

2) при $x=-1$ получим такой же расходящийся числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}(-1)^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}1^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}.$$

Значит, точки $x=1$ и $x=-1$ не входят в область сходимости.

Область сходимости: $(-1;1)$.

Задания для решения

6. Найти области сходимости степенных рядов.

6.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n+5}\right)^{7n^2}\cdot x^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^3+3}(x-2)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n7^n}(x-1)^{2n}$.

6.2 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+3)!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n^2-1}\right)^{n+2}\cdot(x-4)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n5^n}(x+1)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{5n-2}(x-1)^{2n}$.

6.3 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{5^n}(x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+5}{4n^3-1}\right)^{n}\cdot x^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n4^{n+1}}{n+1}(x+5)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3n^3+1}(x-2)^{3n}$.

6.4 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,(n+1)}{n^2}(x+1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{6n^2}\cdot(x-5)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{27^n(n+1)}(x-2)^{3n}$.

6.5 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n+1}(x+8)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n^2+1}{2n^3-1}\right)^{3n+1}\cdot x^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}(x-4)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n^3+1}(x-1)^{2n+1}$.

6.6 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^3+9}{n^2+1}\right)^{n+2}\cdot(x-5)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}(x+4)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}(x+3)^{2n+1}$.

6.7 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^n}{(n+2)!}(x-8)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n+9}{n+5}\right)^{n^2+n}\cdot(x+1)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3n+1}}x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5n-2}(x+2)^{4n}$.

6. 8а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^2 \cdot n!}(x-3)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{10n+1}{5n-1}\right)^{5n^2+n} \cdot x^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+6}}(x+4)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n(n+3)}(x-4)^{2n-1}$.

6. 9а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,(3n+2)}{n^2} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{7n+2}\right)^{n^2+n} \cdot (x-1)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+4)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5n-2} x^{2n}$.

6. 10а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{(3n)!}(x-3)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1}\right)^{n^2+3n} (x-5)^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2n+1} \cdot x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{125^n}{3n+1}(x+4)^{3n}$.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ
ВАРИАНТ 1

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$ 1) $\dfrac{2+y^2}{x^2+1}=C$; 2) $\dfrac{\sqrt{(2+y^2)^3}}{x^2+1}=C$; 3) $\dfrac{\sqrt{(2+y^2)^5}}{x^2+3}=C$; 4) $\dfrac{3}{2}\dfrac{2+y^2}{x^2+1}=C$; 5) $\dfrac{(2+y^2)^3}{x^2+1}=C$.
2	Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2.$ 1) $\lvert 2x-y\rvert=C_1x$; 2) $\ln\lvert 2x-y\rvert=C_1x$; 3) $\ln\left\lvert\dfrac{10y-5}{7x+1}\right\rvert=C_1x^2$; 4) $\ln\left\lvert\dfrac{2x-y}{y-x}\right\rvert=C_1x$; 5) $\left\lvert\dfrac{2x+y}{y+x}\right\rvert=C_1x$.
3	Найти решение задачи Коши $y'-\dfrac{y}{x}=x^2,\ y(1)=0.$ 1) $y=\dfrac{x}{2}(x^2-1)$; 2) $arctgy=\dfrac{x}{2}(x^2-1)$; 3) $y=\dfrac{x^2}{2}(x^2-3)$; 4) $y=\ln\dfrac{\lvert x\rvert}{2}(x^2-1)$; 5) $y=x(x^4-5)$.
4	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''=\sin x, y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0.$ 1) $y=\sin x+x^2$; 2) $y=\dfrac{4}{5}\cos x+x^2$; 3) $\cos x+x/2$; 4) $y=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$; 5) $y=\sin x+\dfrac{x}{2}$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''x\ln x=y'.$ 1) $y=c_1(x\ln\lvert x\rvert-x)+c_2$; 2) $y=c_1x\ln\lvert x\rvert+c_2$; 3) $y=c_1(x\ln\lvert x\rvert-x)^4$; 4) $y=c_1(x\ln x-x)+c_2\ln\lvert x\rvert$; 5) $y=c_1(x\ln x^2-18x)+c_2$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y=0.$ 1) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$; 3) $y=C_1e^{-2x}+C_2$; 4) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 5) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y''+2y'=1-x^2.$ 1) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/6$; 2) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/12+7$; 3) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/6+\ln\lvert x\rvert$; 4) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^3/6+x^2/4+x/4$; 5) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/6+5x/7+9$.

