МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Кратные интегралы

Методические указания для студентов

дневной и заочной форм обучения

ВИТЕБСК
2007

УДК
Высшая математика. Кратные интегралы: методические указания для студентов дневной и заочной форм обучения

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь,
УО “ВГТУ”, 2007.

Составители: ст. преп. Н.П. Трубникова, ст. преп. А.Я. Мисурагина, ст. преп. Т.В. Никонова, ст. преп. Н.С. Статковский

В методических указаниях изложены теоретические и практические сведения по теме кратные интегралы и их приложения. Изложение сопровождается большим количеством решенных примеров с подробными пояснениями.

Методические указания предназначены для студентов механических, технологических и экономических специальностей дневной и заочной форм обучения. Могут быть использованы на практических занятиях и для индивидуальных заданий по высшей математике.

Одобрено кафедрой ТиПМ УО “ВГТУ”
13.09.2007 г., протокол № 2

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Орещенко Л.Г.

Редактор: д.ф.-м. н, профессор Трубников Ю.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2007 г., протокол №______

Ответственный за выпуск: Ярыго О.Д.
Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати ___________ Формат ___________ Уч.- изд. лист ________
Ризографическая печать. Тираж ______экз. Заказ №________ Цена ___________
Отпечатано на ризографе Учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”. Лицензия №0230/0133005 от 1. 04. 2004 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные методические указания представляют собой краткое изложение материала по теме «Кратные интегралы». Они могут быть использованы студентами дневной и заочной форм обучения различных специальностей.

В работе приведены основные теоретические факты, утверждения; разобраны решения типовых задач; даны индивидуальные домашние задания и задачи для самостоятельной работы студентов в аудитории.

Большое количество разобранных примеров позволяет хорошо усвоить материал по указанной теме.

1 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Основные понятия. Свойства интеграла

На плоскости Oxy рассмотрим некоторую замкнутую область D, ограниченную замкнутой линией L. Пусть в D задана функция $z = f(x, y)$. Произвольными линиями разобьем D на n элементарных областей S_i площади которых $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ (рис. 1.1)

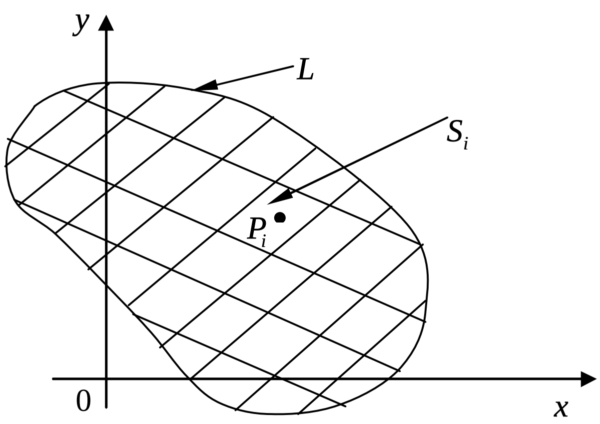


Рис. 1.1

В каждой области S_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. ***Диаметром*** d_i области S_i называется длина наибольшей из хорд, соединяющей граничные точки S_i.

Выражение вида $I_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i$ называется n-й ***интегральной суммой*** для функции $z=f\left(x,y\right)$ в области D. Вследствие произвольного разбиения области D на элементарные области S_i и случайного выбора в них точек P_i можно составить бесчисленное множество указанных сумм. Согласно теореме существования и единственности, если функция $z=f\left(x,y\right)$ непрерывна в D и линия L - кусочно-гладкая, то предел этих сумм, найденных при условии $d_i\to 0$, всегда существует и единственен.

Двойным интегралом функции $z=f\left(x,y\right)$ по области D называется предел $\lim\limits_{d_i\to 0} I_n$, обозначаемый $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dS$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dS=\lim_{d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i .$$

Здесь и далее считаем, что функция $z=f(x, y)$ непрерывна в области D и линия L - кусочно-гладкая, поэтому указанный в формуле предел всегда существует.

Укажем основные свойства двойного интеграла, его геометрический и физический смысл.

1. $\iint\limits_D dS=S_D$, где S_D - площадь интегрирования D.

2. Если подынтегральная функция $z=f(x,y)=\mu(x,y)$ - поверхностная плотность материальной пластины, занимающей область D, то масса этой пластины определяется по формуле

$$m=\iint\limits_D m\left(x,y\right)dS .$$

В этом заключается ***физический смысл двойного интеграла***.

3. Если $f\left(x,y\right)\ge 0$ в области D, то двойной интеграл численно равен объему V цилиндрического тела, находящегося под плоскостью Oxy, нижним основанием которого служит область D, верхним – часть поверхности $z=f(x, y)$, проектирующаяся в область D, а боковая поверхность – цилиндрическая, причем ее прямолинейные образующие параллельны оси Oz и проходят через границу L области D, т.е.

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy .$$

Это свойство выражает ***геометрический смысл*** двойного интеграла.

4. Если функции $z=f_i\left(x,y\right)$ $\left(i=\overline{1,k}\right)$ непрерывны в области D, то верна формула

$$\iint\limits_D\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\left(x,y\right)\right)dS=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_D f_i\left(x,y\right)dS .$$

5. Постоянный множитель C подынтегральной функции можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_D Cf\left(x,y\right)dS=C\iint\limits_D f\left(x,y\right)dS .$$

6. Если область D разбить на конечное число областей $D_1, D_2, \mathbf{K}, D_k$, не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области D равен сумме интегралов по областям D_k:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS + \mathbf{K} + \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,dS .$$

7. Для непрерывной функции $z = f(x,y)$ в области D, площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $P(x,h) \in D$, такая, что

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS = f(x,h) S_D .$$

Число $f(x,h)$ называется ***средним значением функции*** $z = f(x,y)$ в области D.

8. Если в области D для непрерывных функций $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ выполнены неравенства $f_1(x,y) \le f(x,y) \le f_2(x,y)$, то

$$\iint\limits_{D} f_1(x,y)\,dS < \iint\limits_{D} f(x,y)dS < \iint\limits_{D} f_2(x,y)dS .$$

9. Если функция $z = f(x,y) \ne const$ и непрерывна в области D, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$; $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, то

$$m \cdot S_D < \iint\limits_{D} f(x,y)\,dS < M \cdot S_D .$$

Т.к. предел n-й интегральной суммы I_n не зависит от способа разбиения области D на элементарные области S_i, то в декартовой системе координат область D удобно разбивать на элементарные области S_i прямыми, параллельными осям координат. При этом элементарные области S_i, принадлежащие области D, являются прямоугольниками. Поэтому $dS = dxdy$ и

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy .$$

1.2 Методы вычисления двойного интеграла

Область интегрирования D называется ***правильной в направлении оси*** Ox (оси Oy), если любая прямая, параллельная оси Ox (оси Oy), пересекает границу L области D не более двух раз (рис. 1.2,а). Область D считается также правильной, если часть ее границы или вся граница L состоит из отрезков прямых, параллельных осям координат (рис. 1.2,б).

Рассмотрим методы вычисления двойного интеграла по областям, правильным в направлении координатных осей.

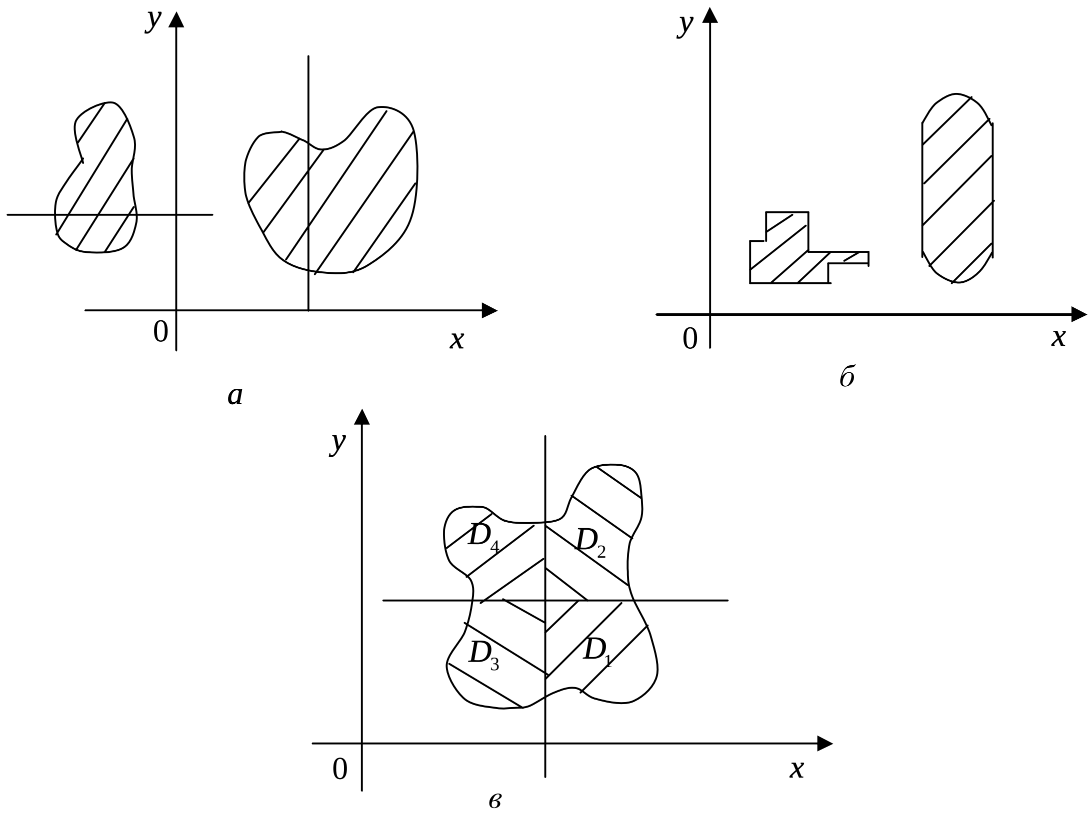


Рис. 1.2

Т.к. практически любую область можно представить в виде объединения правильных областей (рис. 1.2, в), то согласно свойству 6 двойных интегралов, эти методы пригодны для их вычисления по любым областям. Для вычисления двойного интеграла нужно проинтегрировать подынтегральную функцию $z = f(x, y)$ по одной из переменных (в пределах ее изменения в правильной области D) при любом постоянном значении другой переменной. Полученный результат проинтегрировать по второй переменной в максимальном диапазоне ее изменения в D. Тогда все произведения $f(x, y)dxdy$ в двойном интеграле будут учтены при суммировании точно по одному разу, и мы избавимся от лишних, не принадлежащих области D, произведений.

Если область D, правильная в направлении оси Oy, проектируется на ось Ox в отрезок $[a;b]$, то ее граница L разбивается на две линии: AmB, задаваемую уравнением $y = j_1(x)$, и AnB, задаваемую уравнением $y = j_2(x)$ (рис. 1.3). Тогда область D определяется системой неравенств:

$$D: a \le x \le b, \quad j_1(x) \le y \le j_2(x),$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутреннее интегрирование ведется по переменной y, а внешнее – по переменной x)

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (1.1)$$

Если область D, правильная в направлении оси Ox, проектируется на ось Oy в отрезок $[c;d]$, то ее граница L разбивается на две линии: CpD^*, задаваемую уравнением $x=\psi_1(y)$, и CqD^*, задаваемую уравнением $x=\psi_2(y)$ (рис.1. 4). В этом случае область D определяется системой неравенств:

$$D: c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутреннее интегрирование ведется по переменной x, а внешнее – по переменной y)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.2)$$

Выражения, стоящие в правых частях равенств (1.1) и (1.2), называются ***повторными*** (или двукратными) ***интегралами***. Из равенств (1.1) и (1.2) следует, что

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.3)$$

Переход от левой части равенства (1.3) к правой его части и обратно называется ***изменением порядка интегрирования*** в повторном интеграле.

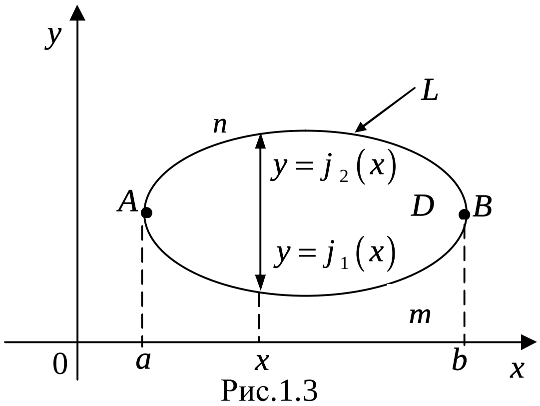


Рис.1.3

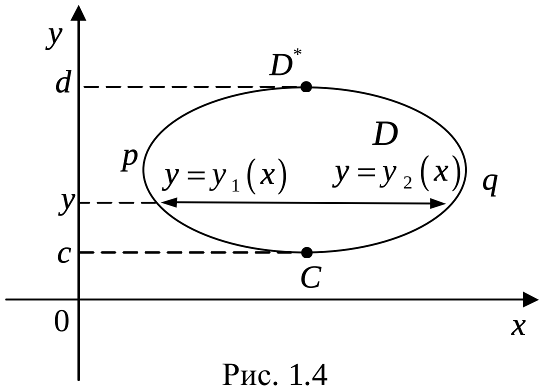


Рис. 1.4

Пример **1.1.** На плоскости Oxy построить область интегрирования D по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле $I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy$.

Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при заданном и измененном порядках интегрирования.

