МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Функции нескольких переменных.
Интегральное исчисление функции одной переменной.
Дифференциальные уравнения

Методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей

ВИТЕБСК
2014

УДК 517 (076.1) (075.8)

Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2014.

Составители: ст. преп. Коваленко А. В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В. С.,
ст. преп. Дмитриев А. П.,
ст. преп. Завацкий Ю. А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В. Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения, вопросы к экзамену и зачёту по четырём разделам курса “Высшая математика” и предназначены для проведения практических занятий у студентов первого курса экономического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
6 ноября 2013 г., протокол № 3.

Рецензент: ст. преп. Статковский Н. С.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "_4_" _декабря_2013 г., протокол № _8_.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч.-изд. лист. _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ №____

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия №02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих экономистов. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты-экономисты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов экономического факультета. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена или зачёта, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей первого года обучения.

В методических указаниях рассмотрены пять разделов курса «Высшая математика»: неопределённый интеграл, определённый интеграл, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, комплексные числа и дифференциальные уравнения. Согласно учебной программе курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей на второй семестр обучения, все эти темы студент должен изучить на 16 аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с базовой и учебной программами дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей, а также могут применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в методических указаниях теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (ВТОРОЙ СЕМЕСТР)

1. Первообразная функции. Неопределённый интеграл.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Таблица неопределённых интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования и метод замены переменных в неопределённом интеграле.
5. Метод интегрирования по частям для неопределённого интеграла.
6. Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Методы интегрирования рациональных дробей.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Интегрирование иррациональных функций.
10. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
11. Определённый интеграл и его свойства.
12. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Методы интегрирования определённого интеграла.
14. Несобственные интегралы первого и второго рода.
15. Экономические приложения определённого интеграла.
16. Геометрические приложения определённого интеграла.
17. Понятие функции нескольких переменных.
18. Предел функции нескольких переменных.
19. Частные производные. Экономические и геометрические приложения частных производных.
20. Дифференцируемость функций нескольких переменных.
21. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение.
22. Дифференцирование сложной функции.
23. Функции нескольких переменных, заданных неявно.
24. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
25. Частные производные и дифференциалы высшего порядка.
26. Локальный экстремум функции нескольких переменных.
27. Локальный экстремум функции двух переменных и его экономический смысл.
28. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.
29. Комплексные числа в алгебраической форме записи и операции над ними.
30. Комплексные числа в тригонометрической форме записи и операции над ними.
31. Комплексные числа в показательной форме записи и операции над ними.

32. Разложение многочлена на множители. Основная теорема алгебры.

33. Дифференциальные уравнения n-го порядка (общие понятия). Решение задачи Коши.

34. Дифференциальные уравнения 1-го порядка (общие понятия). Решение задачи Коши.

35. Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными.

36. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

37. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

38. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.

39. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом подстановки Бернулли.

40. Дифференциальное уравнение Бернулли.

41. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

42. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.

43. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Свойства решений. Определитель Вронского. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

44. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных корней характеристического уравнения.

45. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

46. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

47. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.

48. Нормальные системы дифференциальных уравнений (общие понятия).

49. Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений (общие понятия).

50. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

51. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

52. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ
(практическое занятие № 1)

Содержание: первообразная функции, неопределённый интеграл, основные свойства неопределённого интеграла, таблица основных неопределённых интегралов, непосредственное интегрирование, геометрический смысл неопределённого интеграла.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегрирование – это задача, обратная дифференцированию. То есть по заданной производной или дифференциалу некоторой функции необходимо восстановить саму функцию. С механической точки зрения это означает, что по заданной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон движения этой точки.

Определение 1.1.1 Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I, если для всех точек этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.1 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале I, то они отличаются друг от друга лишь на постоянную величину C, то есть $F_2(x) - F_1(x) = C$, где $C = Const$.

Определение 1.1.2 Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$.

Определение 1.1.3 *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке I называется множество всех первообразных этой функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1.1.1)$$

В формуле (1.1.1) функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, а C – *константой*. Процесс нахождения неопределённого интеграла называется *интегрированием*.

Теорема 1.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале I, то она интегрируема на этом интервале.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой множество однопараметрических кривых $y = F(x) + C$, обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с одной и той же абсциссой параллельны между собой. Кривые множества $\{F(x)+C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси ординат.

Основные свойства неопределённого интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

5) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;

6) если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Таблица основных неопределённых интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \end{array}\right.$ $a \neq 0$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C, \end{array}\right.$ $|x| < |a|$;

13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$;

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$, $|x| > |a|$;

16) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

17) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

19) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Если производные элементарных функций всегда выражаются элементарными функциями, то интегралы от элементарных функций не всегда можно представить в виде элементарных функций. Такие интегралы называются «*не берущимися*». Приведём примеры «*не берущихся*» интегралов: $\int e^{-x^2}\,dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – эллиптический интеграл первого рода, $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ – эллиптический интеграл второго рода.

Одним из методов интегрирования неопределённого интеграла является *метод непосредственного интегрирования.* Данный метод основан на применении таблицы основных неопределённых интегралов и свойств неопределённого интеграла.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти первообразную функции $f(x)=5\cos 7x-3\sin 4x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Производные функций $y=\sin 7x$, $y=\cos 4x$ и $y=\arcsin x$ равны, соответственно, $y'=7\cos 7x$, $y'=-4\sin 4x$ и $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, $\cos 7x=\frac{1}{7}(\sin 7x)'$, $\sin 4x=-\frac{1}{4}(\cos 4x)'$, а $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(\arcsin x)'$. Тогда первообразная заданной функции равна $F(x)=\frac{5}{7}\sin 7x+\frac{3}{4}\cos 4x+\arcsin x$.

1.2.2 Найти $\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx$.

Решение. Применив свойства 4 и 5, получим

$$\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx=\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx.$$

Применим к интегралам первую формулу таблицы интегралов

$$\int\left(4x^3+3x^2-2x+5\right)dx=4\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5\cdot x+C=x^4+x^3-x^2+5x+C.$$

1.2.3 Найти $\int\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение. $\int\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=5\ln|x|+\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x}+C$.

1.2.4 Найти $\int 2^x5^xe^xdx$.

Решение. $\int 2^x5^xe^xdx=\int(10e)^x\,dx=\frac{(10e)^x}{\ln 10e}+C$.

1.2.5 Найти $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

Решение. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$
$= -\mathrm{ctg}\, x - x + C$.

1.2.6 Найти $\int \frac{(2+x)^2}{x\left(4+x^2\right)} dx$.

Решение. $\int \frac{(2+x)^2}{x\left(4+x^2\right)} dx = \int \frac{4+4x+x^2}{x\left(4+x^2\right)} dx = \int \left(\frac{4}{4+x^2} + \frac{4}{x} \right) dx =$
$= \frac{4}{2} \mathrm{arctg} \frac{x}{2} + 4\ln|x| + C = 2\,\mathrm{arctg} \frac{x}{2} + 4\ln|x| + C$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти первообразные следующих функций:

1.3.1.1 $3x^5 + 2$. **1.3.1.2** $4x^3 + 5x + e$. **1.3.1.3** $\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}$.

1.3.1.4 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \pi$. **1.3.1.5** $\frac{1}{\sqrt{4+3x}}$. **1.3.1.6** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.3.1.7 $\frac{1}{25+x^2}$ **1.3.1.8** $\frac{x^3+1}{x-1}$. **1.3.1.9** $\cos 7x - \sin 6x$.

1.3.2 Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

1.3.2.1 $\int \left(\sqrt{5x} + 3\right) dx$. **1.3.2.2** $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x}} dx$. **1.3.2.3** $\int \frac{\left(5 - \sqrt{x}\right)^2}{5\sqrt{x}} dx$.

1.3.2.4 $\int \frac{x^4 + x^2 + 3}{x} dx$. **1.3.2.5** $\int 7^{2x} e^x dx$. **1.3.2.6** $\int (x + \sin x) dx$.

1.3.2.7 $\int \frac{6 - \cos x}{\cos^2 x} dx$. **1.3.2.8** $\int \mathrm{tg}^2 x dx$. **1.3.2.9** $\int \mathrm{cth}^2 x dx$.

1.3.2.10 $\int \frac{dx}{9 - x^2}$. **1.3.2.11** $\int \frac{dx}{25 + x^2}$. **1.3.2.12** $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - x^2}}$.

1.3.2.13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 11}}$. **1.3.2.14** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 13}}$. **1.3.2.15** $\int \frac{(9+x)^2 dx}{x\left(81 + x^2\right)}$.

1.3.2.16 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$. **1.3.2.17** $\int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 4} dx$. **1.3.2.18** $\int \frac{x^2 + 8}{x^2 + 9} dx$.