ВАРИАНТ 2

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy.$ 1) $arctgx-\sqrt{3+y^2}=C$; 2) $\arcsin x-\sqrt{3+y^2}=C$; 3) $arctgx-\frac{1}{2}\sqrt{3+y^2}=C$; 4) $\frac{x^2+2}{(3+y^2)^{3/2}}=C$; 5) $arctgx-\frac{1}{2}\ln\sqrt{3+y^2}=C$
2	Найти общий интеграл дифференциального уравнения $2y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+3.$ 1) $\lvert -x-y\rvert=C_1x$; 2) $\ln\lvert 2x-3y\rvert=C_1x$; 3) $\ln\left\lvert\frac{-y-5}{9x+1}\right\rvert=C_1x^2$; 4) $\left\lvert\frac{-x-y}{y+3x}\right\rvert=C_1x$; 5) $\ln\left\lvert\frac{x-y}{y+3x}\right\rvert=C_1x$.
3	Найти решение задачи Коши $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2x, y(-1)=\frac{3}{2}.$ 1) $y=\frac{5x}{2}(3x^2-1)$; 2) $\ln y=\frac{x}{2}(x^2-9)$; 3) $y=(\frac{x^2}{2}+1)(x+2)$; 4) $y=\frac{\lvert x\rvert}{2}(x^2-9)$; 5) $y=x^2(x^4-5)$.
4	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''=\frac{1}{x}, y(\ )=\frac{1}{4}, y'(\ )=y''(\ )=0.$ 1) $y=\frac{x^2}{2}\ln\lvert x\rvert-\frac{3}{4}x^2+x$; 2) $y=\frac{x^2}{2}\ln\lvert x\rvert-\frac{3}{4}x^2$; 3) $y=\cos 6x+\frac{x}{2}$; 4) $y=\frac{x^2}{2}$; 5) $y=\frac{x^2}{3}\ln\lvert x\rvert+\frac{3}{4}x^2+x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''x\ln x=y'.$ 1) $y=c_1(x\ln\lvert x\rvert+5x)+c_2$; 2) $y=c_1x\ln\lvert x\rvert+c_2$; 3) $y=c_1(x\ln\lvert x\rvert-x)^4$; 4) $y=c_1x\ln x-4x+c_2\ln\lvert x\rvert$; 5) $y=c_1(x\ln\lvert x\rvert-x)+c_2$.
6	Найти общее решение $y''-10y'+25y=0.$ 1) $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$; 2) $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$; 3) $y=C_1e^{-2x}+C_2$; 4) $y=e^{x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)$; 5) $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y''+2y'+5y=6x-1.$ 1) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/6+8$; 2) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^6/5+7$; 3) $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+6x/5-17/25$; 4) $y=e^{-2x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+6x/5-9/25$; 5) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^2/6+5x/7+9$.