Область определения D расположена между прямыми $x=0$ и $x=4$, ограничена снизу параболой $y=\dfrac{3x^2}{8}$, сверху параболой $y=3\sqrt{x}$ (рис. 1.5). Поэтому

$$I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^4 \left(y\Big|_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_0^4 \left(3\sqrt{x} - \frac{3x^2}{8} \right) dx = \left(2x^{3/2} - \frac{x^3}{8} \right)\Bigg|_0^4 = 8.$$

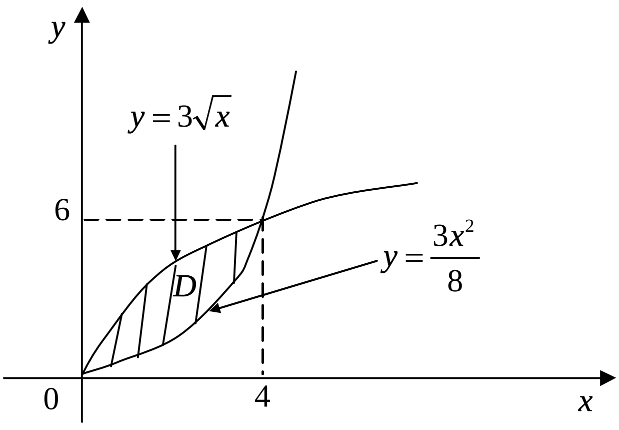


Рис. 1.5

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми $y=0$ и $y=6$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x=\frac{y^2}{9}$ до точек параболы $x=\sqrt{\frac{8y}{3}}$, т.е. имеем

$$I=\int_0^6 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{\frac{8y}{3}}} dx=\int_0^6\left(\sqrt{\frac{8y}{3}}-\frac{y^2}{9}\right)dy=\left(2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^3}{27}\right)\Bigg|_0^6=8.$$

***Пример* 1.2.** Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

Область интегрирования D ограничена линиями $x=0, y=x^2$ и $y=2-x$ (рис. 1.6).

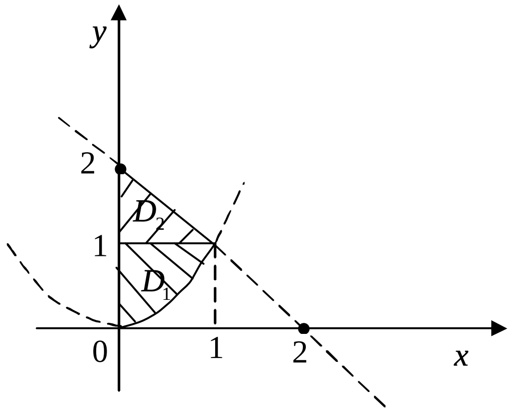


Рис. 1.6

Т.к. правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y=1$ разбивает ее на области $D_1: 0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{y}$ и $D_2: 1\le y\le 2,\ 0\le x\le 2-y$. В результате получаем $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$.

***Пример* 1.3.** Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y+3)dxdy$, если область D ограничена линиями $x+y=2, x=0, y=0$.

Область интегрирования D ограничена прямой $y=2-x$ и осями координат (рис. 1.7).

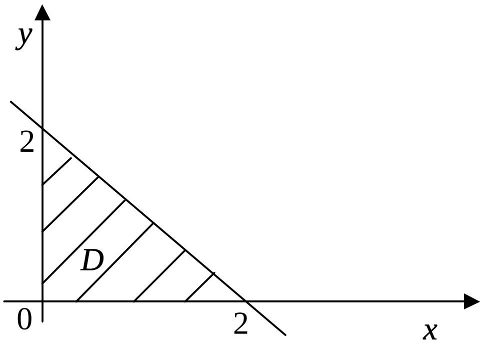


Рис. 1.7

Следовательно,

$$\iint_D (x+y+3)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y+3)dy =$$

$$= \int_0^2 \left.\frac{(x+y+3)^2}{2}\right|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(25-(x+3)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\left(25x - \frac{(x+3)^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{26}{3}.$$

1.3 Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = j\,(u,v)$, $y = y\,(u,v)$, где $j\,(u,v)$, $y\,(u,v)$ - непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область D плоскости Oxy на область D' плоскости $O'uv$, при этом якобиан

$$J = J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в D. Тогда верна формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\left(j\,(u,v), y\,(u,v)\right)\cdot |J| dudv.$$

Пределы в новом интеграле расставляются по рассмотренному ранее правилу с учетом области D'.

***Пример* 1.4.** Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D плоскости Oxy, ограниченной линиями $y = x-1$, $y = x+2$, $y = -x-2$, $y = -x+3$.

Пусть $\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x. \end{cases}$ Тогда прямые $y = x-1$, $y = x+2$ перейдут соответственно в прямые $u = -1$, $u = 2$ плоскости $O'uv$, а прямые $y = -x-2$, $y = -x+3$ - в прямые $v = -2$, $v = -3$ этой же плоскости. При этом область D отобразится в прямоугольник D' плоскости $O'uv$, для которого $-1 \le u \le 2$, $-2 \le v \le 3$. Из записанной системы видно, что $\begin{cases} x = (-u+v)/2, \\ y = (u+v)/2. \end{cases}$ Следовательно, $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$, а $|J| = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $\iint_D (x+y)dxdy = \iint_{D'} v\cdot\dfrac{1}{2}dudv = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{2} du - 2\int^{3} vdv = \dfrac{15}{4}$.

Известно, что прямоугольные декартовые координаты (x, y) и полярные (r, j) координаты связаны между собой следующими соотношениями: $x = r\cos j$, $y = r\sin j$, $(r \geq 0, 0 \leq j \leq 2p)$. Если в двойном интеграле перейти к полярным координатам, то получим формулу (здесь $J = r$)

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos j, r\sin j)r\,dr\,dj .$$

Представление двойных интегралов в виде повторных приводит к разным пределам в зависимости от того, где находится полюс O полярной системы координат: вне, внутри или на границе области D.

1. Если полюс O полярной системы координат находится вне области D, ограниченной лучами $j = a, j = b\ (a < b)$ и линиями AmB, AnB (их уравнения соответственно $r = r_1(j), r = r_2(j)$, где $r_1(j), r_2(j)$ $(r_1(j) \leq r_2(j))$ - функции, заданные на отрезке $[a; b]$, то двойной интеграл в полярных координатах сводится к повторному интегралу (рис. 1.8, 1.9) следующим образом:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dj \int_{r_1(j)}^{r_2(j)} f(r\cos j, r\sin j)r\,dj .$$

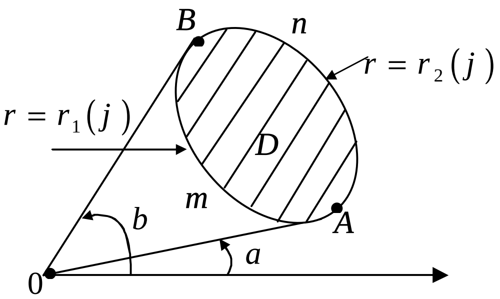


Рис. 1.8

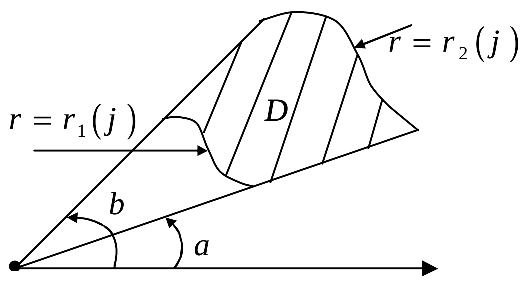


Рис. 1.9

2. Если полюс O находится внутри области D и уравнение границы области D в полярных координатах имеет вид $r = r(j)$, то тогда $a = 0, b = 2p, r_1(j) = 0, r_2(j) = r(j)$ (рис. 1.10).

3. Если полюс O находится на границе области D и уравнение ее границы в полярной системе координат имеет вид $r = r(j)$, то $r_1(j) = 0, r_2(j) = r(j)$, а a и b могут принимать различные значения (рис. 1. 11).

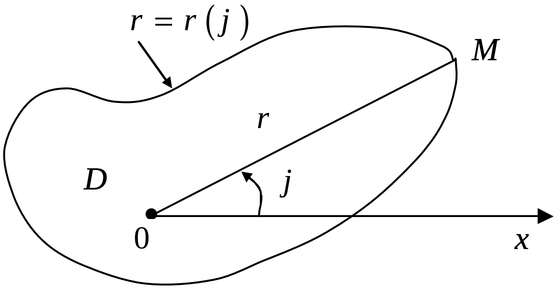


Рис. 1.10

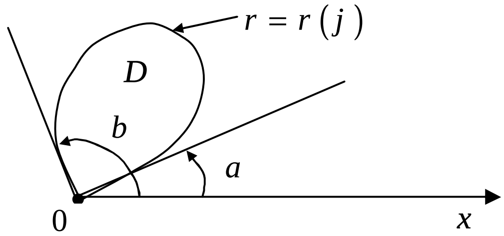


Рис. 1.11

***Пример* 1.5.**

Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dxdy$, если область D - круг D радиусом R с центром в начале координат.

Если область D - круг или его часть, то интеграл проще вычислять в полярных координатах.

$$\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{\left(r^2\sin^2 j + r^2\cos^2 j\right)^3}\, r\, d\, r\, d\, j = \iint\limits_D r^4 d\, r\, d\, j = \int\limits_0^{2p} d\, j \int\limits_0^{R} r^4 d\, r =$$

$$= 2p \cdot \frac{R^5}{5}.$$

АЗ-1

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dy$; б) $\int\limits_{-3}^{8} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$; в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}$.

2. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена прямыми $x=1,\ x=4,\ 3x-2y+4=0,\ 3x-2y-1=0$;

б) ограничена линиями $y=x^3+1,\ x=0,\ x+y=4$;

в) является треугольной областью с вершинами в точках $O(0;0),\ A(1;3),\ B(1;5)$.

3. Изменить порядок интегрирования в данных повторных интегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3} f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

4. Вычислить:

а) $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x^2,\ y^2=x$;

б) $\iint\limits_D x^3y^2dxdy$, если область D ограничена линией $x^2+y^2=9$;

в) $\iint\limits_D xdxdy$, если область D ограничена линиями $x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{4-x^2}$.

5. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$.

2 ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.1 Вычисление площадей плоской области

Площадь S плоской области D в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$S = \iint_D dxdy.$$

Для полярной системы координат соответствующая формула примет вид

$$S = \iint_{D'} \rho d\rho d\varphi.$$

***Пример* 2.1.** Вычислить площадь области D, ограниченной кривыми $y=2-x^2$, $y=x$.

Определим точки пересечения кривых, ограничивающих область D. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2 - x^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$. Мы получили две точки пересечения $M_1(1, 1)$ и $M_2(-2, -2)$. Выполним чертеж области D (рис. 2.1). Искомая площадь

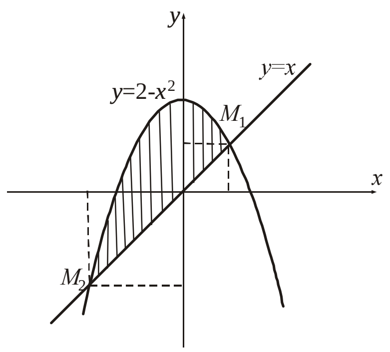


Рис. 2.1

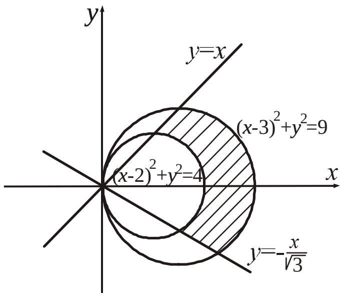
$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) =$$

$$= \frac{9}{2} \text{(кв.ед.)}.$$

***Пример* 2.2.** Вычислить в полярных координатах площадь фигуры, которая ограничена линиями: $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=x$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Выделив полный квадрат относительно переменной x, уравнение $x^2- 4x+$ $+y^2=0$ примет вид $(x-2)^2+y^2=4$. Данное уравнение задает окружность с центром в точке (2, 0) и радиусом $R=2$. Аналогично, уравнение $x^2-6x+y^2=0$ примет вид $(x-3)^2+y^2=9$ — окружность с центром в точке (3, 0) и радиусом $R=3$. Уравнения $y=x$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ задают прямые проходящие через начало координат. Изобразим область D, ограниченную заданными кривыми, в декартовой системе координат (рис. 2.2). Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда уравнение первой окружности примет вид:



$\rho^2\cos^2\varphi-4\rho\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=0 \Leftrightarrow \rho^2=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=4\cos\varphi$. Аналогично, для второй окружности имеем $\rho=6\cos\varphi$. Из уравнения первой прямой следует, что $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \Rightarrow$ $\mathrm{tg}\varphi=1$ или $\varphi=\frac{\pi}{4}$, для второй прямой— $\mathrm{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

Рис. 2.2

Искомая площадь $S=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\Big|_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}d\varphi=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(36\cos^2\varphi-16\cos^2\varphi)d\varphi=10\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=5\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=5\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1-\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=5\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 11.21 \text{ (кв.ед.)}.$$

2.2 Вычисление объемов тел

Объем V тела, ограниченного поверхностью $z=f(x, y)\geq 0$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница Г области D, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

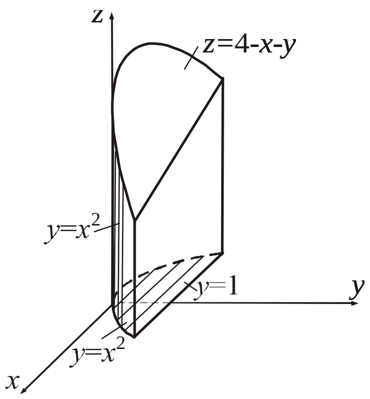
Если $f(x, y)\leq 0$ в области D, то двойной интеграл численно равен объему цилиндрического тела, находящегося под плоскостью Oxy, взятому со знаком «-». Если же функция $f(x, y)$ в области D меняет свой знак, то двойной интеграл численно равен разности объемов цилиндрических тел, находящихся над плоскостью Oxy и под ней. Это свойство выражает ***геометрический смысл двойного интеграла***.