1.3.2.19 $\int \left(\frac{9\sqrt[7]{x^2} - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[21]{x}} - \sin x + 31^x + \frac{(10+x)^2}{x\left(100 + x^2\right)} - \frac{2\cos x + 3\cos^2 x}{4\cos x} + \mathrm{tg}^2 x - \frac{9}{x} \right) dx$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

1.4.1.1 $\int\left(\frac{5\sqrt[7]{x}-2\sqrt[4]{x}}{7\sqrt[5]{x}}-3\sin x+2^x+\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}-\frac{\cos x+\cos^2 x}{2\cos x}+\mathrm{tg}^2 x-\frac{4}{x}+2\right)dx.$

1.4.1.2 $\int\left(\frac{6\sqrt[5]{x}-3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[7]{x}}+\cos x+3^x+\frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)}+\frac{3\sin x+5\sin^2 x}{4\sin x}+\mathrm{ctg}^2 x+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

1.4.1.3 $\int\left(\frac{4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x}}-9\mathrm{sh}x+4^x+\frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}-\frac{\cos x-\cos^2 x}{3\cos x}+5\mathrm{th}^2x-\frac{9}{x^{10}}\right)dx.$

1.4.1.4 $\int\left(\frac{9\sqrt[9]{x}-6\sqrt[4]{x}}{5\sqrt[3]{x}}+4\mathrm{ch}x+5^x+\frac{(2-x)^2}{x(4+x^2)}+\frac{7\sin x-8\sin^2 x}{5\sin x}+\mathrm{cth}^2x-\frac{7}{x}\right)dx.$

1.4.1.5 $\int\left(\frac{9\sqrt{x}+6\sqrt[5]{x}}{3\sqrt[10]{x}}-\sin x+6^x+\frac{(3+x)^2}{x(9+x^2)}+\frac{2\cos x+\cos^2 x}{5\cos x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-6\right)dx.$

1.4.1.6 $\int\left(\frac{8\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^7}}+\cos x+8^x+3\cdot\frac{(4+x)^2}{x(16+x^2)}+\frac{1+3\sin x}{2\sin x}+\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{8}{x^9}\right)dx.$

1.4.1.7 $\int\left(\frac{4\sqrt[10]{x}-3\sqrt[5]{x}}{6\sqrt[15]{x}}-2\mathrm{sh}x+7^x+\frac{(3-x)^2}{x(9+x^2)}-\frac{7-5\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{4}{x^5}\right)dx.$

1.4.1.8 $\int\left(\frac{8\sqrt[6]{x}-6\sqrt[7]{x}}{7\sqrt[3]{x^4}}+9\mathrm{ch}x+9^x+\frac{(4-x)^2}{x(16+x^2)}+5^{2x}\cdot 3^x+\frac{2}{\sqrt{x^2-7}}-\frac{8}{x^9}+5\right)dx.$

1.4.1.9 $\int\left(\frac{12\sqrt[3]{x}-21\sqrt[4]{x}}{8\sqrt[12]{x}}-7\sin x+10^x+\frac{(5+x)^2}{x(25+x^2)}-\mathrm{tg}\,x\cdot\frac{1}{\sin x}+9\,\mathrm{tg}^2 x-\frac{4}{x}\right)dx.$

1.4.1.10 $\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}-3\sqrt[6]{x}}{9\sqrt[8]{x}}+2\cos x+11^x+\frac{(6+x)^2}{x(36+x^2)}+\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}+7\,\mathrm{ctg}^2 x+\frac{5}{x^6}\right)dx.$

1.4.1.11 $\int\left(\frac{7\sqrt[7]{x^2}+\sqrt{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}}-3\mathrm{sh}x+12^x+\frac{(5-x)^2}{x(25+x^2)}-\frac{3-2\cos x}{\cos x}+2\mathrm{th}^2x-\frac{8}{x}+8\right)dx.$

1.4.1.12 $\int\left(\frac{8\sqrt[9]{x^2}-5\sqrt[8]{x^5}}{4\sqrt[4]{x^5}}+\mathrm{ch}x+13^x+\frac{(6-x)^2}{x(36+x^2)}+\frac{\sin x-5\sin^2 x}{4\sin x}+\mathrm{cth}^2x-\frac{7}{x}\right)dx.$

1.4.1.13 $$\int\left(\frac{4\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[30]{x}}-\sin x+7^x+\frac{(7+x)^2}{x(49+x^2)}+\frac{\cos x+8\cos^2 x}{2\cos x}+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx.$$

1.4.1.14 $$\int\left(\frac{7\sqrt[3]{x^8}-8\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[12]{x}}+\cos x+15^x+\frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)}+\frac{1+3\sin x}{2\sin x}+\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{2}{x^3}\right)dx.$$

1.4.1.15 $$\int\left(\frac{4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}}{12\sqrt[12]{x}}-\mathrm{sh}x+16^x+\frac{(7-x)^2}{x(49+x^2)}-\frac{3-\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{4}{x^5}+e\right)dx.$$

1.4.1.16 $$\int\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{8\sqrt[6]{x}}-9\sin x+17^x+\frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)}-\frac{7\cos x+\cos^2 x}{3\cos x}-\mathrm{tg}^2 x-\frac{7}{x^8}\right)dx.$$

1.4.1.17 $$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[8]{x}}{5\sqrt{x}}+8\cos x+18^x+\frac{(9+x)^2}{x(81+x^2)}+\frac{\sin x+2\sin^2 x}{3\sin x}+4\,\mathrm{ctg}^2 x+\frac{4}{x}\right)dx.$$

1.4.1.18 $$\int\left(\frac{\sqrt[7]{x}-2\sqrt[6]{x}}{3\sqrt[5]{x}}+4\mathrm{sh}x+19^x+\frac{(8-x)^2}{x(64-x^2)}-\frac{\cos x-3\cos^2 x}{6\cos x}+7\,\mathrm{th}^2x-\frac{5}{x}\right)dx.$$

1.4.1.19 $$\int\left(\frac{\sqrt[5]{x}-3\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[3]{x}}+\mathrm{ch}x+20^x+\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}+\frac{\sin x-3\sin^2 x}{5\sin x}+\mathrm{cth}^2x-\frac{3}{x^4}+7\right)dx.$$

1.4.1.20 $$\int\left(\frac{5\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}{4\sqrt[3]{x}}-7\sin x+21^x+\frac{(x+3)^2}{x(x^2+9)}+\frac{3\cos x+\cos^2 x}{6\cos x}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx.$$

1.4.1.21 $$\int\left(\frac{5\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[3]{x^7}}+\cos x+21^x+\frac{(x+4)^2}{x(x^2+16)}+\frac{1+5\sin x}{5\sin x}+\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6}{x^7}\right)dx.$$

1.4.1.22 $$\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}{20\sqrt{x}}-3\mathrm{sh}x+22^x+\frac{(x-3)^2}{x(x^2-9)}-\frac{2-4\cos x}{2\cos x}+\frac{3}{\sqrt{16+x^2}}-\frac{7}{x^8}\right)dx.$$

1.4.1.23 $$\int\left(\frac{8\sqrt[8]{x}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}}+5\mathrm{ch}x+23^x+\frac{(x-4)^2}{x(16+x^2)}+6^{2x}\cdot 5^x+\frac{3}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{5}{x^6}+\pi\right)dx.$$

1.4.1.24 $$\int\left(\frac{\sqrt[8]{x}+5\sqrt[5]{x}}{4\sqrt[4]{x}}-8\sin x+24^x+\frac{(x+5)^2}{x(x^2+25)}-\mathrm{tg}\,x\cdot\frac{2}{\sin x}+3\,\mathrm{tg}^2 x-\frac{8}{x}\right)dx.$$

1.4.1.25 $$\int\left(\frac{4\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+3\cos x+25^x+\frac{(x+6)^2}{x(x^2+36)}+\frac{2}{\sqrt{3-x^2}}+5\,\mathrm{ctg}^2 x+\frac{3}{x^4}\right)dx.$$

1.4.1.26 $$\int\left(\frac{6\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[5]{x^3}}-5\operatorname{sh}x+26^x+\frac{(x-5)^2}{x(x^2+25)}-\frac{2-3\cos x}{\cos x}+7\operatorname{th}^2x-\frac{5}{x^6}\right)dx.$$

1.4.1.27 $$\int\left(\frac{\sqrt{x^9}-\sqrt[5]{x^8}}{3\sqrt[6]{x^5}}+\operatorname{ch}x+27^x+\frac{(x-6)^2}{x(x^2+36)}+\frac{\sin x-6\sin^2 x}{3\sin x}+3\operatorname{cth}^2x-\frac{7}{x}\right)dx.$$

1.4.1.28 $$\int\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{x}}-8\sin x+28^x+\frac{(x+7)^2}{x(x^2+49)}+\frac{3\cos x+\cos^2 x}{5\cos x}+\frac{2}{\sqrt{8-x^2}}\right)dx.$$

1.4.1.29 $$\int\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[7]{x^3}}{7\sqrt{x^3}}+2\cos x+29^x+\frac{(x+8)^2}{x(x^2+64)}+\frac{2+\sin x}{2\sin x}+\frac{9}{\cos^2 x}+\frac{11}{x^{12}}\right)dx.$$

1.4.1.30 $$\int\left(\frac{\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}}{24\sqrt[6]{x}}-3\operatorname{sh}x+30^x+\frac{(x-7)^2}{x(x^2+49)}-\frac{2-\cos x}{6\cos x}+\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}-\frac{5}{x^6}\right)dx.$$

2 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА (практическое занятие № 2)

Содержание: интегрирование подстановкой или заменой переменной, метод «подведения» функции под знак дифференциала, метод интегрирования по частям.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Кроме метода непосредственного интегрирования рассматриваются ещё два метода интегрирования: метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Метод подстановкой (заменой переменной).

Пусть требуется вычислить неопределённый интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Метод подстановкой состоит в том, что в заданном интеграле $\int f(x)dx$ переменную интегрирования x заменяем новой переменной интегрирования z по формуле $x=\varphi(z)$. Тогда подынтегральное выражение будет иметь вид: $f(x)dx = f(\varphi(z))d\varphi(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$.

Теорема 2.1.1 Пусть функция $x=\varphi(z)$ определена и дифференцируема на некотором множестве K и пусть M – множество значений этой функции, на котором определена функции $f(x)$. Тогда если на множестве M функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве K справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz. \tag{2.1.1}$$

Предположим, что интеграл, стоящий в правой части формулы (2.1.1), известен:

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C.$$

Отсюда можно найти исходный интеграл в виде функции от переменной x. Для этого необходимо разрешить уравнение $x = \varphi(z)$ относительно переменной z. Если $z = \psi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C = \Phi(\psi(x)) + C.$$

Часто при нахождении неопределённых интегралов пользуются методом «*подведения*» под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\eta'(x)dx = d(\eta(x))$. Переход от левой части последнего равенства к правой части называется подведением множителя $\eta'(x)$ под знак дифференциала.