ВАРИАНТ 3

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$ 1) $\left\|2-x^2\right\|+\frac{3}{2}\sqrt{3+y^2}=C;$ 2) $\left\|2-x^2\right\|+\sqrt{3+y^2}=C;$ 3) $\ln\left\|2-x^2\right\|+\sqrt{3+y^2}=C;$ 4) $(2+x^2)\sqrt{(3+y^2)^3}=C;$ 5) $\ln\left\|2+x^2\right\|=C.$
2	Найти общий интеграл $y'=\frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$ 1) $arctg\frac{y}{x}=\ln\left\|C_1x(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2)\right\|$; 2) $\ln\left\|2x-y\right\|=C_1x$; 3) $\frac{y}{x}=\ln\left\|C_1x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right\|$; 4) $\ln\left\|\frac{2x-y}{y-x}\right\|=C_1x$; 5) $arctg\frac{y}{x}=\ln\left\|C_1y^2\right\|$.
3	Найти решение задачи Коши $y'+\frac{y}{2x}=x^2,\ y(1)=1.$ 1) $y=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{5}{7}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $arctgy=\frac{x}{2}\sin(x^2-1)$; 3) $y=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{5}{7}\right)x$; 4) $y=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{9}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$; 5) $y=x(x^4-5)$.
4	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''=6/x^3,\ y(1)=0,\ y'(1)=5,\ y''(1)=1.$ 1) $y=6\ln\|x\|+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}$; 2) $y=\ln\|x\|+\frac{3}{2}x^2-x$; 3) $y=\cos x+\frac{x}{2}$; 4) $y=3\ln\|x\|+2x^2-x-2x$; 5) $y=9\sin x+\frac{x}{2}$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''x\ln x=2y'.$ 1) $y=c_1(x\ln^2\|x\|-2x\ln\|x\|+2x)+c_2$; 2) $y=c_1x\ln\|x\|+c_2$; 3) $y=c_1(x\ln^2\|x\|+2x)+c_2$; 4) $y=c_1(x\ln x-x)+c_2\ln\|x\|$; 5) $y=c_1(x\ln x^2-18x)+c_2$
6	Найти общее решение $y''+3y'+2y=0.$ 1) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-2x}$; 2) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^{-2x}+C_2$; 4) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 5) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y''+6y'+13y=12x.$ 1) $y=e^{-3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+12x/13$; 2) $y=c_1+c_2e^{-2x}-x^6/5+7$; 3) $y=e^{-3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+12x/13-72/169$; 4) $y=e^{-2x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+6x/5$; 5) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

ВАРИАНТ 4

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$. 1) $\frac{1+x^2}{4+y^2} = C$; 2) $1+x^2+\ln\left\|4+y^2\right\| = C$; 3) $\sqrt{1+x^2}+\ln\left\|4+y^2\right\| = C$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\,\ln\left\|4+y^2\right\| = C$; 5) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2} = C$.
2	Найти общий интеграл $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$. 1) $\left\|2x-y\right\| = C_1 x$; 2) $\frac{C_1 x}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^4} = e^{-2\frac{y}{x}}$; 3) $\frac{C_1 x}{\left(\frac{y}{x}+8\right)^4} = e^{\frac{y}{x}}$; 4) $\ln\left\|\frac{x-5y}{y-x}\right\| = C_1 x^2$; 5) $\left\|\frac{2x-y}{y-6x}\right\| = C_1 x$.
3	Найти решение задачи Коши $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, y [illegible] $= -\frac{5}{6}$. 1) $y = \left(\frac{x}{6}-5\right)\frac{1}{x^2}$; 2) $arctgy = \frac{x}{2}(x^2-1)$; 3) $y = \left(\frac{x^6}{6}-1\right)\frac{x-1}{x^2}$; 4) $y = \ln\frac{\left\|x\right\|}{2}(x^2-1)$; 5) $y = \left(\frac{x^6}{6}-1\right)\frac{1}{x^2}$.
4	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 4\cos 2x$, y [illegible] $= 1$, y' [illegible] $= 3$. 1) $y = \sin 2x + 3x + 2$; 2) $y = -\cos 2x + 3x$; 3) $y = -\cos 2x + 3x + 2$; 4) $y = \cos x + x^2/2$; 5) $y = \sin x + x/2$..
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = y'$. 1) $y = c_1 x^2/2 + c_2 x + 56$; 2) $y = c_1 x\ln\left\|x\right\| + c_2$; 3) $y = c_1(x\ln^2\left\|x\right\| + 2x) + c_2$; 4) $y = c_1 x^2/2 + c_2$; 5) $y = c_1 x^2/2 + c_2 x$.
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 0$. 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$; 2) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{2x}$; 3) $y = C_1 e^{2x} + C_2$; 4) $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; 5) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = 49 - 24x^2$. 1) $y = e^{-3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + 12x/13$; 2) $y = c_1 + c_2 e^6 - x^6/5 + 7$; 3) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 24x^2 + 97$; 4) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 24x^2 + 7x$; 5) $y = e^{-3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$.