***Пример* 2.3.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: параболическим цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z=4-x-y$, а снизу—частью плоскости Oxy, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$ (рис. 2.3). Объем этого тела

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}(4-x-y)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(4-x-y)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left((4-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}=\int\limits_{-1}^{1}\left(4-x-\frac{1}{2}-4x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=$$



$$=\left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{68}{15}.$$

Рис. 2.3

***Пример* 2.4.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.

Тело, ограниченное двумя данными параболоидами вращения, изображено на рис. 2.4. Его объем можно найти как разность объемов двух вертикальных цилиндрических тел, которые имеют общее нижнее основание D на плоскости Oxy, а сверху ограничены данными поверхностями.

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy-\iint\limits_D\frac{1}{2}(2+x^2+y^2)dxdy=\frac{3}{2}\iint\limits_D(2-x^2-y^2)dxdy.$$

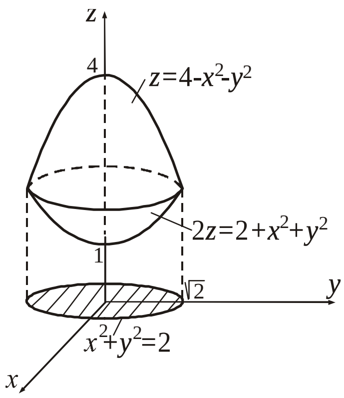


Рис. 2.4

Линия пересечения данных поверхностей определяется системой из их уравнений $\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ 2z=2+x^2+y^2 \end{cases}$. Исключая из этой системы z, получим $x^2+y^2=2$— уравнение вертикальной цилиндрической поверхности, которая проходит через линию пересечения поверхностей и проектирует ее на плоскость Oxy. Т.о. область D на плоскости Oxy является окружностью $x^2+y^2=2$. Чтобы упростить вычисление интеграла, преобразуем его к полярным координатам. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dxdy$ через $\rho d\rho d\varphi$, получим:

$$V=\frac{3}{2}\iint\limits_D(2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)\rho d\rho d\varphi=\frac{3}{2}\iint\limits_D(2-\rho^2)\rho d\rho d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho-\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi.$$

2.3 Вычисление площади поверхности

Площадь σ поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$ на области D плоскости Oxy, где функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy\,.$$

Если уравнение поверхности задано в виде $x=f(y, z)$ или $y=f(x, z)$, то соответствующие формулы для вычисления площади поверхности имеют вид

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + f_y'^2 + f_z'^2}\,dydz \text{ и } \sigma = \iint_{D''} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_z'^2}\,dxdz\,.$$

***Пример* 2.5.** Найти площадь той части поверхности цилиндра $x^2+z^2=R^2$, которая вырезается цилиндром $x^2+y^2=R^2$.

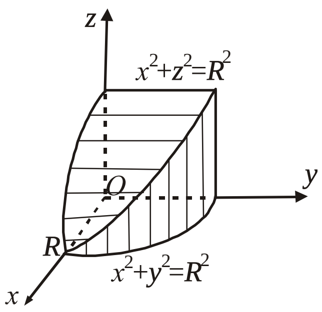


Рис. 2.5

На рис. 2.5 изображена 1/8 часть искомой поверхности. Уравнение поверхности имеет вид $z = \sqrt{R^2 - x^2}$, поэтому $f_x' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$; $f_y' = 0$ и

$\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Область интегрирования представляет собой четверть круга, т.е. определяется условиями $0 \le x \le R$, $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy = 8\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dy =$$

$$= 8\int_0^R dx \left(\frac{Ry}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = 8R\int_0^R dx = 8Rx\Big|_0^R = 8R^2.$$

2.4 Вычисление массы материальной пластинки

Пусть D —плоская пластинка, по поверхности которой непрерывно распределена масса с плотностью $\mu(x, y)$. Точная масса m всей пластинки определяется по формуле

$$m = \iint_D \mu(x, y)\,dxdy\,.$$

В этом заключается ***физический смысл двойного интеграла***.

***Пример* 2.6.** Вычислить массу пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$, если ее плотность $\mu(x, y)=xy$.

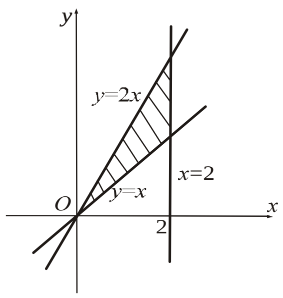


Рис. 2.6

Изобразим пластину D в декартовой системе координат (рис. 2.6).

$$m = \iint_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_x^{2x} ydy = \int_0^2 x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_x^{2x} dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx = \left(\frac{3x^4}{8} \right) \Bigg|_0^2 = 6\,.$$

2.5 Вычисление статических моментов и координат центра масс материальной пластинки. Моменты инерции материальной пластинки

Если на плоскости Oxy задана материальная пластинка D с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, то координаты ее центра масс (x_c, y_c) определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy},\ y_c = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}.$$

Величины

$$M_X = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy \text{ и } M_Y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$$

называются ***статическими моментами пластинки относительно осей Ox и Oy*** соответственно.

***Пример* 2.7.** Найти статические моменты и координаты центра масс для пластинки D из примера 2.6.

Статический момент материальной пластинки относительно оси Ox

$$M_X = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^2 xdx\int\limits_x^{2x} y^2dy = \int\limits_0^2 xdx\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{2x} = \frac{7}{3}\int\limits_0^2 x^4dx =$$

$$= \frac{7}{15}x^5\Big|_0^2 = \frac{224}{15}.$$

Статический момент материальной пластинки относительно оси Oy

$$M_Y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_x^{2x} ydy = \int\limits_0^2 x^2dx\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2x} = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 x^4dx =$$

$$= \frac{3}{10}x^5\Big|_0^2 = \frac{48}{5}.$$

Для нахождения центра масс пластинки воспользуемся уже найденными значениями массы тела $m = \iint\limits_D xydxdy = 6$ (см. прим. 2.6) и статических моментов:

$$x_c = \frac{M_Y}{m} = \frac{48}{5\cdot 6} = \frac{8}{5};\ y_c = \frac{M_X}{m} = \frac{224}{15}\cdot\frac{1}{6} = \frac{112}{45}.$$

Моменты инерции относительно осей координат Ox, Oy и начала координат материальной пластинки D с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, которая лежит в плоскости Oxy, вычисляются соответственно по формулам:

$$I_X = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy;\ I_Y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy;\ I_O = I_X + I_Y = \iint\limits_D (y^2+x^2)\mu(x,y)dxdy.$$

***Пример* 2.8.** Вычислить момент инерции плоской материальной пластинки D, ограниченной линиями y^2=1-x, x=0, y=0 относительно оси Oy, если поверхностная плотность в каждой точке равна y.

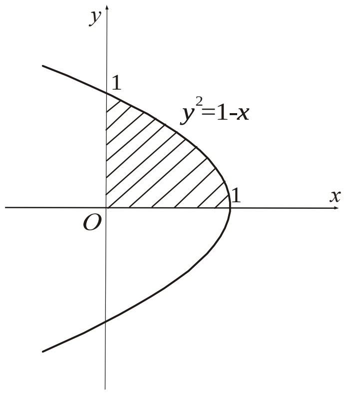


Рис. 2.7

Изобразим пластину D в декартовой системе координат (рис. 2.7). Момент инерции относительно оси Oy

$$I_Y = \iint_D x^2\mu(x,y)dxdy = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 x^2dx \int_0^{\sqrt{1-x}} ydy =$$

$$= \int_0^1 x^2dx \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

АЗ-2

1. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:
   а) $y=x$, $y=5x$, $x=1$; г) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ $(x\geq 0)$;
   б) $xy=4$, $x+y=5$; д) $3x^2=25y$, $5y^2=9x$;
   в) $y=x^2+4x$, $y=x+4$; е) $y=2-x$, $y^2=4x+4$.
2. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:
   а) $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$ и $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; б) $\rho=4\sin\varphi$, $\rho=2\sin\varphi$;
   в) $\rho=a\sin 3\varphi$; г) $(x^2+y^2)^2=2y^3$.
3. Вычислить всю площадь, ограниченную лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+y+z=4$.
5. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями координат, плоскостями $x=4$, $y=4$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2+1$.
6. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями координат, цилиндром $z=9-y^2$ и плоскостью $3x+4y=12$, $(y\geq 0)$.
7. Вычислить площадь той части плоскости $x+y+z=2a$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2+y^2=a^2$.
8. Вычислить площадь той части поверхности конуса $y^2+z^2=x^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.
9. Вычислить площадь той части поверхности параболоида $2z=x^2+y^2$, которая вырезана цилиндром $x^2+y^2=1$.
10. Найти массу пластинки D: $y=x$, $y=x^2$, если поверхностная плотность $\mu(x,y)=2x+3y$.
11. Найти массу пластинки D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x\leq 0$, $y\geq 0$, если поверхностная плотность $\mu(x,y)=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}$.
12. Найти массу круглой пластинки, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки.

13. Найти координаты центра масс однородной (μ=1) материальной пластинки, ограниченной линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.
14. Найти координаты центра масс однородной (μ=1) материальной пластинки, ограниченной верхней половиной круга $x^2+y^2=a^2$.
15. Найти статический момент однородного (μ=1) прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a.
16. Найти статический момент однородного (μ=1) полукруга относительно диаметра.
17. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат пластины плотностью $\mu(x, y)=x^2y$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1$.
18. Вычислить момент инерции прямоугольника, лежащего в плоскости Oxy и ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, относительно начала координат.
19. Вычислить момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащего в плоскости Oxy, относительно оси Oy.

3 ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Основные понятия

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является тройной интеграл.

Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла, поэтому ограничимся краткими сведениями.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью Г. В области V определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Выполним следующие действия:

1) разобьем область V произвольным способом на n частей V_i $\left(i=\overline{1, n}\right)$, имеющих соответственно объемы ΔV_i;
2) выберем в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим значения функции в этих точках;
3) составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$. (3.1)

Если существует предел интегральной суммы (3.1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d_i элементарных областей V_i и этот предел не зависит от способа разбиения области V и выбора точек M_i, то называется ***тройным интегралом*** от функции $u = f(x, y, z)$ по области V, т.е.

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv, \qquad (3.2)$$

где $dv = dxdydz$ - элемент объема.

Тройной интеграл обладает теми свойствами, что и двойной интеграл. Ограничимся некоторыми:

1) если $c = const$, то $\iiint\limits_V c \cdot fdv = c\iiint\limits_V fdv$;
2) $\iiint\limits_V (f+g)dv = \iiint\limits_V fdv + \iiint\limits_V gdv$, где f и g – интегральные функции;
3) $\iiint\limits_V fdv = \iiint\limits_{V_1} fdv + \iiint\limits_{V_2} fdv$, где $V = V_1 + V_2$;
4) $\iiint\limits_V dv = V$ - объем области V.

3.2 Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть область V ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, $(z_2 \ge z_1 - \text{непрерывные функции})$. D – проекция тела V на плоскость Oxy. Область V – правильна в направлении оси Oz (см. рис. 3.1).

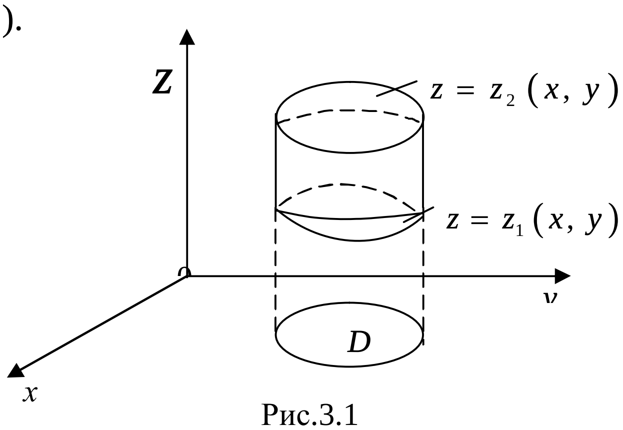


Рис.3.1

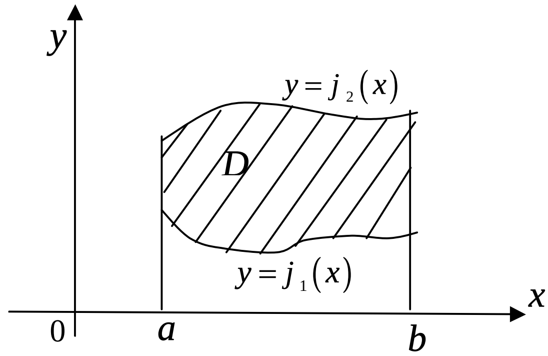


Рис. 3.2

Имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) ds. \qquad (3.3)$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z, считая x и y постоянными. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных. Если область D ограничена линиями $x=a,\ x=b\ (a<b),\ y=j_1(x),\ y=j_2(x)$, где $j_1(x)$ и $j_2(x)$ - непрерывные функции и $j_1 \le j_2$ (см. рис. 3.2), то переходим от двойного интеграла по области D к повторному. Получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (3.4)$$

Замечания:

1. Если область V сложная, то ее можно разбить на конечное число более простых.
2. Порядок интегрирования, в зависимости от расположения области V в пространстве $Oxyz$, может быть иным.

***Пример* 3.1.** Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)dy = \int\limits_0^1 dx \frac{1}{2}\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3 \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

***Пример* 3.2.** Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{1}{1-x-y}dxdydz$, если область V ограничена плоскостями: $x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=5,\ z=2,\ z=4$.

Данные плоскости ограничивают прямоугольный параллелепипед (рис. 3.3). Область D изображена на рис. 3.4.