Предположим, что необходимо найти интеграл вида

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx.$$

Внесём в этом интеграле множитель $\eta'(x)$ под знак дифференциала и выполним замену переменной $\eta'(x) = t$:

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx = \int g(\eta(x))d(\eta(x)) = \int g(t)dt.$$

Если интеграл $\int g(t)dt$ является табличным, то его находят непосредственным интегрированием.

Метод интегрирования по частям.

Теорема 2.1.2 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на промежутке I, то справедлива следующая формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2.1.2)$$

Формула (2.1.2) называется «*формулой интегрирования по частям*».

Формула интегрирования по частям в основном применяется, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на трансцендентную функцию (всякая аналитическая функция, отличная от алгебраической функции, для вычисления значений которой помимо алгебраических операций над аргументом, необходимо применять предельный переход в той или иной форме) или произведение трансцендентных функций. В частности, к трансцендентным функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические, обратно тригонометрические, гиперболические и обратно гиперболические функции.

В формуле интегрирования по частям через функцию $u = u(x)$ обозначают ту функцию, производная которой даёт наибольшее упрощение. Через дифференциал dv обозначаем всё то, что осталось в подынтегральном выражении. Если выполняется условие теоремы 2.1.2, то формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно.

Приведём некоторые часто встречающиеся типы интегралов, которые находятся по формуле интегрирования по частям.

1. *Интегралы типа* $\int P_n(x)\sin\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\beta x\,dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{sh}\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{ch}\alpha x\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x, а α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить всё то, что остаётся в подынтегральном выражении, и применить формулу интегрирования по частям n раз.

2. *Интегралы типа* $\int P_n(x)\log_a\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\ln\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\arccos\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\beta x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\beta x\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x, а β – некоторое число. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить функцию u равной множителю при многочлене $P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить $P_n(x)dx$.

3. *Интегралы типа* $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, где α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, необходимо дважды применить формулу интегрирования по частям.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)'dt = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{\cos t\cdot 2tdt}{t} = 2\int \cos tdt = 2\sin t + C =$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + C.$$

2.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int (2+4\cos 5x)^3\sin 5x\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int (2+4\cos 5x)^3\sin 5x\,dx = \begin{bmatrix} 2+4\cos 5x = t \\ d(2+4\cos 5x) = dt \\ -20\sin 5xdx = dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{20}\int t^3dt = -\frac{1}{80}t^4 + C =$$

$$= -\frac{1}{80}(2+4\cos 5x)^4 + C.$$

2.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int 4x\ln x\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 4x\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=4x\,dx & v=2x^2 \end{bmatrix}=2x^2\ln x-\int 2x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=2x^2\ln x-\int 2xdx=2x^2\ln x-x^2+C.$$

2.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int 125x^2\sin 3x\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 125x^2\sin 5x\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=125\sin 5x\,dx & v=-25\cos 5x \end{bmatrix}=-25x^2\cos 5x+\int 50x\cos 5x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=2x & du=2dx \\ dv=25\cos 5x\,dx & v=5\sin 5x \end{bmatrix}=-25x^2\cos 5x+10x\sin 5x-\int 10\sin 5x\,dx=$$

$$=-25x^2\cos 5x+10x\sin 5x+2\cos 5x+C.$$

2.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)), а затем формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} \sqrt{x}=t,\ x=t^2 \\ dx=dt^2=(t^2)'dt=2tdt \end{bmatrix}=\int 2te^t dt=\begin{bmatrix} u=2t & du=2dt \\ dv=e^t dt & v=e^t \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} u=2t & du=2dt \\ dv=e^t dt & v=e^t \end{bmatrix}=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти неопределённые интегралы.

2.3.1.1 $\int \sin(3x+4)\,dx$. **2.3.1.2** $\int \dfrac{\sin(3x-1)}{\cos^3(3x-1)}dx$. **2.3.1.3** $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

2.3.1.4 $\int \dfrac{6x-2}{3x^2-2x+5}dx$. **2.3.1.5** $\int xe^{x^2+1}\,dx$. **2.3.1.6** $\int \dfrac{\operatorname{tg}3x\,dx}{\cos^2 3x}$.

1.3.1.7 $\int \dfrac{6-\cos 3x}{\sin^2 3x}dx$. **2.3.1.8** $\int \dfrac{xdx}{x^2+1}$. **2.3.1.9** $\int \dfrac{x^3dx}{x^8+1}$.

2.3.2 Найти неопределённые интегралы.

2.3.2.1 $\int \dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. **2.3.2.2** $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x}$. **2.3.2.3** $\int \dfrac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

2.3.3 Найти неопределённые интегралы.

2.3.3.1 $\int (3x+4)e^{2x+1}dx$. **2.3.3.2** $\int (x^2-1)\ln x dx$. **2.3.3.3** $\int x^2\cos 3x dx$.

2.3.3.4 $\int \operatorname{arctg} 2x dx$. **2.3.3.5** $\int (x-1)\sin 6x dx$. **2.3.3.6** $\int x\arcsin x dx$.

2.3.4 Найти неопределённые интегралы.

2.3.4.1 $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$. **2.3.4.2** $\int \sin\sqrt{x}dx$. **2.3.4.3** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

2.4.1.1 а) $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$; б) $\int 27(x^2-2)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.4.1.2 а) $\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$; б) $\int (x^2+2x)\ln x dx$; в) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

2.4.1.3 а) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+6}$; б) $\int 8x^2\sin 2x dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

2.4.1.4 а) $\int \operatorname{tg}(6x+4)dx$; б) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; в) $\int 2x^3\sin x^2 dx$.

2.4.1.5 а) $\int \operatorname{ctg}(3x-1)dx$; б) $\int 27x^2\cos 3x dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}dx$

2.4.1.6 а) $\int \operatorname{th}(4x+5)dx$; б) $\int \operatorname{arcctg} 3x dx$; в) $\int 3x^5\cos x^3 dx$.

2.4.1.7 а) $\int \operatorname{cth}(7x+5)$; б) $\int \frac{x\sin 4x}{\cos^2 4x}dx$; в) $\int \frac{\arcsin\sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}}dx$.

2.4.1.8 а) $\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; б) $\int \arcsin 2x dx$; в) $\int 3x^7\sin x^4 dx$.

2.4.1.9 а) $\int \sin^3 5x\cos 5x dx$; б) $\int \frac{x\cos 5x}{\sin^2 5x}dx$; в) $\int \frac{\arccos\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

2.4.1.10 а) $\int \cos^4 3x\sin 3x dx$; б) $\int \arccos 7x dx$; в) $\int 2x^9\cos x^5 dx$.

2.4.1.11 а) $\int \frac{\operatorname{tg}^5 7x dx}{\cos^2 7x}$; б) $\int x^2\log_2 x\ln 2dx$; в) $\int 10x^3 5^{5x^2+3}dx$.

2.4.1.12 а) $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 4x dx}{\sin^2 4x}$; б) $\int 64x^2 5^{4x+2}dx$; в) $\int x^3\log_3 x^2 dx$.

2.4.1.13 а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^9 8x dx}{1+64x^2}$; б) $\int x\operatorname{arctg} 2x dx$; в) $\int 8x^{15}\sin x^8 dx$.

2.4.1.14 а) $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 3x\,dx}{1+9x^2}$; б) $\int 27x^2 \sin 3x\,dx$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\,\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

2.4.1.15 а) $\int \frac{\arcsin^6 7x\,dx}{\sqrt{1-49x^2}}$ б) $\int x \operatorname{arcctg} 5x\,dx$; в) $\int 7x^5 \cos x^3 dx$.

2.4.1.16 а) $\int \frac{\arccos^7 6x\,dx}{\sqrt{1-36x^2}}$; б) $\int \frac{x\sin 5x}{\cos^2 5x}dx$; в) $\int \arcsin\sqrt[4]{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.4.1.17 а) $\int \frac{\left(\ln^3 5x+\ln 3x\right)dx}{x}$; б) $\int x\arcsin 7x\,dx$; в) $\int \frac{\ln\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

2.4.1.18 а) $\int \frac{\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x\right)dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{x\cos 6x}{\sin^2 6x}dx$ в) $\int 3^{\sqrt{x}}dx$.

2.4.1.19 а) $\int \frac{\left(\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\right)dx}{\sin^2 x}$; б) $\int 64(x^2-3)e^{4x}dx$; в) $\int \frac{\log_5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2.4.1.20 а) $\int e^{3x^2+x+2}(2x+2)\,dx$; б) $\int (x^2+5x)\ln x dx$; в) $\int 6x^{11}\sin x^6\,dx$.

2.4.1.21 а) $\int 2^{x^2+4x}(4x+8)\,dx$; б) $\int 27x^2\sin 3x\,dx$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt[7]{x}\,\frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$

2.4.1.22 а) $\int \frac{6xdx}{\sqrt{81x^4-16}}$; б) $\int \operatorname{arctg} 4x\,dx$; в) $\int 9x^3\cos x^2 dx$.

2.4.1.23 а) $\int \frac{12xdx}{\sqrt{9x^2-2}}$; б) $\int 216x^2\cos 6x\,dx$; в) $\int x^3 \operatorname{arcctg} x^2\,dx$.

2.4.1.24 а) $\int \frac{8xdx}{\sqrt{16x^4+49}}$; б) $\int \operatorname{arcctg} 9x\,dx$; в) $\int x\arcsin x^2\,dx$.

2.4.1.25 а) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^4-2}}$; б) $\int \frac{x\sin 6x}{\cos^2 6x}dx$; в) $\int x\arccos x^2\,dx$.

2.4.1.26 а) $\int \frac{24x^5dx}{64x^{12}+1}$; б) $\int \arcsin 5x\,dx$; в) $\int x^5 6^{3x^3+1}dx$.