ВАРИАНТ 5

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$ 1) $\dfrac{(1+x^2)^3}{\sqrt{2+y^2}} = C;$ 2) $\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^3}{2+y^2}} = C$; 3) $arctg(1+x^2) + \sqrt{2+y} = C;$ 4) $arctg(1+x^2) + \ln\sqrt{2+y^2} = C;$ 5) $\dfrac{(1+x^2)^{3/2}}{\ln\sqrt{2+y^2}} = C;$
2	Найти общий интеграл $y' = \dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}.$ 1) $\dfrac{y}{x} = \ln\left\|C_1x(1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\|$; 2) $\ln\|2x-y\| = C_1x$; 3) $arctg\,\dfrac{y}{x} = \ln x^y$; 4) $\ln\left\|\dfrac{2x-y}{y-x}\right\| = C_1x$; 5) $3arctg\,\dfrac{y}{x} = \ln\left\|C_1x(1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\|$.
3	Найти решение задачи Коши $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1.$ 1) $y = 6(2x-8)/x^3$; 2) $arctgy = x(x^2-1)/2$; 3) $y = (2x-1)/x^3$; 4) $y = \ln\|x\|(x^2-1)$; 5) $y = x(x^4-5)$.
4	Найти частное решение $y'' = \dfrac{1}{1+x^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 1) $y = \sin 4x + x^2$; 2) $y = xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln\left\|1+x^2\right\|$; 3) $y = arctgx - 9\ln\left\|1+x^2\right\|$; 4) $y = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$; 5) $y = \sin x + \dfrac{x}{2}.$
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = y' + x^2.$ 1) $y = x^4/5 + c_1x^2/2 + c_2$;2) $y = x^4/8 + c_1x + c_2$;3) $y = x^4/8 + c_1x^2/2 + c_2$; 4) $y = c_1x^2/2 + c_2$; 5) $y = c_1x^2/2 + c_2x$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0.$ 1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$; 3) $y = C_1e^{3x} + C_2$; 4) $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 5) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = (x-1)^2.$ 1) $y = e^{-3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + 12x/13$; 2) $y = c_1 + c_2e^{-2x} + x^3/6 - 3x^2/4$; 3) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 24x^2$; 4) $y = c_1 + c_2e^{-2x} + x^3/6 - 3x^2/4 + 5x/4$; 5) $y = c_1 + c_2e^{-2x} + 3x^2/4 + 5x/4.$

ВАРИАНТ 6

№ задания	Содержание задания
1	Решить дифференциальное уравнение $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$. 1) $arctgy - \frac{1}{2}\ln\left\|1-x^2\right\| = C$; 2) $arctgy + \ln\left\|1-x^2\right\| = C$; 3) $arctgy^2 + \frac{1}{2}\left\|1-x^2\right\| = C$; 4) $arctgy + arctg\left\|1-x^2\right\| = C$; 5) $y - \frac{1}{2}\ln\left\|1-x^2\right\| = C$.
2	Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$. 1) $\left\|2x-y\right\| = C_1 x$; 2) $\ln\left\|2x-y\right\| = C_1 x$; 3) $\ln\left\|\frac{10y-5}{7x+1}\right\| = C_1 x^2$; 4) $\ln\left\|\frac{2x-y}{y-x}\right\| = C_1 x$; 5) $\left\|\frac{2x-y}{y-x}\right\| = C_1 x$.
3	Найти решение задачи Коши $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$. 1) $y = \frac{x}{2}(x^2-1)$; 2) $arctgy = \frac{x}{2}(x^2-1)$; 3) $y = \frac{x^2}{2}(x^2-3)$; 4) $y = \ln\frac{\left\|x\right\|}{2}(x^2-1)$; 5) $y = x(x^4-5)$.
4	Найти частное решение дифференциального уравнения $xy''' = 2,\ y(\;) = \frac{1}{2},\ y'(\;) = y''(\;) = 0.$ 1) $y = \sin x + x^2$; 2) $y = 4/5\cdot\cos x + x^2$; 3) $y = \cos x + x/2$; 4) $y = \cos x + x^2/2$; 5) $y = \sin x + x/2$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''tgx = y' + 1$. 1) $y = c_1\cos x - x + c_2$ 2) $y = c_1 x^2 - x + c_2$; 3) $y = c_1\sin x + c_2$ 4) $y = c_1\cos x - \ln\left\|x\right\| + c_2$; 5) $y = c_1\cos x + c_2$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$. 1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$; 3) $y = C_1e^{3x} + C_2$; 4) $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 5) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{2x}$.
7	Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 4x^2$. 1) $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$; 2) $y = c_1\cos x + c_2\sin x) - 24x^2$ 3) $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + 4x^2/5 - 16x/25 + 8/125$; 4) $y = e^x + 4x^2/5 - 16x/25 + 8/125$; 5) $y = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + x^2/25$