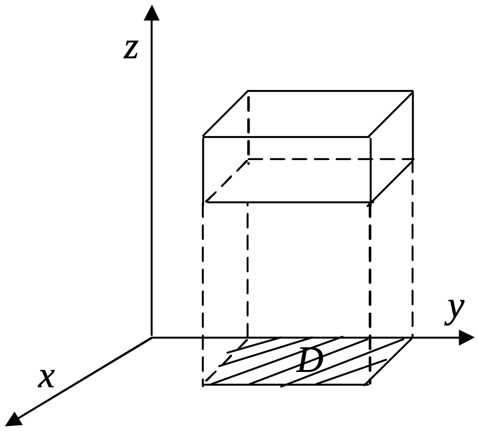


Рис 3.3

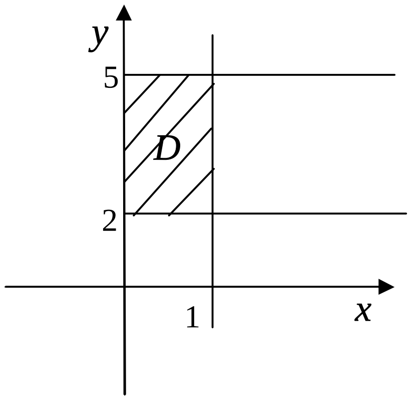


Рис. 3.4

$$I=\int_2^5 dy\int_0^1 dx\int_2^4\frac{1}{1-x-y}dz=\int_2^5 dy\int_0^1\frac{1}{1-x-y}\cdot z\Big|_2^4 dx=\int_2^5 dy\int_0^1\frac{2}{1-x-y}dx=$$

$$=\int_2^5 dy\left(-2\ln|1-x-y|\Big|_0^1\right)=-2\int_2^5\left(\ln|y|-\ln|y-1|\right)dy=-2\left[y\ln|y|-(y-1)\ln|y-1|\right]\Big|_2^5=$$

$$=10\ln\frac{4}{5}.$$

***Пример* 3.3.** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz$, где $V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$. Сделать чертеж V.

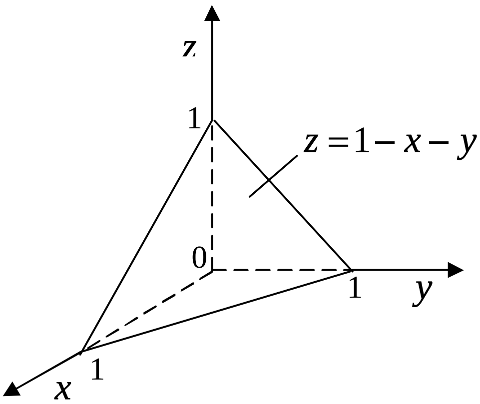


Рис. 3.5

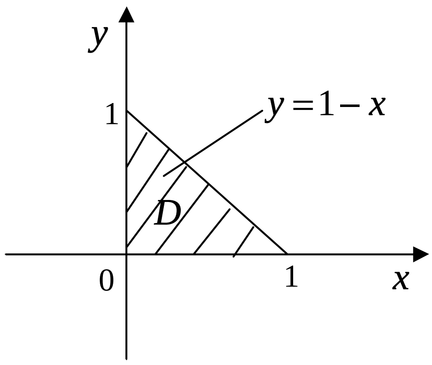


Рис. 3.6

Область V представляет тетраэдр, ограниченный сверху плоскостью $z=1-x-y$, снизу - $z=0$ (рис. 3.5). Проекцией D тела на плоскость Oxy является треугольник, образованный прямыми $x=0,\ y=0,\ y=1-x$. Имеем по формуле (3.4) $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+z)dz$.

Вычислим интеграл по действиям:

1. $\int\limits_0^{1-x-y}(x+z)dz=\left(xz+\dfrac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}=x(1-x-y)+\dfrac{1}{2}(1-x-y)^2=-\dfrac{x^2}{2}-y+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$.

2. $\int\limits_0^{1-x}\left(-\dfrac{x^2}{2}-y+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}\right)dy=\left(-\dfrac{x^2}{2}y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x}=-\dfrac{x^2}{2}(1-x)-$

$-\dfrac{1}{2}(1-x)^2+\dfrac{1}{6}(1-x)^3+\dfrac{1}{2}(1-x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{6}$.

3. $\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{6}\right)dx=\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{6}x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$.

***Пример* 3.4.** Вычислить тройной интеграл и построить область интегрирования V: $I=\iiint\limits_V(4+z)dxdydz$, $V: y=x^2,\ y=1,\ z=0,\ z=2$.

Область V ограничена $y=x^2$ - параболическим цилиндром и плоскостями (рис. 3.7). Область D изображена на рис. 3.8.

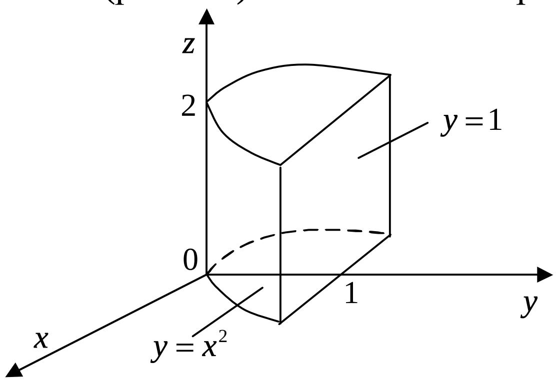


Рис. 3.7

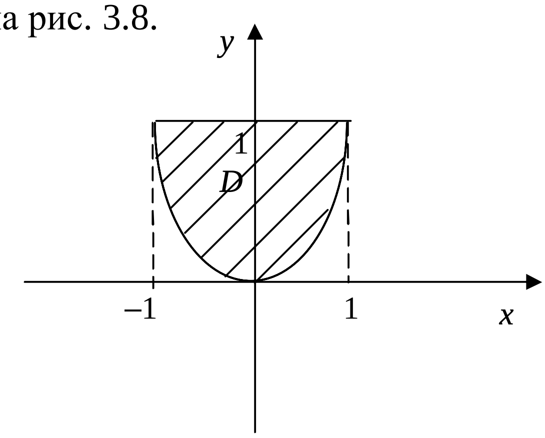


Рис. 3.8

Вычислим $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^2(4+z)dz$ по действиям:

1. $\int\limits_0^2(4+z)dz=\dfrac{(4+z)^2}{2}\Bigg|_0^2=\dfrac{36-16}{2}=10$. 2. $\int\limits_{x^2}^1 10dy=10y\Big|_{x^2}^1=10(1-x^2)$.

3. $\int\limits_{-1}^1(1-x^2)dx=10\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1=\dfrac{40}{3}$.

***Пример* 3.5.** Вычислить тройной интеграл и построить область интегрирования V: $\iiint\limits_V(2x+3y-z)dxdydz$, где $V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=3,\ x+y=2$.

Построив данные плоскости, получим треугольную призму (рис. 3.9). Область D изображена на рис. 3.10.

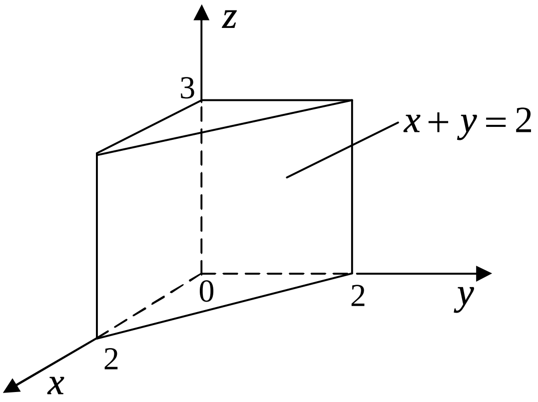


Рис. 3.9

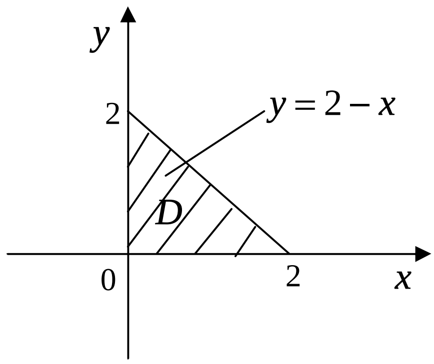


Рис. 3.10

Вычислим $I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^3 (2x + 3y - z)dz$ по действиям:

1. $\int_0^3 (2x+3y-z)dz = \left(2xz + 3yz - \frac{z^2}{2} \right)\Big|_0^3 = 6x + 9y - \frac{9}{2}$.

2. $\int_0^{2-x} \left(6x + 9y - \frac{9}{2} \right) dy = \left(6xy + 9\frac{y^2}{2} - \frac{9}{2}y \right)\Big|_0^{2-x} = 6x(2-x) + \frac{9}{2}(2-x)^2 - \frac{9}{2}(2-x) =$

$= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$.

3. $\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9 \right) dx = \left(-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 9x \right)\Big|_0^2 = -4 - 3 + 18 = 11$.

***Пример* 3.6.** Вычислить тройной интеграл и построить область интегрирования: $I = \iiint\limits_V ydxdydz$, где V ограничена поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и $y = 1$.

Область V есть конус, расположенный вдоль оси Oy (рис. 3.11). Проекция D этого конуса на плоскость Oxz есть круг $x^2 + z^2 \le 1$ (рис. 3.12).

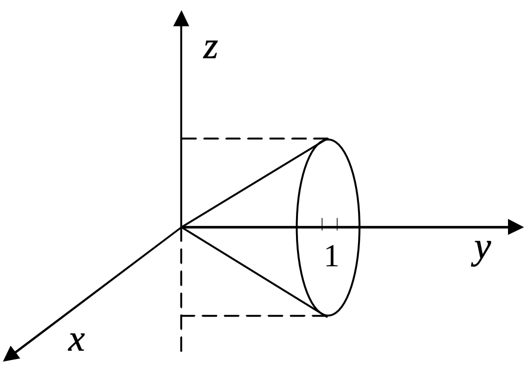


Рис. 3.11

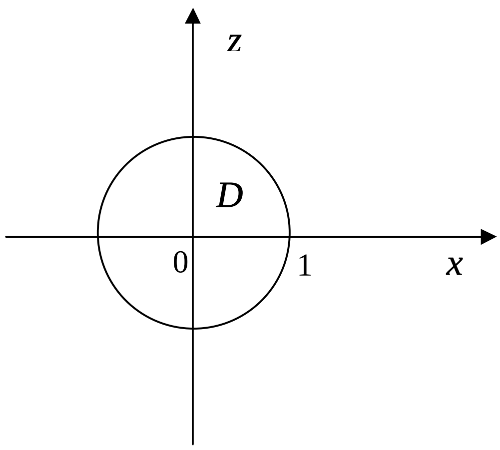


Рис. 3.12

В формуле (3.3) поменяем переменные z и y местами, получим

$I=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} ydy\right)dxdy$. Вычислим I по действиям:

1. $\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} ydy=\left.\frac{y^2}{2}\right|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1}=\frac{1}{2}\left(1-\left(x^2+z^2\right)\right)$, 2. $\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left(1-\left(x^2-z^2\right)\right)dxdz$.

Перейдем к полярным координатам по формулам $x=r\cos j$, $y=r\sin j$, $dxdz=rdrdj$.

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{G}\left(1-r^2\right)rdrdj=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2p}dj\int\limits_{0}^{1}\left(r-r^3\right)dr=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2p}\left.\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\right|_{0}^{1}dj=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2p}dj=\frac{1}{8}\cdot 2p=\frac{p}{4}.$$

3.3 Замена переменных в тройном интеграле

Если в тройном интеграле $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz$ производится замена переменных по формулам $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, причем эти функции имеют в некоторой области V^* пространства $Ouvw$ непрерывные производные и отличный от нуля якобиан

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix},$$

то справедлива формула замены переменных

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f\left(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\right)\cdot|J|\,dudvdw. \quad (3.5)$$

Наиболее употребительными являются цилиндрические и сферические координаты.

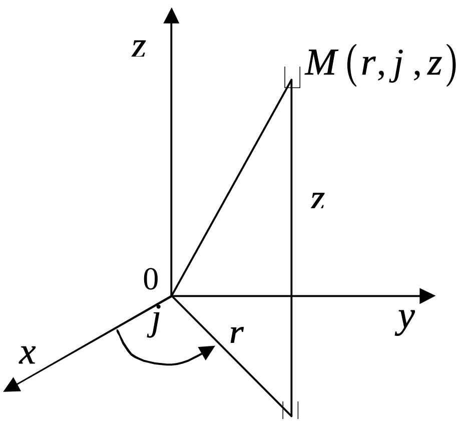


Рис. 3.13

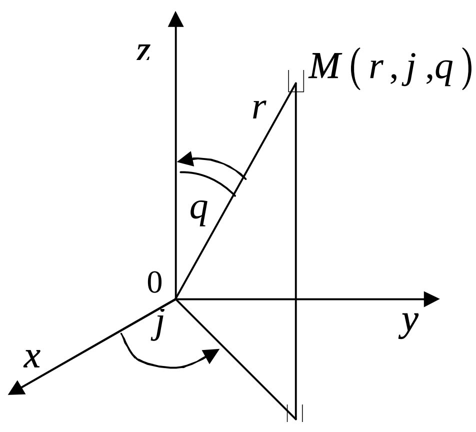


Рис. 3.14

Три числа (r,φ,z) называются ***цилиндрическими координатами*** точки M (см. рис. 3.13). Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\right).$$

Якобиан $J = r$ и формула преобразования (3.5) имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r dr d\varphi\, dz.$$

***Пример* 3.7.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z\, dxdydz$, где V: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Данное тело V ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (см. рис. 3.15).

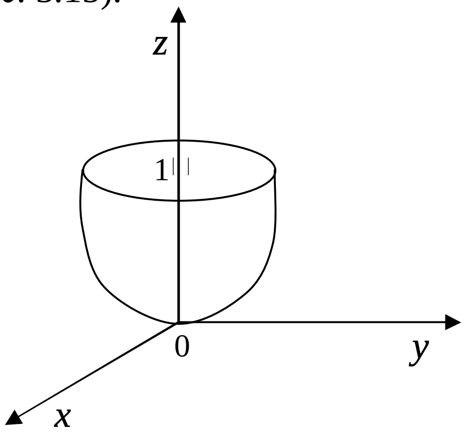


Рис. 3.15

Перейдем к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Уравнение параболоида будет иметь вид: $z = r^2$. Координаты изменяются так: $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $r^2 \le z \le 1$.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{r^2}^1 z dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r \left.\left(\frac{z^2}{2}\right)\right|_{r^2}^1 dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 - r^4\right) r dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right)\right|_0^1 d\varphi = \frac{1}{6}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{6}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}.$$

***Пример* 3.8.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, где V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = a$.