2.4.1.27 а) $\int \frac{10x^4dx}{32x^{10}+1}$; б) $\int \frac{x\cos 11x}{\sin^2 11x}dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}(1+x^2)}{1+x^2}dx$.

2.4.1.28 а) $\int \frac{\sin^2 x\cos x\,dx}{\sin^6 x+4}$; б) $\int \arccos 8x\,dx$; в) $\int \frac{\ln(\ln(\ln x))}{x\ln x}dx$.

2.4.1.29 а) $\int \frac{\cos^2 x\sin x\,dx}{\cos^3 x+16}$; б) $\int x^2\log_3 x\ln 3\,dx$; в) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.4.1.30 а) $\int \frac{\left(3^{\sqrt{x}}-5\right)dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int 27x^2 7^{3x+2}dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ (практическое занятие № 3)

Содержание: рациональные дроби, интегрирование простейших рациональных дробей, разложение рациональной дроби на простейшие дроби, интегрирование рациональных дробей методом неопределённых коэффициентов, интегрирование рациональных дробей методом частных значений, правило интегрирования произвольных рациональных дробей.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены, то есть любая дробь вида

$$R(x)=\frac{A_n(x)}{B_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}.$$

Если степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя $(n\geq m)$, то дробь называется *неправильной рациональной дробью*. Если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя $(n<m)$, то дробь называется *правильной рациональной дробью*.

Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, для чего необходимо разделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе по правилу деления многочленов:

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)}=P(x)+\frac{C_k(x)}{B_m(x)},$$

где $P(x)$ – целая часть дроби $\dfrac{A_n(x)}{B_m(x)}$; $C_k(x)$ – остаток от деления (многочлен степени $k<m$).

Например,

$$\frac{x^4+6x^3+5x^2-10x+1}{x^2+2x-3}=x^2+4x+\frac{2x+1}{x^2+2x-3},$$

так как

$$\begin{array}{rl|l}
-\!\!\! & x^4+6x^3+5x^2-10x+1 & x^2+2x-3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^4+2x^3-3x^2} & x^2+4x \quad \leftarrow \textit{целая часть} \\
 & -\;\; 4x^3+8x^2-10x & \\
 & \quad\;\; \underline{4x^3+8x^2-12x} & \\
 & \qquad\qquad 2x+1 \quad \leftarrow \textit{остаток} &
\end{array}$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, то есть к использованию табличных интегралов, и интегрированию правильной рациональной дроби. Интегрирование правильных рациональных дробей осуществляется путём перехода к интегрированию простейших рациональных дробей.

Простейшей рациональной дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырёх типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}\,(n\ge 2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,(n\ge 2)$.

В простейших рациональных дробях параметры A, M, N, a, p, q – действительные числа, а квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то есть дискриминант $D=p^2-4q<0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных методов интегрирования неопределённого интеграла и таблицы основных неопределённых интегралов:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+C.$$

Найдём интеграл от простейшей рациональной дроби третьего типа.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left[\begin{array}{l}\textit{в числителе выделяем}\\ \textit{производную знаменателя}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\textit{представляем интеграл в}\\ \textit{виде суммы двух интегралов}\end{array}\right]=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\textit{в первом интеграле подводим выражение } (2x+p) \textit{ под знак дифференциала,}\\ \textit{а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{\left(x^2+px+q\right)'dx}{x^2+px+q}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Рассмотрим интегрирование простейшей рациональной дроби четвёртого типа $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$. Интегрирование дроби этого типа после выделения в числителе производной квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе, и выделения полного квадрата в этом трёхчлене, сводится к вычислению интегралов

$$\int \left(x^2+px+q\right)^{-n} d\left(x^2+px+q\right) = \frac{1}{(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}} + C_1$$

и

$$I_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}.$$

В последнем интеграле $z = x + p/2$, $b = \sqrt{4q-p^2}/2$.

Представим последний интеграл в виде

$$I_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^n} = \frac{1}{b^2}\int \frac{\left(z^2+b^2\right)-z^2}{\left(z^2+b^2\right)^n}dz = \frac{1}{b^2}\left(\int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} - \int \frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}\right) =$$

$$= \left[\int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} = I_{n-1}\right] = \frac{1}{b^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}\right).$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n}$ воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int \frac{z^2dz}{\left(z^2+b^2\right)^n} = \left[\begin{array}{ll} u = z & du = dz \\ dv = \dfrac{zdz}{\left(z^2+b^2\right)^n} & v = \dfrac{1}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} \end{array}\right] = \frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} = \frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу интеграла I_n, имеем

$$I_n = \frac{1}{b^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{z}{2(1-n)\left(z^2+b^2\right)^{n-1}}\right). \quad (3.1.1)$$

Формула (3.1.1) называется рекуррентной. Зная табличный интеграл $I_1 = \int \frac{dz}{z^2+b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{z}{b} + C$, по формуле (3.1.1) можно найти интеграл

$$I_2 = \int \frac{dz}{\left(z^2+b^2\right)^2} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех четырёх типов простейших рациональных дробей.

Рассмотрим произвольную правильную рациональную дробь. Любую правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого – четвёртого типа. Для разложения $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби необходимо разложить многочлен $B_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение $B_m(x)=0$. Предположим, что многочлен $B_m(x)$ разложим на простейшие линейные и квадратные множители:

$$B_m(x) = \left(x-\alpha_1\right)^{s_1} \ldots \left(x-\alpha_i\right)^{s_i} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1} \ldots \left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j},$$

где $s_1+\ldots+s_i+2r_1+\ldots+2r_j=m$.

Теорема 3.1.1 Правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$, где $B_m(x) = \left(x-\alpha_1\right)^{s_1} \ldots \left(x-\alpha_i\right)^{s_i} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1} \ldots \left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$, можно единственным образом разложить на сумму простейших рациональных дробей:

$$\frac{C_k(x)}{B_m(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{\left(x-\alpha_1\right)^2} + \ldots + \frac{A_{1s_1}}{\left(x-\alpha_1\right)^{s_1}} + \ldots + \frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{\left(x-\alpha_i\right)^2} + \ldots + \frac{A_{is_i}}{\left(x-\alpha_i\right)^{s_i}} +$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{M_{1r_1}x+N_{1r_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_{j1}x+N_{j1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{M_{j2}x+N_{j2}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2} + \ldots + \frac{M_{jr_j}x+N_{jr_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}},$$

где коэффициенты в разложении являются некоторыми действительными числами.

Проиллюстрируем формулу теоремы 3.1.1 примерами, не находя коэффициентов в разложении.

Например:

1) $$\frac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2};$$

2) $$\frac{3x^2-4x+1}{(x-3)^3(x^2-x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3} + \frac{Mx+N}{x^2-x+4};$$

3) $$\frac{x-4}{x^4(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Mx+N}{x^2+4} + \frac{Kx+L}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Чтобы найти коэффициенты в разложении правильной рациональной дроби на простейшие рациональные дроби, чаще всего используют метод неопределённых коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределённых коэффициентов

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами. Приводим простейшие дроби в разложении к общему знаменателю $B_m(x)$ и приравниваем многочлен, получившийся в числителе, многочлену $C_k(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая равенство многочленов, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного равенства. В результате получаем систему m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными. Решая полученную систему, находим неизвестные коэффициенты в разложении дроби на простейшие рациональные дроби.

Метод частных значений

При использовании данного метода для нахождения неопределённых коэффициентов придаём переменной x несколько частных значений (по числу неопределённых коэффициентов) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов. Наиболее выгодно применять этот метод в случае простых действительных корней уравнения $B_m(x)=0$. Тогда удобно последовательно полагать x равным одним из корней многочлена, стоящего в знаменателе.

Иногда для нахождения неопределённых коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, то есть приравнивать коэффициенты при некоторых степенях переменной и придавать переменной частные значения.

Сформулируем **правило интегрирования рациональных дробей**.

Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1) если рассматриваемая дробь является неправильной, то её необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) если рассматриваемая рациональная дробь является правильной, то её необходимо представить в виде суммы простейших рациональных дробей;

3) интеграл от рациональной дроби необходимо представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{(4x-1)dx}{x^5-x^2}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда подынтегральная функция представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{4x-1}{x^5-x^2} = \frac{4x-1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть, получаем дробь, равную первоначальной, причём её знаменатель равен знаменателю исходной дроби, а, следовательно, числители полученных дробей также будут равны.

$$Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) +$$

$$+(Mx+N)x^2(x-1) = 4x-1.$$

Для определения неизвестных параметров в разложении, применим комбинированный метод «неопределённых коэффициентов».

При значении переменной $x=0$, получаем значение параметра $B=1$.

При значении переменной $x=1$, получаем значение параметра $C=1$.

Перепишем равенство числителей дробей в виде

$$A(x^4-x) + B(x^3-1) + C(x^4+x^3+x^2) + M(x^4-x^3) + N(x^3-x^2) = 4x-1,$$

или, с учётом найденных параметров, равенство принимает вид

$$\left(A+1+M\right)x^4 + \left(2-M+N\right)x^3 + (1-N)x^2 - Ax = 4x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+1+M=0, \\ 2-M+N=0, \\ 1-N=0, \\ -A=4. \end{cases}$$

Из полученной системы находим неизвестные параметры в разложении исходной подынтегральной функции: $A=-4,\ B=1,\ C=1,\ M=3,\ N=1$.

Итак, $\dfrac{4x-1}{x^5-x^2} = -\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$.

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^5-x^2}dx = -4\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{3x+1}{x^2+x+1}dx =$

$$= -4\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| + \frac{3}{2}\int\frac{2x+1-1/3}{x^2+x+1}dx = \ln\frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \ln\frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\int\frac{\left(x^2+x+1\right)'dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} =$$

$$= \ln\frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+1}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x\qquad\qquad} & x+3 \\ -\; 3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x^2\qquad\quad +6} & \\ 3x+1 & \end{array}$$

Таким образом, $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+1}dx = \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx + 3\int dx +$

$$+\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}x + C.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти неопределённые интегралы.