Ответы к тестам

Задание	Вариант					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	1	4	5	2	1
2	5	4	1	2	5	5
3	1	3	1	5	3	1
4	3	1	4	3	2	3
5	1	5	1	4	3	1
6	5	2	2	1	5	5
7	4	3	3	3	4	3

Контрольные вопросы

Вопросы к теме «Комплексные числа »

1. Что называют комплексным числом?
2. Какие комплексные числа называются сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Когда комплексное число равно нулю?
5. Какие формы записи комплексных чисел Вы знаете?
6. Что называют алгебраической формой записи комплексного числа?
7. Какая запись называется тригонометрической формой записи комплексного числа?
8. Какая запись называется показательной формой записи комплексного числа?
9. Записать комплексные числа $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 6i$ в тригонометрической и показательной формах.
10. Как складывают и вычитают комплексные числа?
11. Умножение комплексных чисел.
12. Деление комплексных чисел.
13. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 5i,\quad z_2 = 2 + i,\ z_3 = 1 - i$. Найти $z = \dfrac{z_1^{\ 2} - z_1 \cdot z_2 + z_2}{z_1 - z_3}$.
14. Возведение комплексного числа в степень.
15. Извлечение корня из комплексного числа.

Вопросы к теме «Дифференциальные уравнения»

1. Что называется дифференциальным уравнением n-ого порядка?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется общим решением дифференциального уравнения.
4. Какое уравнение называется уравнением с разделенными переменными?
5. Какое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
6. Какая функция называется однородной?

7. Проверить, является ли функция $f(x,y)=\frac{\sqrt[4]{x^4+y^4}}{y}$ однородной функцией нулевого измерения.
8. Проверить, является ли функция $f(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{y}$ однородной функцией нулевого измерения.
9. Проверить, является ли функция $f(x,y)=\frac{\sqrt[4]{x^4+y^2x^2}}{x}$ однородной функцией нулевого измерения.
10. Какое уравнение называется однородным? Как решаются уравнения такого типа?
11. Запишите вид линейного уравнения первого порядка.
12. Метод Бернулли как метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
13. Какое уравнение называется уравнением Бернулли? Методы его решения.
14. Методы решения уравнений типа $y''=f(x)$.
15. Методы решения уравнений типа $y''=f(x,y')$.
16. Методы решения уравнений типа $y''=f(y,y')$.
17. Решить уравнение $y''=x^2$.
18. Решить уравнение $y''=\cos x$
19. Решить уравнение $y''=(x-2)^4$.
20. Запишите в общем виде линейное однородное и неоднородное дифференциальное уравнение n-ого порядка.
21. Дайте определение линейной зависимости и линейной независимости функций $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$.
22. Проверить, являются ли функции $y_1=x^3$, $y_2=4x^4$ линейно зависимыми.
23. Проверить, являются ли функции $y_1=3x^3$, $y_2=8x^3$ линейно зависимыми.
24. Проверить, являются ли функции $y_1=\sin x$, $y_2=x$ линейно зависимыми.
25. Что называют определителем Вронского?
26. Чему равен определитель Вронского, если функции y_1, y_2, из которых он составлен, линейно зависимы?
27. Корни характеристического уравнения действительные разные. Как в этом случае запишется общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

28. Корни характеристического уравнения действительные равные. Как в этом случае запишется общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
29. Корни характеристического уравнения комплексные. Как в этом случае запишется общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
30. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$.
31. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$.
32. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.
33. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$.
34. Найти общее решение дифференциального уравнения $4y'' + 8y' - 5y = 0$.
35. Как записывается общее решение неоднородного уравнения?