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра примет вид $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$, или $r = 2\cos\varphi$. Координаты r, φ и z изменяются так: $0 \le r \le 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le z \le a$.

Тогда $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a z dz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi =$

$$=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{p}{2}}\left(1-\sin^2 j\right)d\left(\sin j\right)=\frac{4}{3}a^2\left(\sin j-\frac{1}{3}\sin^3 j\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{8}{9}a^2.$$

Сферическими координатами точки $M(x,y,z)$ пространства $Oxyz$ называется тройка чисел (r, j ,q), где r - длина радиуса-вектора точки M , j - угол между осью Ox и проекцией вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy, q - угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 3.14).

Сферические координаты связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями:

$$x=r\cos j\cdot\sin q,\ y=r\sin j\cdot\sin q,\ z=r\cos q\quad\left(r\ge 0,\ 0\le j\le 2p,\ 0\le q\le p\right).$$

Якобиан $J=-r^2\sin q$ и формула преобразования (3.4) имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f\left(r\cos j\sin q,\ r\sin j\sin q,\ r\cos q\right)\cdot r^2\sin q\ d r\, d j\, d q\ .$$

Пример **3.9.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, если V - верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Введем сферические координаты, новые переменные изменяются так: $0\le r\le R,\ 0\le j\le 2p,\ 0\le q\le\frac{p}{2}$.

$$I=\iiint\limits_{V^*} r^4\sin^3 q\, d r\, d j\, d q=\int_0^R r^4 d r\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^3 q\, dq\int_0^{2p} d j=2p\int_0^R r^4 d r\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\cos^2 q-1\right)d\left(\cos q\right)=$$

$$=2p\int_0^R r^4 d r\left(\frac{1}{3}\cos^3 q-\cos q\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{4}{15}p R^5.$$

АЗ-3

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ для указанных областей V (сделать чертеж V):

а) область V - тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x+3y+4z=0$, $z=0$, $x=0$, $y=0$;

б) область V ограничена плоскостями $x+y=2,\ z=3,\ z=0,\ y=0,\ x=0$;

в) область V ограничена поверхностями $z=16-x^2-y^2, x+y=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0,\ z\ge 0$.

2. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$; б) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где $V: x=y^2,\ y=x^2,\ z=xy,\ z=0$;

в) $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, где $V: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=x^2+y^2$.

3. Вычислить $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область V - прямоугольный параллелепипед, ограниченный $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 5$.

4. Вычислить $\iiint\limits_V xy^2z^3 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0$.

5. Вычислить $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, если область V - трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z = 0,\ z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 4$.

6. Вычислить $\iiint\limits_V z\, dxdydz$, если область V ограничена конической поверхностью $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 2$.

7. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2$.

8. Вычислить $\iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, если область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

9. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{x\, dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если V : $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

10. Вычислить $\iiint\limits_V x\, dxdydz$, если V: $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x \ge 0$.

4 ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

4.1 Вычисление объемов тел

Объём v тела V вычисляется по формуле $v=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$.

***Пример* 4.1.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного параболоидами $z=x^2+y^2$, $z=x^2+2y^2$ и плоскостями $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

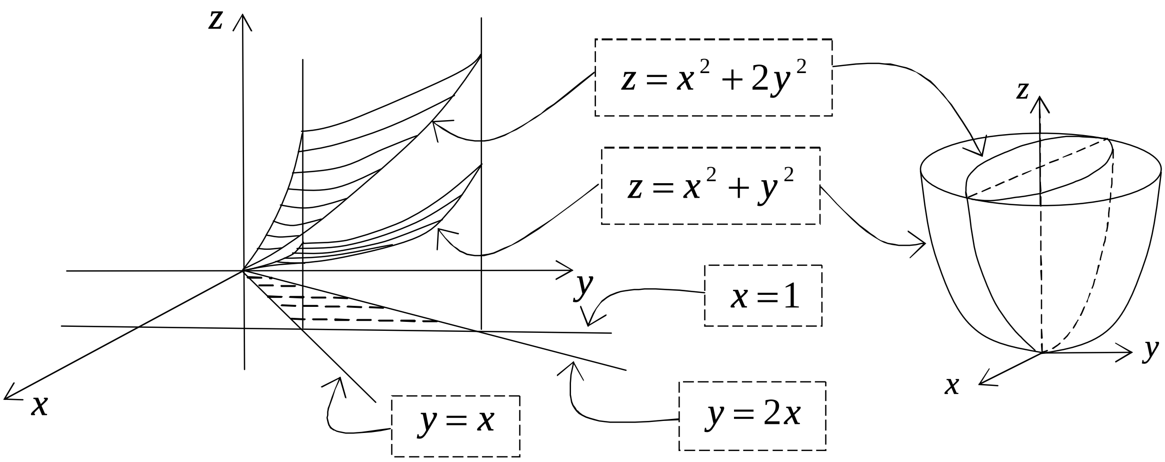


Рис. 4.1

Тело, ограниченное поверхностями, задаётся неравенствами $0\le x\le 1$, $x\le y\le 2x$, $x^2+y^2\le z\le x^2+2y^2$ (см. рис. 4.1). Тогда объём тела равен $v=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x} dy\int\limits_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x} y^2dy=\int\limits_0^1\left(\frac{7}{3}x^3\right)dx=\frac{7}{12}$.

***Пример* 4.2.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного параболоидом $z=\frac{17}{2}-x^2-y^2$ и конусом $z=\frac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

Находим проекцию на Oxy линии пересечения поверхностей
$\frac{17}{2}-(x^2+y^2)=\frac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}$; $a=\sqrt{x^2+y^2}$; $a\ge 0$; $a^2+\frac{15}{2}a-\frac{17}{2}=0$; $a=1$;
$x^2+y^2=1$ − уравнение проекции пересечения.

Тело, ограниченное поверхностями, задаётся в цилиндрических координатах неравенствами $0\le j\le 2p$, $0\le r\le 1$, $\frac{15}{2}r\le z\le\frac{17}{2}-r^2$.

$z=\frac{17}{2}-(x^2+y^2)$; $\Rightarrow$ $z=\frac{17}{2}-r^2$; − параболоид.

$z=\frac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}; \;\Rightarrow\; z=\frac{15}{2}r;$ − конус (см. рис. 4.2).

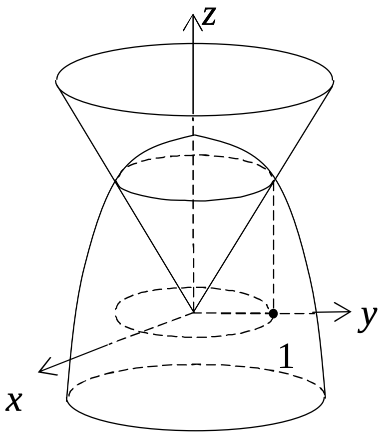


Рис. 4.2

Тогда объём равен

$$v=\iiint\limits_{V(xyz)} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V(j\,r\,z)} r\,d j\;\,dr\,dz=\int\limits_0^{2p} d j\int\limits_0^1 r\,dr\int\limits_{(15/2)\cdot r}^{17/2-r^2} dz=$$

$$=2p\cdot\int\limits_0^1 r\left(\frac{17}{2}-r^2-\frac{15}{2}r\right)dr=2p\left(\frac{17}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\right)=3p$$

***Пример* 4.3.** Составить повторный интеграл для вычисления с помощью тройного интеграла объёма тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$ и параболоидом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$.

Перейдём к новым переменным $x=2u,\; y=3v,\; z=w.$ Якобиан преобразования равен $J = 2\cdot3\cdot1 = 6$.

В новых координатах эллипсоид и параболоид записываются уравнениями $u^2+v^2+w^2=1,\;\; u^2+v^2=w$.

Найдём проекцию линии пересечения на плоскость Ouv (см. рис. 4.3)

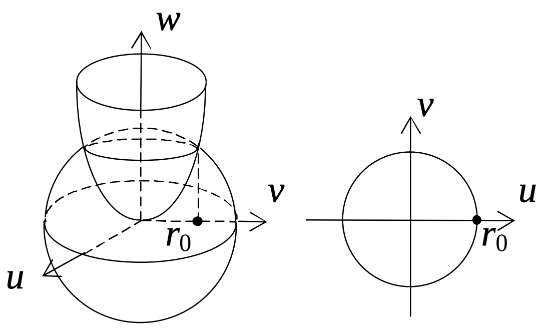


Рис. 4.3

$$\begin{cases}u^2+v^2+w^2=1\\ u^2+v^2=w\end{cases}. \quad w^2+w-1=0,\; w\ge 0,\;\; w_1=\left(\sqrt{5}-1\right)\big/2. \;\Rightarrow\; u^2+v^2=r_0^{\,2} \text{ − искомая проекция, где } r_0=\sqrt{w_1}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)\big/2}.$$

Объём тела равен $v=\iiint\limits_{V(xyz)} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V(uvw)} |\,J\,|\cdot du\,dv\,dw=6\cdot\iiint\limits_{V(uvw)} du\,dv\,dw$.

Перейдём к цилиндрическим координатам $u=r\,\cos j,\; v=r\,\sin j,\; w=w$.

$u^2+v^2+w^2=1; \;\Rightarrow\; r^2+w^2=1; \;\Rightarrow\; w=\sqrt{1-r^2};$ − уравнение сферы.

$u^2+v^2=w; \;\Rightarrow\; w=r^2;$ − уравнение параболоида.

Тело задаётся неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le \rho_0$, $\rho^2 \le w \le \sqrt{1-\rho^2}$.

Объём тела равен $v = 6 \cdot \iiint\limits_{V(uvw)} du\, dv\, dw = 6 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho_0} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} dw,$ где $\rho_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

***Пример* 4.4.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=9$ и конусом $3z^2 = x^2+y^2$.

Найдём угол θ_1 между осью *Oz* и образующей конуса. Для этого в уравнение конуса $3z^2 = x^2+y^2$ подставим $x = 0$ (см. рис. 4.4). Получим уравнение образующих $3z^2 = y^2$, принадлежащих плоскости *Oyz*. Одна из них имеет уравнение $y = \sqrt{3}\, z$ − уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \sqrt{3}$. Следовательно, $tg\,\theta_1 = \sqrt{3}$ и $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ (см. рис. 4.5).

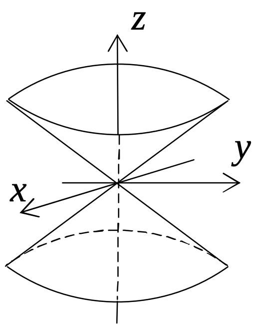


Рис. 4.4
Конус $3z^2 = x^2+y^2$

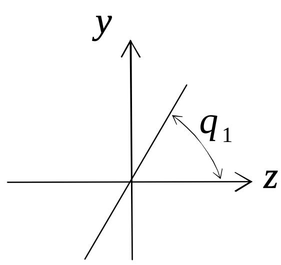


Рис. 4.5
Прямая $y = \sqrt{3}\, z$

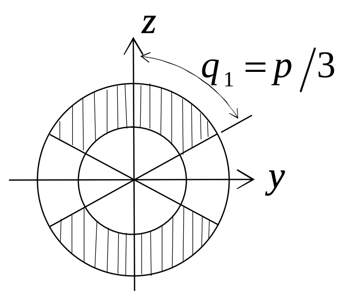


Рис. 4.6
Сечение тела плоскостью *Oyz*

В сферических координатах
$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$,
$\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$ уравнения сфер имеют вид $\rho = 2$, $\rho = 3$. Якобиан перехода к сферическим координатам равен $J = \rho^2 \sin\theta$. "Верхняя" половина заданного тела в сферических координатах записывается неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/3$, $2 \le \rho \le 3$. Объём v равен (см. рис. 4.6)

$$v = 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int\limits_2^3 \rho^2\, d\rho = 2 \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0\right) \cdot \frac{3^3 - 2^3}{3} = 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{3} = \frac{38\pi}{3}.$$

***Пример* 4.5.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём *V* тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 x$, $a > 0$.

Поверхность задана в фиксированной системе координат *Oxyz*. Перейдём к новым переменным $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ по формулам $x = \bar{z}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{x}$. Уравнение поверхности в этих переменных имеет вид $(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2 = a^3 \bar{z}$. Якобиан преобразования $J = -1$, $|J| = 1$ и $V = \iiint dx\,dy\,dz = \iiint d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z}$. Выражения в уравнении являются чётными по $\bar{x}, \bar{y}$. Следовательно, поверхность симметрична относительно плоскостей $O\bar{y}\bar{z}$ и $O\bar{x}\bar{z}$. Из уравнения следует $\bar{z} > 0$. Следовательно, поверхность расположена выше координатной плоскости $O\bar{x}\bar{y}$ (см. рис. 4.9).

Перейдём к сферическим координатам: $j \in [0; 2p]$, $q \in [0; p]$, $r \ge 0$, $\bar{x} = r\cos j\,\sin q$, $\bar{y} = r\sin j\,\sin q$, $\bar{z} = r\cos q$, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r^2$ и уравнение поверхности $(r^2)^2 = a^3 r\cos q$, $r = a\sqrt[3]{\cos q}$ (см. рис. 4.7).

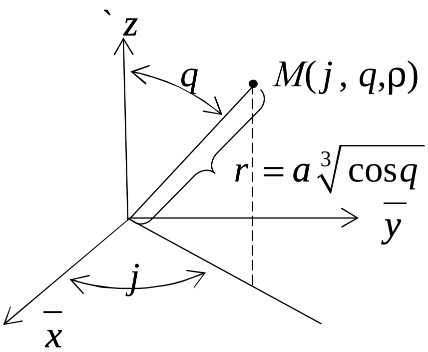


Рис. 4.7

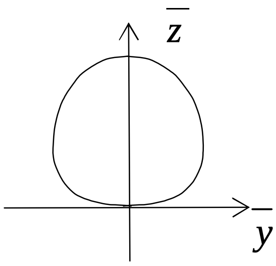


Рис. 4.8

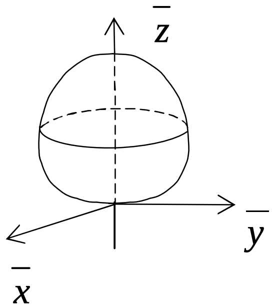


Рис. 4.9

Переменная ρ не зависит от переменной φ. Следовательно, поверхность является фигурой вращения вокруг оси Oz линии $r = a\sqrt[3]{\cos q}$ (см. рис. 4.8).