3.3.1.1 $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$. **3.3.1.2** $\int\frac{(3x-1)dx}{x^3-4x^2+3x}$. **3.3.1.3** $\int\frac{dx}{x^3-9x}$.

3.3.1.4 $\int\frac{6x-2}{(x-5)^2(x+2)}dx$. **3.3.1.5** $\int\frac{(x+1)dx}{x^4+4x^3+4x^2}$. **3.3.1.6** $\int\frac{(x^2+3)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.1.7 $\int\frac{(6-x)dx}{(x-2)(x^2+6x+13)}$. **3.3.1.8** $\int\frac{(x+5)dx}{x^3+2x^2+x}$. **3.3.1.9** $\int\frac{(x^3+2)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.2 Найти неопределённые интегралы.

3.3.2.1 $\int\frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16}$. **3.3.2.2** $\int\frac{(x^3+x^2)dx}{x^2-6x+5}$. **3.3.2.3** $\int\frac{x^4dx}{x^4-16}$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти неопределённые интегралы.

3.4.1.1 а) $\int\frac{(7x^2-1)dx}{x^3-2x^2-3x}$; б) $\int\frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int\frac{x^4}{x^3-1}dx$.

3.4.1.2 а) $\int\frac{(x^2+2)dx}{x^3+2x^2-3x}$; б) $\int\frac{(x^2-19x+34)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int\frac{x^4+2x}{x^3+1}dx$.

3.4.1.3 а) $\int\frac{(x^2-5)dx}{x^3+3x^2-4x}$; б) $\int\frac{(2x+22)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int\frac{2x^5}{x^3-8}dx$.

3.4.1.4 а) $\int \frac{\left(2x^2+1\right)dx}{x^3+x^2-2x}$; б) $\int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int \frac{x^5-2}{x^3+8}dx$.

3.4.1.5 а) $\int \frac{\left(4x^2-5\right)dx}{x^3-3x^2+2x}$; б) $\int \frac{(4x+2)dx}{x^4+4x^2}$; в) $\int \frac{3x^4}{x^3-27}dx$.

3.4.1.6 а) $\int \frac{(3x+2)dx}{x^3+6x^2+8x}$; б) $\int \frac{\left(4x^2+38\right)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int \frac{x^4+3x}{x^3+27}dx$.

3.4.1.7 а) $\int \frac{(x-9)dx}{x^3-6x^2+8x}$; б) $\int \frac{\left(x^2-6x+8\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{4x^5}{x^3-64}dx$.

3.4.1.8 а) $\int \frac{\left(5x^2-9\right)dx}{x^3-7x^2+12x}$; б) $\int \frac{\left(x^2-5x+40\right)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int \frac{4x^5-x^2}{x^3+64}dx$.

3.4.1.9 а) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^3-8x^2+15x}$; б) $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int \frac{5x^4}{x^3-125}dx$.

3.4.1.10 а) $\int \frac{\left(6x^2+2\right)dx}{x^3-9x^2+18x}$; б) $\int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int \frac{5x^4+3x}{x^3+125}dx$.

3.4.1.11 а) $\int \frac{\left(3x^2+3\right)dx}{x^3-7x^2+10x}$; б) $\int \frac{\left(4x-x^2-12\right)dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{6x^5}{x^3-216}dx$.

3.4.1.12 а) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^3+4x^2-12x}$; б) $\int \frac{\left(2x^2+4x+20\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int \frac{6x^5-x}{x^3+216}dx$.

3.4.1.13 а) $\int \frac{\left(8x^2+2\right)dx}{x^3-5x^2-14x}$; б) $\int \frac{\left(2x^2+2x+20\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int \frac{7x^4}{x^3-343}dx$.

3.4.1.14 а) $\int \frac{(3x+7)dx}{x^3-8x^2+12x}$; б) $\int \frac{\left(x^2-13x+40\right)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; в) $\int \frac{x^4+7x}{x^3+343}dx$.

3.4.1.15 а) $\int \frac{\left(7x^2+2\right)dx}{x^3-10x^2+21x}$ б) $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int \frac{8x^5+x^4}{x^3-512}dx$.

3.4.1.16 а) $\int \frac{(2x+6)dx}{x^3+8x^2+12x}$; б) $\int \frac{\left(x^2+3x+2\right)dx}{x^3-1}$; в) $\int \frac{8x^5-x}{x^3+512}dx$.

3.4.1.17 а) $\int \frac{\left(2x^2-4\right)dx}{x^3+2x^2-8x}$; б) $\int \frac{(6-9x)dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{9x^4}{x^3-729}dx$.

3.4.1.18 а) $\int \frac{(3x-5)dx}{x^3+2x^2-15x}$; б) $\int \frac{\left(4x^2+7x+5\right)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ в) $\int \frac{x^4-9x}{x^3+729}dx$.

3.4.1.19 а) $\int \frac{\left(2x^2+6\right)dx}{x^3+6x^2-7x}$; б) $\int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; в) $\int \frac{x^5+10x^3}{x^3-1000}dx$.

3.4.1.20 а) $\int \frac{(3x-2)dx}{x^3-x^2-6x}$; б) $\int \frac{(3-9x)dx}{x^3-1}$; в) $\int \frac{x^5-10x^4}{x^3+1000}dx$.

3.4.1.21 а) $\int \frac{(3x^2-4)dx}{x^3+x^2-12x}$; б) $\int \frac{(4x^2+x+10)dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{11x^4}{x^3-1331}dx$.

3.4.1.22 а) $\int \frac{(5x-2)dx}{x^3+7x^2+10x}$; б) $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; в) $\int \frac{11x^4+x^3}{x^3+1331}dx$.

3.4.1.23 а) $\int \frac{(2x^2-6)dx}{x^3+4x^2-12x}$; б) $\int \frac{(3x^2+2x+1)dx}{x^3-27}$; в) $\int \frac{x^5+12x^2}{x^3-1728}dx$.

3.4.1.24 а) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^3-9x^2+20x}$; б) $\int \frac{(8x+5)dx}{(x+3)(x^2-8x+25)}$; в) $\int \frac{12x^5-2x}{x^3+1728}dx$.

3.4.1.25 а) $\int \frac{(2x^2-3)dx}{x^3+x^2-6x}$; б) $\int \frac{(2x^2+x+7)dx}{(x-3)(x^2+x+1)}$; в) $\int \frac{13x^4+x^2}{x^3-2197}dx$.

3.4.1.26 а) $\int \frac{(5x-4)dx}{x^3-x^2-20x}$; б) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3+27}$; в) $\int \frac{13x^4}{x^3+2197}dx$.

3.4.1.27 а) $\int \frac{(3x^2-7)dx}{x^3+4x^2-21x}$; б) $\int \frac{(4x^2+7)dx}{x^3+6x^2+25x}$; в) $\int \frac{14x^3+x^2}{x^3-2744}dx$.

3.4.1.28 а) $\int \frac{(8x+2)dx}{x^3-2x^2-8x}$; б) $\int \frac{(4x^2+3x)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; в) $\int \frac{14x^5-x^4}{x^3+2744}dx$.

3.4.1.29 а) $\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3+2x^2-15x}$; б) $\int \frac{(5x+8)dx}{(x+1)(x^2-6x+34)}$; в) $\int \frac{x^4+15x^3}{x^3-3375}dx$.

3.4.1.30 а) $\int \frac{(4x-5)dx}{x^3+x^2-20x}$; б) $\int \frac{(4x+12)dx}{x^4+16x^2}$; в) $\int \frac{15x^5-x^4}{x^3+3375}dx$.

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

(практическое занятие № 4)

Содержание: интегрирование интегралов вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x\,dx$, $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$, универсальная тригонометрическая подстановка, подстановка вида $\mathrm{tg}\,x = t$, интегрирование иррациональных выражений с помощью тригонометрических подстановок.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

4.1.1 Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы типа $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$, где $m, n \in Z, m \ge 0, n \ge 0$.

Если числа m и n – чётные, то применяются формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное, то, отделяя от нечётной степени один сомножитель, подносим его под знак дифференциала. В подынтегральной функции переходим к функции, которую получили под знаком дифференциала, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Интегралы типа $\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$.

Данные интегралы вычисляются путём разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\big),$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\big),$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\big).$$

Интегралы типа $\int\mathrm{tg}^n x\,dx,\int\mathrm{ctg}^n x\,dx$ $(n\in N, n>1)$.

Они вычисляются подстановкой $\mathrm{tg}\,x=t$ и $\mathrm{ctg}\,x=t$ соответственно.

Если $\mathrm{tg}\,x=t$, то $x=\mathrm{arctg}\,t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int\mathrm{tg}^n x\,dx=\int\dfrac{t^n dt}{1+t^2}$. Данный интеграл при $n\geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, который находится по правилу интегрирования рациональных дробей.

Интегралы типа $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$. При этом используются формулы

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если имеет место тождество $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощённую подстановку* $\mathrm{tg}\,x=t$. При этом используются формулы

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

4.1.2 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим интегралы от иррациональных функций, для интегрирования которых применяются тригонометрические подстановки.

Интегралы типа $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, где R – рациональная функция аргументов $\left(|x|\leq|a|\right)$, находятся с помощью подстановки $x=a\sin t$ *или* $x=a\cos t$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов $\left(|x| \geq |a|\right)$, находятся с помощью подстановки $x = \dfrac{a}{\sin t}$ *или* $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, находятся с помощью подстановки $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ *или* $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \sin^2 3x\,dx$.

Решение. $\int \sin^2 3x\,dx = \dfrac{1}{2}\int \left(1 - \cos 6x\right) dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 6x}{12} + C$.