Вопросы к теме «Кратные интегралы»

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Сформулируйте свойства двойного интеграла.
3. Расскажите о сведении двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования.
4. Расскажите о сведении двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области интегрирования.
5. Дайте определение полярной системы координат.
6. Запишите формулы перехода к полярной системе координат.
7. Запишите формулу преобразования координат в двойном интеграле при переходе к полярной системе координат.
8. Запишите формулы, используемые для вычисления объемов тел и площадей.
9. Запишите формулу, используемую для вычисления массы плоской пластины.
10. Дайте определение тройного интеграла.
11. Сформулируйте свойства тройного интеграла.
12. Расскажите о сведении тройного интеграла к повторным в случае прямоугольной области интегрирования.
13. Расскажите о сведении тройного интеграла к повторным в случае криволинейной области интегрирования.
14. Дайте определение цилиндрической системы координат.
15. Запишите формулы перехода к цилиндрической системе координат.
16. Запишите формулу преобразования координат в тройном интеграле при переходе к цилиндрической системе координат.
17. Дайте определение сферической системы координат.
18. Запишите формулы перехода к сферической системе координат.
19. Запишите формулу преобразования координат в тройном интеграле при переходе к сферической системе координат.

20. Запишите формулы, используемые для вычисления объемов тел.

Вопросы к теме «Ряды»

1. Что называют числовым рядом?
2. Что называют n-ой частичной суммой ряда?
3. Что называют суммой ряда?
4. Какой ряд называется сходящимся, расходящимся?
5. Сформулируйте свойства числовых рядов.
6. Что называют произведением ряда на действительное число α?
7. Сформулируйте признак расходимости числового ряда.
8. Расскажите о сходимости и расходимости обобщенного гармонического ряда.
9. Сформулируйте признак сравнения двух числовых рядов.
10. Сформулируйте предельный признак сравнения двух числовых рядов.
11. Сформулируйте признак Даламбера.
12. Сформулируйте радикальный признак Коши.
13. Сформулируйте интегральный признак Коши.
14. Что называют знакочередующимся рядом?
15. Какой знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся?
16. Какой знакочередующийся ряд называется условно сходящимся?
17. Какой знакочередующийся ряд называется расходящимся?
18. Сформулируйте признак Лейбница.
19. Что называют степенным рядом?
20. Сформулируйте теорему Абеля.
21. Что называют радиусом сходимости степенного ряда?
22. Что называют интервалом сходимости степенного ряда?
23. Что называют областью сходимости степенного ряда?

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2004.– 608 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
3. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 2. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Выш. школа, 2008. – 304 с.
4. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Физматлит, 2001. – 304 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. – 416 с.
6. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1990. – 440 с.
7. Соболев, С. К. Дифференциальные уравнения: методические указания к решению задач / С. К. Соболев. – Москва : МГТУ им. Баумана, 2008. – 25 с.
8. Иванов, В. И. Дифференциальные уравнения / В. И. Иванов. – Москва : РГУ нефти и газа, 2013. – 24 с.
9. Киясов, С. Н. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач / С. Н. Киясов, В. В. Шурыгин. – Казань : Казанский федеральный университет, 2011. – 112 с.

Содержание

Приложение А

Формулы дифференцирования

1. $C' = 0$;

2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$**;**

3. $(a^{u})' = a^{u}\ln a \cdot u'$;

4. $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$;

5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ **;**

9. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

10. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

13. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;.

14. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$;

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$;

3. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + c$;

4. $\int e^{u}du = e^{u} + c$;

5. $\int \sin u du = -\cos u + c$;

6. $\int \cos u du = \sin u + c$;

7. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + c$;

8. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + c$; **;**

9. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c; (a \neq 0)$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c; (a > 0)$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$;

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$;.

13. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + c$;.

14. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right| + c$ **.**

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса заочной формы обучения

Составители:
Дунина Елена Брониславовна
Никонова Татьяна Викторовна
Рубаник Оксана Евгеньевна
Статковский Николай Степанович

Редактор Ю.А. Завацкий
Корректор Т.А. Осипова
Компьютерная верстка Е.А. Шалапухо

Подписано к печати _________. Формат ________. Усл. печ. лист. _______.
Уч.-изд. листов _______.Тираж _____экз. Заказ № _______.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210035, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.