Тело, ограниченное поверхностью, задаётся неравенствами

$0 \le j \le 2p$, $0 \le q \le \dfrac{p}{2}$, $0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos x}$. Объём тела равен

$$V = \int_0^{2p} dj \int_0^{p/2} dq \int_0^{a\cdot\sqrt[3]{\cos x}} r^2 \sin q\, dr = 2p \cdot \int_0^{p/2} dq\, \sin q \cdot \left(r^3/3 \right)\Big|_0^{a\cdot\sqrt[3]{\cos x}} =$$

$$= \frac{2pa^3}{3} \cdot \int_0^{p/2} \sin q \cos q\, dq = \frac{2pa^3}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{pa^3}{3}.$$

4.2 Вычисление массы тела

Масса m тела V с заданной плотностью μ(x,y,z), где функция μ(x,y,z) непрерывна, вычисляется по формуле

$$m = \iiint_V m(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

В частности, если μ=μ$_0$ (тело однородно), то $m = m_0 \iiint_V dx\,dy\,dz = m_0 v$.

***Пример* 4.6.** Найти массу сегмента параболоида вращения с радиусом основания $R = 3$ и высотой $H = 5$, если плотность в каждой точке пропорциональна корню квадратному из расстояния от точки до плоскости основания сегмента и в вершине сегмента равна g_0.

Расположим сегмент параболоида в системе координат как показано на рис. 4.10. Уравнение параболоида вращения имеет вид $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$.

Найдём параметр a. Точка $P(0; 3; 5)$ лежит на поверхности

$$\Rightarrow\ 5 = \frac{0^2}{a^2} + \frac{3^2}{a^2}\ \Rightarrow\ a^2 = \frac{9}{5}\ \Rightarrow\ z = \frac{5}{9}(x^2 + y^2)\ -$$

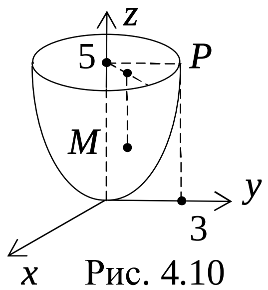


Рис. 4.10

уравнение параболоида. Напишем формулу плотности $\mu(x,y,z)$. Расстояние от текущей точки $M(x,y,z)$ до плоскости основания сегмента (на рис. 4.10 это плоскость $z = 5$) равно $5 - z$. Следовательно, $m(x,y,z) = k\sqrt{5-z}$, где k – коэффициент пропорциональности. Найдём параметр k. По условию задачи в вершине сегмента $O(0;0;0)$ плотность массы равна $\gamma_0 \Rightarrow \mu(0,0,0) = \gamma_0 \Rightarrow$

$k\sqrt{5-0} = g_0\ \Rightarrow\ k = g_0 \big/ \sqrt{5}$. Т.о., $m(x,y,z) = \frac{g_0}{\sqrt{5}}\sqrt{5-z}$. Масса тела равна

$$m = \iiint\limits_V m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

В цилиндрических координатах тело задаётся неравенствами

$$0 \le j \le 2p,\ \ 0 \le r \le 3,\ \ \frac{5}{9}r^2 \le z \le 5 \ \text{ и }\ m = \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^3 r\,dr \int\limits_{(5/9)\cdot r}^{5} \frac{g_0}{\sqrt{5}}\sqrt{5-z}\,dz =$$

$$= -\frac{g_0}{\sqrt{5}} \cdot \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^3 r\,dr \int\limits_{(5/9)\cdot r}^{5} (5-z)^{1/2}\,d(5-z) = \ldots = 12p\,g_0.$$

4.3 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести тела. Моменты инерции тела

Статические моменты M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} тела v относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy соответственно равны

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\,m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\,m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad \text{где } m = m(x,y,z) - \text{плотность тела } V.$$

Координаты центра тяжести тела v с массой m определяются по формулам:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}\quad \text{или}$$

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\qquad y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\,\mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\qquad \text{где}\ \ m=\iiint\limits_V \mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

В частности, если $\rho=\rho_0$ (тело однородно), то эти формулы упрощаются:

$$x_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz,\quad y_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz,\quad z_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz,$$

где $v=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ – объём тела V.

***Пример* 4.7.** Найти координаты центра масс полушара $x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара.

Обозначим координаты центра масс (x_c, y_c, z_c). Плотность массы равна $\mathrm{m}(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Вследствие симметрии полушара относительно оси Oz и чётности функции $\mu(x, y, z)$ по переменным x, y имеем $x_c=0$, $y_c=0$. Найдём z_c. Вычисления проведём в сферических координатах

$$m=\iiint\limits_{V(x,y,z)}\mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_{V(x,y,z)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=k\iiint\limits_{V(j,q,r)} r\cdot r^2\sin q\cdot dj\ dq\,dr=k\int_0^{2p}dj\int_0^{p/2}\sin q\,dq\int_0^R r^3\,dr=\frac{1}{2}kp\,R^4.$$

$$z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{V(x,y,z)} z\mathrm{m}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{kp\,R^4}\iiint\limits_{V(x,y,z)} z\cdot k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{2k}{kp\,R^4}\iiint\limits_{V(j,q,r)}(r\cos q)\cdot(r^2\sin q)\cdot r\cdot dj\ dq\,dr=\frac{2}{p\,R^4}\int_0^{2p}dj\int_0^{p/2}\sin q\,d\sin q\int_0^R r^4\,dr=$$

$$=\frac{2}{p\,R^4}\cdot 2p\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{2}{5}R.\ \text{Ответ: } C\left(0,0,\frac{2}{5}R\right).$$

***Пример* 4.8.** Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ x+y+z=8$.

Так как тело однородно, то

$$x_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz,\quad y_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz,$$

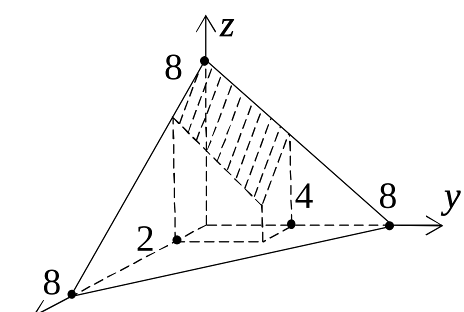


Рис. 4.11

где $v=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ – объём тела V. $v=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{8-x-y} dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4(8-x-y)dy=\ldots=$

$=\int\limits_0^2(24-4x)dx=40$. (см. рис. 4.11)

$$x_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz=\left[\begin{matrix}\text{используем вычис-}\\ \text{ления объёма } v\end{matrix}\right]=\frac{1}{40}\int\limits_0^2 x\cdot(24-4x)dx=\frac{14}{15}.$$

$$y_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz=\left[\begin{matrix}\text{также используем}\\ \text{предыд. вычисления}\end{matrix}\right]=\frac{1}{40}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4 y(8-x-y)dy=\frac{26}{15}.$$

$$z_c=\frac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{40}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{8-x-y} z\,dz=\frac{1}{40}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4\frac{1}{2}(8-x-y)^2dy=$$

$$=\frac{1}{80}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4(x+y-8)^2d(x+y-8)=\frac{1}{80}\int\limits_0^2 dx\frac{1}{3}\cdot(x+y-8)^2\Big|_{y=0}^{y=4}=\ldots=\frac{8}{3}$$

Ответ. $C\left(\frac{14}{15},\frac{26}{15},\frac{8}{3}\right)$.

Пусть задано тело V с плотностью $\mu(x,y,z)$. ***Момент инерции*** I_0 ***относительно начала координат*** вычисляется по формуле

$$J_0=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)m(x,y,z)\;dx\,dy\,dz$$

Моменты инерции J_x, J_y, J_z ***относительно координатных осей*** Ox, Oy, Oz вычисляются по формулам:

$$J_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\qquad J_y=\iiint\limits_V(x^2+z^2)m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$J_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Моменты инерции $J_{xy},\ J_{xz},\ J_{yz}$ ***относительно координатных плоскостей*** Oxy, Oxz, Oyz вычисляются по формулам:

$$J_{xy}=\iiint\limits_V z^2m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad J_{xz}=\iiint\limits_V y^2m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$J_{yz}=\iiint\limits_V x^2m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

***Пример* 4.9.** Найти моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра массы M с радиусом основания R=1 и высотой H=1 относительно диаметра основания, относительно диаметра его среднего сечения и относительно центра тяжести цилиндра.

Расположим заданный цилиндр как показано на рис. 4.12. Плотность обозначим $m(x,y,z)=m_0$. Возьмём диаметр основания цилиндра, лежащий на оси Ox.

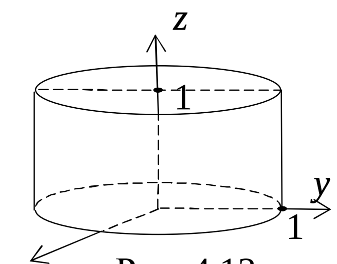


Рис. 4.12

Тогда момент инерции относительно диаметра основания равен

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = m_0 \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

В цилиндрических координатах цилиндр задаётся неравенствами $0 \le j \le 2p$, $0 \le r \le 1$, $0 \le z \le 1$.

$y^2+z^2 = r^2\sin^2 j + z^2$, $|J| = r$.

$$J_x = m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^1 (r^2\sin^2 j + z^2)dz = m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r\,dr \cdot \left(r^2\sin^2 j \cdot z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 \left(r^3\sin^2 j + \frac{1}{3}r \right)dr = m_0 \int\limits_0^{2p} \left(\frac{1}{4}\sin^2 j + \frac{1}{6} \right)dj = m_0 \int\limits_0^{2p} \left(\frac{1-\cos 2j}{4\cdot 2} + \frac{1}{6} \right)dj =$$

$$= m_0 \cdot \left(\frac{j - 0{,}5\sin 2j}{8} + \frac{j}{6} \right)\Bigg|_0^{2p} = m_0 \cdot \left(\frac{p}{4} + \frac{p}{3} \right) = \frac{7}{12} m_0 p.$$ Так как объём цилиндра равен $V = pR^2H = p$, то масса $M = m_0 \cdot V = m_0 p$.

Следовательно, $J_x = \frac{7}{12}\mu_0\pi = \frac{7}{12}M$.

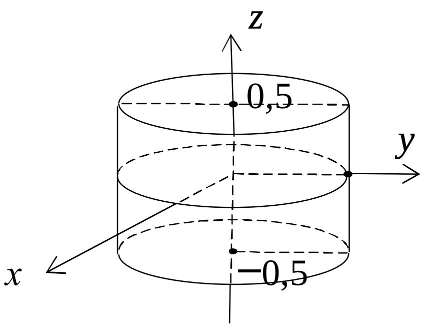


Рис. 4.13

Расположим заданный цилиндр как показано на рис. 4.13. Момент инерции относительно диаметра среднего сечения равен

$$J_x = m_0 \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} (r^2\sin^2 j + z^2)dz =$$

$$= m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r\,dr \cdot \left(r^2\sin^2 j \cdot z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} m_0 p = \frac{1}{3} M.$$

Центром тяжести цилиндра является начало координат. Момент инерции относительно центра тяжести цилиндра равен

$$J_0 = m_0 \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = m_0 \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} (r^2+z^2)dz = \frac{7}{12} m_0 p = \frac{7}{12} M.$$

Ответ: $\frac{7M}{12}, \frac{M}{3}, \frac{7M}{12}$.

***Пример* 4.10.** Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара, а на поверхности шара равна γ_0.

Расположим заданный шар как показано на рис. 4.14. Плотность в точке шара $M(x,y,z)$ равна $m(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Определим коэффициент пропорциональности k, подставив в формулу $r(x,y,z)$ точку $A(0,R,0)$. Получим $m(0,R,0)=g_0$. Т.е. $k\sqrt{0^2+R^2+0^2}=g_0$, $k=g_0/R$.

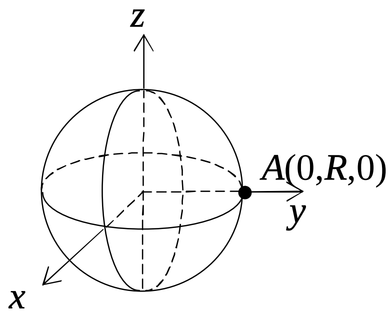


Рис. 4.14

Т.о. $m(x,y,z)=\dfrac{g_0}{R}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Возьмём диаметр шара, лежащий на оси Oz. Момент инерции относительно диаметра шара равен $J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,m(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Перейдём к сферическим координатам:
$j\in[0;2p]$, $q\in[0;p]$, $r\geq 0$, $x=r\cos j\,\sin q$, $y=r\sin j\,\sin q$, $z=r\cos q$, $x^2+y^2=r^2\sin^2 q$,
$|J|=r^2\sin q$, $m(x,y,z)=\dfrac{g_0}{R}r$.

Тогда $J_z=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{p}dq\int\limits_0^{R}(r^2\sin q)\cdot(r^2\sin^2 q)\cdot\left(\dfrac{g_0}{R}r\right)dr=$

$=\dfrac{g_0}{R}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{p}\sin^3 q\,dq\int\limits_0^{R}r^5\,dr=\dfrac{g_0}{R}\cdot 2p\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{R^6}{6}=\dfrac{4}{9}pg_0R^5.$

Ответ: $\dfrac{4}{9}pg_0R^5$.