4.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \cos^3 5x\,dx$.

Решение. $\int \cos^3 5x\,dx = \int \cos^2 5x \cos 5x\,dx = \dfrac{1}{5}\int \left(1 - \sin^2 5x\right) d\sin 5x =$

$$= \left[\sin 5x = t\right] = \frac{1}{5}\int \left(1 - t^2\right) dt = \frac{t}{5} - \frac{t^3}{15} + C = \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin^3 5x}{15} + C.$$

4.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \sin 12x \cos 8x\,dx$.

Решение. $\int \sin 4x \cos 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\int \left(\sin 2x + \sin 6x\right) dx = -\dfrac{\cos 2x}{4} - \dfrac{\cos 6x}{12} + C$.

4.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int \dfrac{dx}{12\cos x + 5\sin x + 13}$.

Решение. $\int \dfrac{dx}{12\cos x + 5\sin x + 13} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t, & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{2\,dt}{\left(12\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5\dfrac{2t}{1+t^2} + 13\right)\cdot\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25} = 2\int \frac{dt}{\left(t+5\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+5} + C = -\frac{2}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + 5} + C.$$

4.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x} = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t, & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{10t^2}{1+t^2}\right)\cdot\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{1-9t^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3t}{1-3t}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3\operatorname{tg} x}{1-3\operatorname{tg} x}\right| + C \cdot$$

4.2.6 Найти неопределённый интеграл $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t \\ t = \arcsin\frac{x}{2} \end{array} \right] = \int \sqrt{4-4\sin^2 x}\,2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$

$$= 2\int\left(1+\cos 2t\right)dt = 2t + \sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin 2\arcsin\frac{x}{2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\cdot\sin\arcsin\frac{x}{2}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{2} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C\,.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Найти неопределённые интегралы.

4.3.1.1 $\int \cos^2 7x\,dx$. **4.3.1.2** $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$. **4.3.1.3** $\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$.

4.3.1.4 $\int \cos^3 2x\,dx$. **4.3.1.5** $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$. **4.3.1.6** $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$.

4.3.2 Найти неопределённые интегралы:

4.3.2.1 $\int \cos 6x\cos 4x dx$. **4.3.2.2** $\int \sin 6x\sin 2x\,dx$. **4.3.2.3** $\int \cos 5x\sin x\,dx$.

4.3.2.4 $\int \cos 8x\cos 7x dx$. **4.3.2.5** $\int \sin 9x\sin 6x\,dx$. **4.3.2.6** $\int \sin 7x\cos x\,dx$.

4.3.3 Найти неопределённые интегралы.

4.3.3.1 $\int \frac{dx}{4\cos x + 6\sin x}$. **4.3.3.2** $\int \frac{dx}{1-\sin x}$. **4.3.3.3** $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

4.3.4 Найти неопределённые интегралы.

4.3.4.1 $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin^2 x}$. **4.3.4.2** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+4\cos^2 x}$. **4.3.4.3** $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

4.3.5 Найти неопределённые интегралы.

4.3.5.1 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}\,dx}{x^2}$. **4.3.5.2** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^2}$. **4.3.5.3** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти неопределённые интегралы.

4.4.1.1 а) $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$; б) $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}}$.

4.4.1.2 а) $\int \sin^3 5x \cos^3 5x dx$; б) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$; в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$.

4.4.1.3 а) $\int \sin^3 7x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x}$; в) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{16-x^2}} dx$.

4.4.1.4 а) $\int \cos^3 9x dx$; б) $\int \frac{dx}{112\sin x-15\cos x}$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}\, dx}{x^3}$.

4.4.1.5 а) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{24\cos x+26}$; в) $\int x^3\sqrt{4+x^2} dx$.

4.4.1.6 а) $\int \sin^4 8x \cos^3 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{3\cos x-5}$; в) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

4.4.1.7 а) $\int \sin^3 6x \cos^4 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{25\sin x+7}$; в) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-49}}$.

4.4.1.8 а) $\int \sin^4 2x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{41\sin x-9}$; в) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{64+x^2}}$.

4.4.1.9 а) $\int \cos^4 5x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$; в) $\int \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}} dx$.

4.4.1.10 а) $\int \sin^5 12x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$; в) $\int x^4\sqrt{9-x^2} dx$.

4.4.1.11 а) $\int \sin^2 4x \cos^3 4x dx$; б) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-49}}$.

4.4.1.12 а) $\int \sin^3 6x \cos^3 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{3-5\sin x}$; в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$.

4.4.1.13 а) $\int \sin^3 8x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; в) $\int \frac{28x^4}{\sqrt{81-x^2}} dx$.

4.4.1.14 а) $\int \cos^3 11x dx$; б) $\int \frac{dx}{9\sin x-6\cos x}$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-36}\, dx}{x^3}$.

4.4.1.15 а) $\int \sin^3 3x \cos^2 3x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{8\cos x+10}$; в) $\int x^3\sqrt{1+x^2} dx$.

4.4.1.16 а) $\int \sin^4 9x \cos^3 9x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{40\cos x-24}$; в) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$.

4.4.1.17 а) $\int \sin^3 7x\cos^4 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{13\sin x+5}$; в) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-64}}$.

4.4.1.18 а) $\int \sin^4 2x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x-3}$; в) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{49+x^2}}$.

4.4.1.19 а) $\int \cos^4 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$; в) $\int \frac{12x^3}{\sqrt{36-x^2}}dx$.

4.4.1.20 а) $\int \cos^5 20x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x-3}$; в) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

4.4.1.21 а) $\int \sin^2 5x\cos^3 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5-11\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$.

4.4.1.22 а) $\int \sin^3 7x\cos^3 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{7-25\sin x}$; в) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}}$.

4.4.1.23 а) $\int \sin^3 9x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x+12\cos x}$; в) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{64-x^2}}dx$.

4.4.1.24 а) $\int \cos^3 12x dx$; б) $\int \frac{dx}{12\sin x-5\cos x}$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}\,dx}{x^3}$.

4.4.1.25 а) $\int \sin^3 4x\cos^2 4x dx$; б) $\int \frac{dx}{15\cos x+17}$; в) $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx$.

4.4.1.26 а) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{20\cos x-29}$; в) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

4.4.1.27 а) $\int \sin^3 8x\cos^4 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x+3}$; в) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-81}}$.

4.4.1.28 а) $\int \sin^4 3x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{7\sin x-13}$; в) $\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{36+x^2}}$.

4.4.1.29 а) $\int \cos^4 6x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+4}$; в) $\int \frac{14x^3}{\sqrt{49-x^2}}dx$.

4.4.1.30 а) $\int \cos^5 30x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{5\sin x-\cos x-5}$; в) $\int x^4\sqrt{5-x^2}\,dx$.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ (практическое занятие № 5)

Содержание: метод замены переменных при интегрировании иррациональных выражений, интегрирование дифференциального бинома, определённый интеграл, формула Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла, методы интегрирования определённого интеграла.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

5.1.1 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов. В этих интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x. Они находятся с помощью подстановки $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = k_1, \frac{m_2}{n_2} = k_2, \ldots$ являются целыми числами, то есть интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx = \int R\left(t^s, t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots\right) st^{s-1}\,dt.$$

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots\right)dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов. Они находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$. При такой замене переменной интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t.

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, могут быть найдены с помощью подстановки $u = x + \frac{b}{2a}$. Они сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

Интегралы этого типа могут быть также найдены с помощью одной из трёх подстановок Эйлера:

1) если $a > 0$, то применяется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$;

2) если $a < 0, c > 0$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$;

3) если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0)$, где x_0 – один из корней квадратного трёхчлена.

Интегралы типа $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m, n, p \in Q,\ a, b \in R\setminus\{0\}$. Данные интегралы называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$. Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева П. Л. только в следующих трёх случаях:

1) если $p\in Z$, то применяется подстановка $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n}\in Z$, то применяется подстановка $a+bx^n=z^s$, где s – знаменатель дроби $p=\dfrac{k}{s}$;

3) если $\dfrac{m+1}{n}+p\in Z$, то применяется подстановка $a+bx^n=z^s x^n$, где s – знаменатель дроби $p=\dfrac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома нельзя выразить через элементарные функции.

5.1.2 Определённый интеграл

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n элементарных частичных отрезков системой точек $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$. Длина частичного отрезка $[x_{i-1};x_i]$, где $i=\overline{1,n}$, равна $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Обозначим длину наибольшего частичного отрезка разбиения через $\lambda_n=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$ и назовём *мелкостью разбиения*. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ произвольным образом выбираем точки ξ_i и вычисляем значения функции в них, то есть $f(\xi_i)$.

Определение 5.1.2.1 *Интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_i, называется алгебраическая сумма произведений значения функции, вычисленной в точке ξ_i на длину частичного отрезка, которому принадлежит эта точка, то есть сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n. \qquad (5.1.2.1)$$

Определение 5.1.2.2 *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм вида (5.1.2.1) при мелкости разбиения стремящегося к нулю, если этот предел существует и конечен.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\,. \tag{5.1.2.2}$$

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или интегрируемой на отрезке $[a;b]$). При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ *– подынтегральным выражением*, x *– переменной интегрирования*, a и b *– нижним и верхним пределами интегрирования*, соответственно.

Теорема 5.1.2.1 Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Теорема 5.1.2.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, то есть определённый интеграл существует, в смысле существования предела интегральных сумм.

Теорема 5.1.2.3 Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нём всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Приведём основные свойства определённого интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int_a^b dx = b - a$;

3) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

4) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$;

5) если на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причём для каждой точки этого отрезка выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$;

6) если на отрезке $[a;b]$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$:

7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

8) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$;

9) если $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $a<b$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$;

10) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на отрезке найдётся такая точка $c\in[a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Определённый интеграл вычисляется по ***формуле Ньютона-Лейбница***:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Данная формула устанавливает связь определённого и неопределённого интегралов. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Рассмотрим основные *методы интегрирования определённого интеграла*.

Метод непосредственного интегрирования определённого интеграла

Данный метод основан на применении свойств определённого интеграла, таблицы неопределённых интегралов и формулы Ньютона-Лейбница.

Метод замены (подстановки) переменной в определённом интеграле

Применение замены переменной в определённом интеграле основывается на следующей теореме.

Теорема 5.1.2.4 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt. \tag{5.1.2.3}$$

Формула (5.1.2.3) называется *формулой замены переменной в определённом интеграле*. Для вычисления определённого интеграла по этой формуле необходимо выполнить замену $x=\varphi(t)$, вычислить $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по переменной t, решая уравнения $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$.

Необходимо отметить, что при вычислении определённого интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения будут изменяться пределы интегрирования.

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Данный метод основан на следующей теореме.

Теорема 5.1.2.5 Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,. \tag{5.1.2.4}$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1 = t^6 & t = \sqrt[6]{2x+1} \\ x = \frac{1}{2}\left(t^6 - 1\right) & dx = 3t^5 dt \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1} - 1\right| + C\,.$$

5.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln\left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C\,.$

5.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}}$.

Решение. $\int x^3 \left(4 - x^2\right)^{3/2} dx = \begin{bmatrix} m = 3 & n = 2 & p = -\frac{3}{2} \notin Z \\ \frac{m+1}{n} = 2 \in Z & 4 - x^2 = t^2 & xdx = -tdt \end{bmatrix} =$

$$= -\int (4 - t^2) t^{-3} t dt = \int \frac{t^2 - 4}{t^2} dt = \int dt - 4\int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{4}{t} = \sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} + C\,.$$

5.2.4 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 x\,dx$.

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sin^2 x\,dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (4 - 4\cos 2x)\,dx = (4x - 2\sin 2x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$

$$= \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sin 2\frac{\pi}{2} \right) - \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2\sin 2\frac{\pi}{4} \right) = 2\pi - 0 - \pi + 2 = \pi + 2\,.$$

5.2.5 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение. $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{matrix} x=t^3 & x=8 \to t=2 \\ dx=3t^2dt & x=27 \to t=3 \end{matrix} \right] = \int\limits_2^3 \frac{3t^2dt}{t^2+t} =$

$$= 3\int\limits_2^3 \frac{tdt}{t+1} = 3\int\limits_2^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \left(3t-3\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = (9-3\ln 4)-(6-3\ln 3) = 3-\ln\frac{64}{27}.$$

5.2.6 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 xe^x dx = \left[\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{matrix} \right] = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx =$

$$= 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e-\left(e^1-e^0\right) = e-e+1 = 1.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти неопределённые интегралы

5.3.1.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. **5.3.1.2** $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt{x}}$. **5.3.1.3** $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.3.2 Найти неопределённые интегралы.

5.3.2.1 $\int \sqrt{\left(7+6x-x^2\right)^3}dx$. **5.3.2.2** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **5.3.2.3** $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

5.3.3 Найти неопределённые интегралы.

5.3.3.1 $\int x^5 \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$. **5.3.3.2** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. **5.3.3.3** $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

5.3.4 Вычислить определённые интегралы.

5.3.4.1 $\int\limits_1^2 \left(x^2+5x+3\right)dx$. **5.3.4.2** $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 3x\,dx$. **5.3.4.3** $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\, x\,dx$.

5.3.5 Вычислить определённые интегралы.

5.3.5.1 $\int\limits_4^5 \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$. **5.3.5.2** $\int\limits_{-1}^0 \frac{(4x+3)dx}{x^2-9x+8}$. **5.3.5.3** $\int\limits_1^2 \frac{(6x+7)dx}{x^2+3x+2}$.

5.3.6 Вычислить определённые интегралы.

5.3.6.1 $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$. **5.3.6.2** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$. **5.3.6.3** $\int\limits_0^2 \sqrt{9-x^2}dx$.

5.3.7 Вычислить определённые интегралы.

5.3.7.1 $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **5.3.7.2** $\int\limits_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$. **5.3.7.3** $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

5.3.7.4 $\int\limits_0^1 x^2e^{3x}dx$. **5.3.7.5** $\int\limits_0^{\pi/3} x^2\sin 3x\,dx$. **5.3.7.6** $\int\limits_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Заданы интегралы. Необходимо: а) найти определённый интеграл; б) вычислить определённый интеграл; в) вычислить определённый интеграл.

5.4.1.1 а) $\int \frac{x}{1+\sqrt{4x+1}}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/4} x\sin 4x\,dx$.

5.4.1.2 а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$; в) $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{16+9\cos^2 x}$.

5.4.1.3 а) $\int \frac{5}{1+\sqrt[4]{9x+1}}dx$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}dx$; в) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos 3x\,dx$.

5.4.1.4 а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}}$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^8 x dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\sin^2 x}$.

5.4.1.5 а) $\int \frac{2x+1}{2+\sqrt{7x+2}}dx$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^8 x\,dx$; в) $\int\limits_1^{e} x^2\ln x\,dx$.

5.4.1.6 а) $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{6x+7}}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\cos^2 x}$.

5.4.1.7 а) $\int \frac{3x-1}{3+\sqrt[4]{4x+3}}dx$; б) $\int\limits_0^{9\pi} \sin^2\frac{x}{3}\cos^6\frac{x}{3}dx$; в) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\,dx$.

5.4.1.8 а) $\int \frac{3dx}{5+\sqrt[3]{9x+2}}$; б) $\int\limits_0^{6\pi} \sin^6\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$; в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

5.4.1.9 а) $\int \frac{4x+5}{4+\sqrt{3x+4}}dx$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 2x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x\,dx$.

5.4.1.10 а) $\int \frac{x\,dx}{4+\sqrt[3]{3x+4}}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$; в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

5.4.1.11 а) $\int \frac{7x}{5+\sqrt[4]{8x+5}}dx$; б) $\int\limits_0^{3\pi} \sin^6\frac{x}{6}dx$; в) $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$.

5.4.1.12 а) $\int \frac{x\,dx}{9+\sqrt[3]{3x-1}}$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x^3+8}$.

5.4.1.13 а) $\int \frac{3x-2}{6+\sqrt{7x+6}}dx$; б) $\int\limits_0^{5\pi} \sin^2\frac{x}{5}\cos^2\frac{x}{5}dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x\,dx$.

5.4.1.14 а) $\int \frac{x\,dx}{6-\sqrt[3]{6x-9}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin^4 3x\cos^4 3x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-4\sin^2 x}$.

5.4.1.15 а) $\int \frac{2x+5}{7+\sqrt[4]{5x+2}}dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 x\,dx$; в) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x\,dx$.

5.4.1.16 а) $\int \frac{2x\,dx}{5-3\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{14\pi} \sin^2\frac{x}{7}\cos^4\frac{x}{7}dx$; в) $\int_0^3 x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

5.4.1.17 а) $\int \frac{2x-4}{6-\sqrt{9x+2}}dx$; б) $\int_0^{10\pi} \sin^4\frac{x}{5}\cos^4\frac{x}{5}dx$; в) $\int_0^{\pi/5} x\sin 5x\,dx$.

5.4.1.18 а) $\int \frac{3x\,dx}{4-3\sqrt[3]{x+2}}$; б) $\int_0^{4\pi} \sin^6\frac{x}{4}dx$; в) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{49+x^2}}$.

5.4.1.19 а) $\int \frac{3x-3}{5+\sqrt[4]{7x+1}}dx$; б) $\int_0^{8\pi} \cos^6\frac{x}{4}dx$; в) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} x\cos 4x\,dx$.

5.4.1.20 а) $\int \frac{dx}{6+2\sqrt[3]{6x+5}}$; б) $\int_0^{10\pi} \sin^2\frac{x}{5}\cos^4\frac{x}{5}dx$; в) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

5.4.1.21 а) $\int \frac{7x+6}{6+\sqrt{2x+7}}dx$; б) $\int_{-14\pi}^{-12\pi} \sin^2\frac{x}{7}\cos^4\frac{x}{7}dx$; в) $\int_1^e x^3\ln x\,dx$.

5.4.1.22 а) $\int \frac{4x\,dx}{10+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_\pi^{4\pi} \sin^6\frac{x}{8}dx$; в) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5.4.1.23 а) $\int \frac{x-1}{9+\sqrt[4]{6x+5}}dx$; б) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^6\frac{x}{8}dx$; в) $\int_0^{1/4} \arcsin 2x\,dx$.

5.4.1.24 а) $\int \frac{5x\,dx}{3-\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_{-\pi/2}^{3\pi} \sin\frac{x}{2}\cos^{15}\frac{x}{2}dx$; в) $\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

5.4.1.25 а) $\int \frac{3x}{8+\sqrt{2x+3}}dx$; б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$; в) $\int_0^1 \arccos 2x\,dx$.

5.4.1.26 а) $\int \frac{2x\,dx}{2+7\sqrt[3]{x+2}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 2x\cos^2 2x\,dx$; в) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

5.4.1.27 а) $\int \frac{4x-2}{2-\sqrt[4]{3x+4}}dx$; б) $\int_0^{\pi/12} \cos^8 3x\,dx$; в) $\int_{-1}^0 \operatorname{arctg} 4x\,dx$.

5.4.1.28 а) $\int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{9x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/16} \sin^8 4x\,dx$; в) $\int_8^{27} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

5.4.1.29 а) $\int \frac{2x-1}{3-5\sqrt{4x+1}}dx$; б) $\int_{9\pi}^{18\pi} \sin^2\frac{x}{9}\cos^2\frac{x}{9}dx$; в) $\int_0^{\ln 3} x^4 e^{2x}\,dx$.