АЗ-4

1. Вычислить с помощью тройного интеграла (в прямоугольных координатах) объёмы тел, ограниченных заданными поверхностями:
а) параболоидами $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, цилиндром $y=x^2$ и плоскостью $y=x$;
б) цилиндрами $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ и плоскостями $x=-1$, $x=2$.
2. Вычислить с помощью тройного интеграла (в цилиндрических координатах) объёмы тел, ограниченных заданными поверхностями:
а) конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоидом $3z=x^2+y^2$;
б) конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$.
3. Вычислить с помощью тройного интеграла (в цилиндрических координатах) объём тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=22$ и параболоидом $x^2+y^2=9z$.
4. Составить повторный интеграл (в цилиндрических координатах) для вычисления с помощью тройного интеграла объёма тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=3az$, $a>0$ (имеется в виду часть

шара, лежащая внутри параболоида).

5. Вычислить с помощью тройного интеграла (в сферических координатах) объём тела, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+z^2=25$ и “полуконусом” $y=\sqrt{x^2+z^2}$.

6. Вычислить с помощью тройного интеграла (в сферических координатах) объём тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4,\ a>0$.

7. Вычислить объёмы тел, ограниченных заданными поверхностями (входящие в условие задач параметры a, b, c положительны):

а) эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

б) параболоидом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и плоскостью $z=c$;

в) “полуконусом” $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $z\ge 0$ и плоскостью $z=c$.

8. Вычислить массу однородного тела (взять $\mu(x,y,z)=1$), ограниченного поверхностью $x^2+y^2+4z^2=1$.

9. Вычислить массу однородного тела (взять $\mu(x,y,z)=1$), ограниченного конусом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}$ и плоскостью $z=3$.

10. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круговым цилиндром радиуса $R=2$ и с высотой $H=3$, если его плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до центра основания цилиндра.

11. Найти массу кругового конуса с радиусом основания $R=2$ и высотой $H=5$, если его плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно плоскости основания, и в центре основания равна γ_0.

12. Найти массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность массы в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до начала координат, а наибольшее значение плотности равно γ_0.

13. Найти координаты центра масс однородных тел, ограниченных поверхностями:

а) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

б) $z=x^2+y^2,\ z=1$;

в) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=1$;

г) $x^2+y^2+z^2=1,\ z=0,\ z\ge 0$.

14. Вычислить момент инерции однородного прямого кругового цилиндра с массой, равной M, радиусом основания $R=4$ и высотой $H=6$ относительно диаметра его среднего сечения.

15. Вычислить момент инерции однородного ($\mu=1$) прямого кругового цилиндра с радиусом основания $R=2$ и высотой $H=3$ относительно диаметра основания

цилиндра.

16. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела (μ=1), ограниченного заданными поверхностями:

а) $z = 3(x^2 + y^2),\ z = 3,\ Oz$; б) $x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 2,\ Ox$.

17. Найти моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда с массой, равной *M*, с рёбрами *a*, *b*, *c* относительно каждого из рёбер и относительно центра тяжести.

18. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного (μ=1) тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

19. Найти моменты инерции однородного (μ=1) тела, ограниченного параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ и плоскостью z=0 относительно координатных плоскостей.

20. Найти моменты инерции однородного шара радиуса *R* с массой, равной *M*, относительно его центра и относительно диаметра.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями.

1.1. $D: y\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\geq 0.$

1.2. $D: x^2=2y,\ 5x-2y-6=0.$

1.3. $D: x=\sqrt{8-y^2},\ y\geq 0,\ y=x.$

1.4. $D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 1,\ y=\ln x.$

1.5. $D: x^2=2-y,\ x+y=0.$

1.6. $D: y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2.$

1.7. $D: y=x^2-2,\ y=x.$

1.8. $D: x\geq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=x.$

1.9. $D: y^2=2x,\ x^2=2y,\ x\leq 1.$

1.10. $D: x\geq 0,\ y\geq x,\ y=\sqrt{9-x^2}.$

1.11. $D: y^2=2-x,\ y=x.$

1.12. $D: x=\sqrt{2-y^2},\ x=y^2,\ y\geq 0.$

1.13. $D: y\geq 0,\ x+2y-12=0,\ y=\ln x.$

1.14. $D: x\leq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=-x.$

1.15. $D: y=0,\ y\geq x,\ y=-\sqrt{2-x^2}.$

1.16. $D: y\geq 0,\ x=\sqrt{y},\ y=\sqrt{8-x^2}.$

1.17. $D: y=-x,\ y^2=x+3.$

1.18. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ x\geq 0,\ x=1,\ y=0.$

1.19. $D: x=-1,\ x=-2,\ y\geq 0,\ y=x^2.$

1.20. $D: y\leq 0,\ x^2=-y,\ x=\sqrt{1-y^2}.$

1.21. $D: y\geq 0,\ y\leq 1,\ y=x,\ x=-\sqrt{4-y^2}.$

1.22. $D: x\leq 0,\ y=1,\ y=4,\ y=-x.$

1.23. $D: y=3-x^2,\ y=-x.$

1.24. $D: x=0,\ x=-2,\ y\geq 0,\ y=x^2+4.$

1.25. $D: x=0,\ y=0,\ y=1,\ (x-3)^2+y^2=1.$

2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

2.1. $\iint\limits_D (y^2+x)dx\,dy;\qquad D: y=x^3,\ y=3x.$

2.2. $\iint\limits_D (x^3-y)dx\,dy;\qquad D: y=x,\ xy=1,\ y=2.$

2.3. $\iint\limits_D (x+y^3)dx\,dy;\qquad D: y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$

2.4. $\iint\limits_D (x^2+5x)dx\,dy;\qquad D: x+y=1,\ x+y=2,\ x\geq 1,\ x\leq 2.$

2.5. $\iint\limits_D xy\,dxdy;\qquad D: y=x^2,\ y=2x.$

2.6. $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy;\qquad D: y=3x^2,\ y=4.$

2.7. $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy;\qquad D: y=x+5,\ x+y=-5,\ x\leq 0.$

2.8. $\iint\limits_D x^2y^3dxdy;\qquad D: y=x^2-1,\ x\geq 0,\ y\leq 0.$

2.9. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy;\qquad D: y=x^3,\ y=0,\ x\leq 3.$

2.10. $\iint\limits_D (x+y)dxdy;\qquad D: y=x^3,\ y=3x.$

2.11. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy;\qquad D: x^2-1,\ y=-x^2+1.$

2.12. $\iint\limits_D \left(x^3 - 3y\right) dxdy;\qquad D: y = x^2 - 1,\ y = 1.$

2.13. $\iint\limits_D \left(x - y^2\right) dxdy;\qquad D: x = y^2,\ y = x.$

2.14. $\iint\limits_D \left(xy - 1\right) dxdy;\qquad D: y = 5x,\ y = x,\ x = 3.$

2.15. $\iint\limits_D \left(x^2 + 1\right) y\, dxdy;\qquad D: y = 1 - x^2,\ y = -3.$

2.16. $\iint\limits_D \left(x - 2\right) y\, dxdy;\qquad D: y = x,\ y = 2x,\ x = 2.$

2.17. $\iint\limits_D \left(x^3 - 3y\right) dxdy;\qquad D: x + y = 1,\ y = x^2 - 1,\ x \geq 0.$

2.18. $\iint\limits_D x\left(y + 3\right) dxdy;\qquad D: y = 2 - x,\ y = x,\ x \geq 0.$

2.19. $\iint\limits_D \left(x + 5\right) y\, dxdy;\qquad D: y^2 = x,\ 5y = x.$

2.20. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy;\qquad D: y = x^2 - 1,\ y = -x^2 + 1.$

2.21. $\iint\limits_D \left(x + 10\right) y\, dxdy;\qquad D: y^2 = x,\ x = 1.$

2.22. $\iint\limits_D \left(3x - y\right) dxdy;\qquad D: y = x^2,\ x = y^2.$

2.23. $\iint\limits_D xy^2 dxdy;\qquad D: y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 3.$

2.24. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2} dxdy;\qquad D: xy = 1,\ y = 2x,\ y = 4.$

2.25. $\iint\limits_D x^2 \cdot y\, dxdy;\qquad D: y = 3x^2,\ y = 5.$

3. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

3.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dy.$

3.2. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$

3.3. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$

3.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dy.$

3.5. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx.$

3.6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$

3.7. $\int\limits_{-5}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dy.$

3.8. $\int\limits_{-5}^5 dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dy.$

3.9. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dy.$

3.10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$

3.11. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$

3.12. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}\cos^2\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3.13. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3.14. $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.15. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy.$

3.16. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

3.17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3.18. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy.$

3.19. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy.$

3.20. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3.21. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \cos\left(x^2+y^2\right)dy.$

3.22. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{x^2+y^2}dy.$

3.23. $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.24. $\int\limits_{-4}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy.$

3.25. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy.$

4. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями.

4.1. D: $y^2=4x$, $x+y=3$, $y\geq 0$. (Ответ: 10/3.)
4.2. D: $y=6x^2$, $x+y=2$, $x\geq 0$. (Ответ: 5/8.)
4.3. D: $y^2=x+2$, $x=2$. (Ответ: 32/3.)
4.4. D: $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$, $x\leq 0$, $y\geq 0$. (Ответ: 16/3.)
4.5. D: $y=8/(x^2+4)$, $x^2=4y$. (Ответ: $2\pi-4/3$.)
4.6. D: $y=x^2+1$, $x+y=3$. (Ответ: 9/2.)
4.7. D: $y^2=4x$, $x^2=4y$. (Ответ: 16/3.)
4.8. D: $y=\cos x$, $y\leq x+1$, $y\geq 0$. (Ответ: 3/2.)
4.9. D: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\geq 0$. (Ответ: $2\pi-\sqrt{3}/6$.)
4.10. D: $y=x^2+2$, $x\geq 0$, $x=2$, $y=x$. (Ответ: 14/3.)
4.11. D: $y=4x^2$, $9y=x^2$, $y\leq 2$. (Ответ: $20\sqrt{2}/3$.)
4.12. D: $y=x^2$, $y=-x$. (Ответ: 1/6.)
4.13. D: $x=y^2$, $x=\frac{3}{4}y^2+1$. (Ответ: 8/3.)
4.14. D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$. (Ответ: $\pi/2+1/3$.)
4.15. D: $y=x^2+4x$, $y=x+4$. (Ответ: 125/6.)
4.16. D: $2y=\sqrt{x}$, $x+y=5$, $x\geq 0$. (Ответ: 28/3.)
4.17. D: $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=2$, $x=0$. (Ответ: 3/ln2 - 4/3.)
4.18. D: $y=-2x^2+2$, $y\geq -6$. (Ответ: 64/3.)
4.19. D: $y^2=4x$, $x=8/(y^2+4)$. (Ответ: $2\pi-4/3$.)
4.20. D: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$. (Ответ: 9.)
4.21. D: $x=y^2+1$, $x+y=3$. (Ответ: 9/2.)

4.22. D: $x^2=3y$, $y^2=3x$. (Ответ: 3.)
4.23. D: $x=\cos y$, $x\leq y+1$, $x\geq 0$. (Ответ: 1/2.)
4.24. D: $x=4-y^2$, $x-y+2=0$. (Ответ: 125/6.)
4.25. D: $x=y^2$, $x=\sqrt{2-y^2}$. (Ответ: $\pi/2+1/3$.)

5. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu=\mu(x, y)$.
5.1. D: $y^2=x$, $x=3$, $\mu=x$. (Ответ: $36\sqrt{3}/5$.)
5.2. D: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $\mu=x^2$. (Ответ: 1/12.)
5.3. D: $x=0$, $y=0$, $2x+3y=6$, $\mu=y^2/2$. (Ответ: 1.)
5.4. D: $x^2+y^2=4x$, $\mu=4-x$. (Ответ: 8π.)
5.5. D: $x=0$, $y=1$, $y=x$, $\mu=x^2+2y^2$. (Ответ: 7/12.)
5.6. D: $x^2+y^2=1$, $\mu=2-x-y$. (Ответ: 2π.)
5.7. D: $x^2+y^2=4y$, $\mu=\sqrt{4-y}$. (Ответ: 256/15.)
5.8. D: $y=x$, $y=-x$, $y=1$, $\mu=\sqrt{1-y}$. (Ответ: 8/15.)
5.9. D: $x=0$, $y=2x$, $x+y=2$, $\mu=2-x-y$. (Ответ: 4/9.)
5.10. D: $x=1$, $x=y^2$, $\mu=4-x-y$. (Ответ: 68/15.)
5.11. D: $y=0$, $x^2=1-y$, $\mu=3-x-y$. (Ответ: 14/5.)
5.12. D: $y=x^2$, $x=y^2$, $\mu=3x+2y+6$. (Ответ: 11/4.)
5.13. D: $y=x^2$, $y=4$, $\mu=2x+5y+10$. (Ответ: 752/3.)
5.14. D: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $\mu=2x^2+y^2$. (Ответ: 1/4.)
5.15. D: $x=0$, $y^2=1-x$, $\mu=2-x-y$. (Ответ: 32/15.)
5.16. D: $y=\sqrt{x}$, $y=x$, $\mu=2-x-y$. (Ответ: 51/60.)
5.17. D: $y=x^2-1$, $y=1$, $\mu=3x^2+2y^2+1$. (Ответ: $264\sqrt{2}/35$.)
5.18. D: $x=1$, $y=0$, $y=x$, $\mu=x^2+2y^2+10$. (Ответ: 65/12.)
5.19. D: $y=0$, $y=2x$, $x+y=6$, $\mu=x^2$. (Ответ: 104.)
5.20. D: $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2=4$, $\mu=4-x^2$. (Ответ: 3π.)
5.21. D: $y=x^2$, $y=2$, $\mu=2-y$. (Ответ: $32\sqrt{2}/15$.)
5.22. D: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $\mu=x^2+y^2$. (Ответ: 1/6.)
5.23. D: $y=x^2+1$, $x+y=3$, $\mu=4x+5y+2$. (Ответ: 351/6.)
5.24. D: $y=x^2-1$, $x+y=1$, $\mu=2x+5y+8$. (Ответ: 45.)
5.25. D: $x=0$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$, $\mu=x$. (Ответ: 118/3.)

6. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.
6.1. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \ z=2x^2+3y^2,\ x+y=1.$
6.2. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \ z=x^2+y^2,\ x+y=2.$
6.3. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \ z=3x^2+y^2,\ x+y=3.$
6.4. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \ z=x^2+5y^2,\ x+2y=2.$
6.5. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \ z=3x^2+2y^2,\ 2x+y=1.$

6.6. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = 5 - x^2 - y^2,\ y \ge x.$
6.7. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = 10 - x^2 - y^2,\ y \ge 2x.$
6.8. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = 9 - x^2 - y^2,\ x + y = 3.$
6.9. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = 3 + x^2 + y^2,\ 2x + 3y = 6.$
6.10. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = x^2 + y^2,\ 5x + y = 5.$
6.11. $V: x \ge 0,\ z \ge 0,\ y = 2x,\ y = 4,\ z = 10 - x^2 - y^2.$
6.12. $V: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \ z = 16 - x^2 - y^2,\ y = 4 - x.$
6.13. $V: x \ge 0,\ z \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ \ z = 2x^2 + 2y^2.$
6.14. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 3,\ y = \dfrac{1}{3}x,\ \ z = x^2 + y^2.$
6.15. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 5,\ y = \dfrac{1}{5}x,\ \ z = 2x^2 + y^2.$
6.16. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 4,\ y = \dfrac{1}{8}x,\ \ z = 3x^2 + y^2.$
6.17. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 5,\ y = \dfrac{1}{10}x,\ \ z = 5x^2 + 3y^2.$
6.18. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 10,\ y = \dfrac{1}{5}x,\ \ z = 7x^2 + y^2.$
6.19. $V: z \ge 0,\ y = 0,\ y = 2x,\ \ z = 4 - x^2 - y^2.$
6.20. $V: z \ge 0,\ y = \dfrac{1}{3}x,\ y = 3x,\ \ z = 5 - x^2 - y^2.$
6.21. $V: y \ge 0,\ z \ge 0,\ x = 5,\ y = \dfrac{x}{5},\ \ z = x^2 + 5y^2.$
6.22. $V: x \ge 0,\ z \ge 0,\ y = 2x,\ y = 1,\ \ z = 10 - x^2 - y^2.$
6.23. $V: z \ge 0,\ y = x,\ y = -2x,\ y = 1,\ \ z = x^2 + 4y^2.$
6.24. $V: z \ge 0,\ y = x,\ y = -x,\ y = 2,\ \ z = x^2 + 3y^2.$
6.25. $V: z \ge 0,\ y = 2x,\ y = 3x,\ x = 1,\ \ z = x^2 + 2y^2.$

7. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

7.1. $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{y\,dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ V: x^2 + y^2 = 2y,\ \ x^2 + y^2 = 4y,\ \ x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 5.$

7.2. $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{y\,dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ V: x^2 + y^2 = 3y,\ \ x^2 + y^2 = 6y,\ \ x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 3.$

7.3. $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ V: x^2 + y^2 = 4y,\ \ x^2 + y^2 = 8y,\ \ x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 2.$

7.4. $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{x\,dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ V: x^2 + y^2 = 2x,\ \ x^2 + y^2 = 4x,\ \ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 4.$

7.5. $\displaystyle\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2 + y^2 = 2x,\ \ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + z = 2.$

7.6. $\displaystyle\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2 + y^2 = 2x,\ \ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 5.$

7.7. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2=4y,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ y+z=4.$

7.8. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: x^2+y^2=6y,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ y+x=6.$

7.9. $\iiint\limits_V xdxdydz,\quad V: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2=y^2+z^2,\ x\ge 0.$

7.10. $\iiint\limits_V ydxdydz,\quad V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

7.11. $\iiint\limits_V ydxdydz,\quad V: z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y\ge 0.$

7.12. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

7.13. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le x.$

7.14. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

7.15. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ y\ge\sqrt{3}x,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

7.16. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2},\quad V: x^2+y^2+z^2=9,\ z\ge 0,\ y\ge 0.$

7.17. $\iiint\limits_V \frac{x^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2},\quad V: x^2+y^2+z^2=16,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

7.18. $\iiint\limits_V xdxdydz,\quad V: z=x^2+y^2+z^2=8,\ x^2=y^2+z^2,\ x\ge 0.$

7.19. $\iiint\limits_V ydxdydz,\quad V: z=x^2+y^2+z^2=32,\ y^2=x^2+z^2,\ y\ge 0.$

7.20. $\iiint\limits_V zdxdydz,\quad V: z=x^2+y^2+z^2=36,\ z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0.$

7.21. $\iiint\limits_V xydxdydz,\quad V: z=x^2+y^2+z^2=8,\ z^2=x^2+y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

7.22. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\ge 0.$

7.23. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

7.24. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: x^2+y^2=16y,\ y+z=16,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

7.25. $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad V: z=2x^2+2y^2,\ y\ge 0,\ y\le\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ z=5.$

8. Найти объём, массу, координаты центра масс однородного тела, ограниченного указанными поверхностями, плотность которого равна g_0.

8.1. $x=6(y^2+z^2),\ y^2+z^2=3,\ x=0.$

8.2. $y=3\sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2=36,\ y=0.$

8.3. $x=7(y^2+z^2),\ x=28.$

8.4. $z=2\sqrt{x^2+y^2},\ z=8.$

8.5. $z=5(x^2+y^2),\ x^2+y^2=2,\ z=0.$

8.6. $z=6\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2=9,\ x=0.$

8.7. $z=7(x^2+y^2),\ z=32.$

8.8. $z=3\sqrt{x^2+z^2},\ y=9.$

8.9. $9y=x^2+z^2,\ x^2+z^2=4,\ y=0.$

8.10. $3z=3\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=4,\ z=0.$

8.11. $x^2+y^2=6y,\ y=8.$

8.12. $8x=3\sqrt{y^2+z^2},\ x=1/2.$

8.13. $2x=y^2+z^2,\ y^2+z^2=4,\ x=0.$

8.14. $4y=3\sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2=16,\ y=0.$

8.15. $y^2+z^2=8x,\ x=2.$

8.16. $z=9\sqrt{x^2+y^2},\ z=36.$

8.17. $z=5(x^2+y^2),\ x^2+y^2=0,\ z=0.$

8.18. $x=2\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2=4,\ x=0.$

8.19. $x^2+z^2=4y,\ y=9.$

8.20. $x=5\sqrt{y^2+z^2},\ x=20.$

8.21. $y=x^2+z^2,\ x^2+z^2=10,\ y=0.$

8.22. $y=3\sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2=36,\ y=0.$

8.23. $y^2+z^2=3x,\ x=9.$

8.24. $y=\sqrt{x^2+z^2},\ \ y=0.$

8.25. $x=y^2+z^2,\ y^2+z^2=9,\ x=0.$

9. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, ограниченного данными поверхностями. Плотность тела μ принять равной 1.

9.1. $y^2=x^2+z^2,\ y=4,\ Oy.$

9.2. $x=y^2+z^2,\ x=2,\ Ox.$

9.3. $y^2=x^2+z^2,\ y=4,\ Oy.$

9.4. $x=y^2+z^2,\ x=9,\ Ox.$

9.5. $x^2=y^2+z^2,\ x=2,\ Ox.$

9.6. $y=x^2+z^2,\ y=2,\ Oy.$

9.7. $x^2=y^2+z^2,\ x=3,\ Ox.$

9.8. $x=y^2+z^2,\ x=3,\ Ox.$

9.9. $y=2\sqrt{x^2+z^2},\ y=2,\ Oy.$

9.10. $y=x^2+z^2,\ y=3,\ Oy.$

9.11. $x^2=y^2+z^2,\ y^2+z^2=1,\ x=3,\ Ox.$

9.12. $x=y^2+z^2,\ y^2+z^2=1, x=3, Ox.$

9.13. $z^2=x^2+y^2,\ z=3,\ Oz.$

9.14. $z=x^2+y^2,\ z=3,\ Oz.$

9.15. $y^2=x^2+z^2,\ x^2+z^2=4,\ y=0,\ Ox.$

9.16. $2y=x^2+z^2,\ y=2,\ Oy.$

9.17. $x^2=y^2+z^2,\ x=2,\ Ox$

9.18. $2z=x^2+y^2,\ z=2,\ Oz.$

9.19. $x^2=y^2+z^2,\ y^2+z^2=4,\ x=0,\ Ox.$

9.20. $2z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z=0, Oz.$

9.21. $z=2(x^2+y^2),\ z=2,\ Oz.$

9.22. $x=1-y^2-z^2,\ x=0,\ Ox$

9.23. $y=4-x^2-z^2,\ y=0,\ Oy.$

9.24. $x=2(y^2+z^2),\ x=3,\ Ox.$

9.25. $z=9-x^2-y^2,\ z=0,\ Oz.$

10. Найти массу однородного тела, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=R_1$, $x^2+y^2+z^2=R_2$, $R_1<R_2$ и заданным конусом. Плотность $m(x,y,z)=m_0$.

10.1. $R_1=1,\ R_2=2,\ z^2=x^2+y^2.$

10.2. $R_1=2,\ R_2=3,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

10.3. $R_1=3,\ R_2=4,\ x^2=y^2+z^2.$

10.4. $R_1=1,\ R_2=3,\ x=\sqrt{y^2+z^2}.$

10.5. $R_1=2,\ R_2=3,\ y^2=x^2+z^2.$

10.6. $R_1=1,\ R_2=4,\ y=\sqrt{x^2+z^2}.$

10.7. $R_1=2,\ R_2=4,\ \sqrt{3}\,z=\sqrt{x^2+y^2}.$

10.8. $R_1=1,\ R_2=4,\ 3x^2=y^2+z^2.$

10.9. $R_1=1,\ R_2=5,\ \sqrt{3}\,x=\sqrt{y^2+z^2}.$

10.10. $R_1=2,\ R_2=5,\ 3y^2=x^2+z^2.$

10.11. $R_1=3,\ R_2=5,\ \sqrt{3}\,y=\sqrt{x^2+z^2}.$

10.12. $R_1=4,\ R_2=5,\ z^2=3(x^2+y^2).$

10.13. $R_1=1,\ R_2=2,\ z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}.$

10.14. $R_1=1,\ R_2=3,\ x^2=3(y^2+z^2).$

10.15. $R_1=1,\ R_2=4,\ x=\sqrt{3}\sqrt{y^2+z^2}.$

10.16. $R_1=1,\ R_2=5,\ y^2=3(x^2+z^2).$

10.17. $R_1=2,\ R_2=3,\ y=\sqrt{3}\sqrt{x^2+z^2}.$

10.18. $R_1=2,\ R_2=4,\ z=-\sqrt{x^2+y^2}.$

10.19. $R_1=2,\ R_2=5,\ x=-\sqrt{y^2+z^2}.$

10.20. $R_1=3,\ R_2=4,\ y=-\sqrt{x^2+z^2}.$

10.21. $R_1=3,\ R_2=5,\ \sqrt{3}\,z=-\sqrt{x^2+y^2}.$

10.22. $R_1=4,\ R_2=5,\ \sqrt{3}\,x=-\sqrt{y^2+z^2}.$

10.23. $R_1=1,\ R_2=2,\ \sqrt{3}\,y=-\sqrt{x^2+z^2}.$

10.24. $R_1=1,\ R_2=3,\ z=-\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}.$

10.25. $R_1=1,\ R_2=5,\ y=-\sqrt{3}\sqrt{x^2+z^2}.$

Ответы к заданиям практических занятий

АЗ-2

1) а) 2; б) 15/2-4ln4; в) 125/6; г) $\sqrt{2}-1$; д) 5; е) 64/3; **2)** а)$\pi/2$; б) 3π; в) $\pi a^2/4$; г)$5\pi/8$; **3)** a^2; **4)** 4π; **5)** 560/3; **6)** 45; **7)** $\pi\sqrt{3}a^2/4$; **8)** $2\pi R^2$; **9)** $2/3\pi(\sqrt{8}-1)$; **10)** 11/30; **11)** 5; **12)** $k\pi R^4/2$; **13)** x_c=2/5, y_c=0; **14)** x_c=0, $y_c=4a/(3\pi)$; **15)** $ab^2/2$; **16)** $2R^3/3$; **17)** I_O=104/495, I_X=4/33, I_Y=4/45; **18)** $I_O=ab(a^2+b^2)/3$; **19)** $I_Y=\pi a^3 b/4$.

АЗ-4

1) а) 3/35; б) 8; **2**) а) $9\pi/2$; б) $\pi/3$; **3**) $(44\sqrt{22}-70)p/3$; **4**) $19p\,a^3/6$;
5) $39\left(2-\sqrt{2}\right)p$; **6**) $4\pi a^3/21$; **7**) а) $4p\,abc/3$; б) $p\,abc^2/2$; в) $p\,abc/3$; **8**) $2\pi/3$;
9) 4π; **10**) 60π; **11**) $4\pi g_0$; **12**) $31p\,g_0\,a^3/5$; **13**) а) $(1/4;1/4;1/4)$; б) $(0;0;2/3)$;
в) $(0;0;3/4)$; г) $(0;0;3/8)$; **14**) $7M$; **15**) $48p$; **16**) а) $p/2$; б) $p/5$;
17) $J_a=M(b^2+c^2)/3$, $J_b=M(a^2+c^2)/3$, $J_c=M(a^2+b^2)/3$,
$J_0=M(a^2+b^2+c^2)/12$; **18**) $1/60, 1/60, 1/60$; **19**) $J_{xz}=J_{yz}=9p/4$,
$J_{xy}=27p/4$; **20**) $3MR^2/5$, $2MR^2/5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1988. – 432 с.
2. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1-5 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. школа, 1984. – Ч. 1–5.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2 т. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985 г. – Т. 1-2.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко [и др.] – Минск : Выш. школа, 1990. – Ч. 3.