5.4.1.30 а) $\int \frac{x\,dx}{4+\sqrt[3]{6x+8}}$; б) $\int_{-36\pi}^{36\pi} \sin^4\frac{x}{6}\cos^6\frac{x}{6}dx$; в) $\int_0^3 \frac{dx}{x^3-27}$.

6 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
(практическое занятие № 6)

Содержание: несобственные интегралы первого и второго рода, применение определённого интеграла к задачам экономического характера.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

6.1.1 Несобственные интегралы

При введении понятия определённого интеграла как предела интегральных сумм (практическое занятие № 5) предполагалось, что пределы интегрирования являются конечными, а подынтегральная функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. При выполнении этих условий интегралы называются *собственными*. Если хотя бы одно из указанных условий нарушается, то интегралы называются *несобственными интегралами*.

Определим несобственные интегралы первого рода или интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Определение 6.1.1.1 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным верхним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ называется предел $f(b)$ при значении $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.1.1.1}$$

Определение 6.1.1.2 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным нижним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $f(a)$ при значении $a \to -\infty$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.1.1.2}$$

Если пределы в правых частях формул (6.1.1.1) и (6.1.1.2) существуют и конечны, то несобственные интегралы первого рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Несобственный интеграл первого рода с двумя бесконечными пределами интегрирования вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx, \tag{6.1.1.3}$$

где $-\infty < c < +\infty$.

Определим несобственные интегралы второго рода или интегралы от неограниченных подынтегральных функций.

Определение 6.1.1.3 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $\left[a;b\right)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при значении $\varepsilon \to +0$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (6.1.1.4)$$

Определение 6.1.1.4 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $\left(a;b\right]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=a$ называется предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при значении $\varepsilon \to +0$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (6.1.1.5)$$

Если пределы в правых частях формул (6.1.1.4) и (6.1.1.5) существуют и конечны, то несобственные интегралы второго рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой точке $c \in \left[a;b\right]$, то данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \qquad (6.1.1.6)$$

6.1.2 Экономические приложения определённого интеграла

Объём v произведённой продукции за время $t \in \left[t_1;t_2\right]$ при производительности труда $p(t)$ вычисляется по формуле

$$v = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \qquad (6.1.2.1)$$

Если считать затраты труда линейно зависимыми от времени, а затраты труда не изменяются, то функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = \left(\alpha t + \beta\right)e^{\gamma t}$. Следовательно, объём произведённой продукции v за время T равен

$$v = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\alpha t + \beta\right)e^{\gamma t}dt. \qquad (6.1.2.2)$$

По формуле (6.1.2.1) будет вычисляться *количество товара* v, которое поступает на склад в промежуток времени $t \in \left[t_1;t_2\right]$, если $p(t)$ – количество товара, поступающего на склад за единицу времени. Если же $p(t)$ – расход электроэнергии в единицу времени, то *расход электроэнергии* за время $t \in [t_1; t_2]$ определяется по той же формуле (6.1.2.1).

Дисконтирование. Процесс определения первоначальной суммы по известному её конечному значению, полученному через какое-либо время t при определённой процентной ставке p, называется *дисконтированием.*

Предположим, что доход изменяется со временем t и описывается функциональной зависимостью $D(t)$, а удельная норма процента равна $i = \dfrac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда *дисконтированный доход* K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T D(t) e^{-it} dt. \qquad (6.1.2.3)$$

Вычисление средних экономических величин. В экономике часто приходится находить среднее значение затрат на производство за определённый промежуток времени, среднюю производительность труда за определённый промежуток времени и т. д. Такого вида задачи решаются с помощью *теоремы о среднем* (свойство 10 определённого интеграла). Тогда *среднее значение* $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равно

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \qquad (6.1.2.4)$$

Процессы роста. Пусть некоторая экономическая величина $y = f(t) > 0$, при заданном начальном условии $f(0) = y_0$, характеризуется следующими свойствами:

– абсолютный прирост в интервале времени $[0; t]$ пропорционален длине интервала и начальному значению;

– норма прироста $\dfrac{f'(t)}{f(t)} = \gamma$ постоянна.

Тогда средняя норма прироста в интервале времени $[0; t]$ рассчитывается по формуле $\bar{\gamma} = \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t \gamma(z) dz$.

Общая прибыль. Если $i(x)$ – предельные издержки за x единиц количества, а $v(x)$ и – предельные выручки за x единиц количества, общая прибыль равна $P(x) = \displaystyle\int_0^x \big(v(x) - i(x)\big) dx$.

Определённый интеграл имеет и другие экономические приложения.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$.

Решение. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \cos x\, dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\sin b - 0\right)$. Данный предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

6.2.2 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{x}\Big|_a^1 = -\lim\limits_{a\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = -1$. Следовательно, несобственный интеграл сходится.

6.2.3 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{x^2+1} = 2\lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = 2\operatorname{arctg} b - 0 = \pi$.

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

6.2.4 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\ln 1 - \ln|\varepsilon|\right) = +\infty$. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

6.2.5 Установить сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

6.2.6 Сменная производительность труда рабочего описывается функцией $p(t) = 2{,}5t - 0{,}3125t^2$, где t – время, причём $0 \le t \le 7$. Определить объём выпуска продукции в течение месяца (за 20 рабочих дней июня 2013 года) бригадой, состоящей из 10 человек.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2.1). Количество продукции v_1, производимой одним рабочим за один рабочий день, равно

$$v = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int\limits_0^7 \left(2{,}5t - 0{,}3125t^2\right)dt = \left(\frac{5}{4}t^2 - \frac{5}{48}t^3\right)\Bigg|_0^7 \approx 25{,}52\left(y.e.\right).$$

Объём продукции v, выпущенной за месяц бригадой, состоящей из 10 человек, равен $v = 25,52 \cdot 20 \cdot 10 = 5104$ условных единиц.

6.2.7 Найти объём произведённой за 10 лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (1+t)e^t$.

Решение. Объём произведённой продукции определим по формуле (6.1.2.1).

$$v = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_0^{10} (1+t)e^t dt = \begin{bmatrix} u = 1+t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix} = (1+t)e^t \Big|_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt =$$

$$= (1+t)e^t \Big|_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt = 11e^{10} - 1 - e^t \Big|_0^{10} = 11e^{10} - 1 - e^{10} + 1 = 10e^{10} \approx 220265.$$

Таким образом, объём произведённой за 10 лет продукции составит 220265 условных единиц.

6.2.8 Найти среднее значение затрат на производстве и реализацию продукции, имеющих вид $Z(v) = 2v + 2$, где v – объём продукции, если объём продукции изменяется от 4 до 6 условных единиц. Найти объём продукции, при котором издержки производства принимают среднее значение.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2.4).

$$Z_{cp} = \frac{1}{6-4}\int_4^6 (2v+2)dv = \frac{1}{2}\left(v^2 + 2v\right)\Big|_2^6 = \frac{1}{2}(48-8) = 20.$$

Таким образом, средние издержки составляют 20 денежных единиц. Для того чтобы определить объём продукции, который соответствует средним издержкам, решаем уравнение $Z(v) = Z_{cp}$, которое имеет вид $2v + 2 = 20$. Следовательно, издержки производства принимают среднее значение при объёме производства, равном 9 условным единицам.

6.2.9 Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 5 %, если базовые капиталовложения составляют 10 миллионов денежных единиц и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 1 миллион денежных единиц.

Решение. Для определения дисконтированного дохода воспользуемся формулой (6.1.2.3). Функция капиталовложений имеет вид: $D(t) = 10 + t$.

Удельная норма процента равна $i = \frac{p}{100} = \frac{5}{100} = 0,05$.

Следовательно, дисконтированный доход K равен:

$$K = \int_0^5 (10+t)e^{-0,05t}dt = \begin{bmatrix} u = 10+t & du = dt \\ dv = e^{-0,05t}dt & v = -20e^{-0,05t} \end{bmatrix} = -(200+20t)e^{-0,05t}\Big|_0^5 +$$

$$+20\int_0^5 e^{-0,05t}dt = -300e^{-0,25} + 200 - 400e^{-0,05t}\Big|_0^5 = -300e^{-0,25} + 200 - 400e^{-0,25} + 400 =$$

$$= 600 - 700e^{-0,25} \approx 54,8$$

Таким образом, дисконтированный доход равен 54,8 миллионов денежных единиц.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

6.3.1.1 $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$. **6.3.1.2** $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{9+x^2}$. **6.3.1.3** $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x\,dx}{x}$.

6.3.2 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

6.3.2.1 $\int_0^{2}\frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **6.3.2.2** $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **6.3.2.3** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

6.3.3 Дневная производительность труда (7 рабочих часов) рабочего приборостроительного завода описывается функцией $p(t)=40{,}36+1{,}12t-0{,}36t^2$, где t – время, которое измеряется в часах, $p(t)$ – количество продукции. Какое количество продукции производит рабочий за 262 рабочих дня в год?

6.3.4 Найти среднее значение издержек на производство, описываемой функцией, имеющих вид $Z(v)=3v^2+4v+1$, где v – объём продукции, и объём продукции изменяется от 0 до 3 условных единиц. Найти объём продукции, при котором издержки производства принимают среднее значение.

6.3.5 Найти объём произведённой за 10 лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t)=(2+t)e^{2t}$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

6.4.1.1 а) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_1^{2}\frac{dx}{x^2-1}$. **6.4.1.2** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{2+x^2}$; б) $\int_5^{6}\frac{dx}{\sqrt{x-5}}$.

6.4.1.3 а) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{2x-1}$; б) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$. **6.4.1.4** а) $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

6.4.1.5 а) $\int_4^{\infty}\frac{dx}{4+64x^2}$; б) $\int_{\sqrt{8}}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$. **6.4.1.6** а) $\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int_6^{7}\frac{dx}{\sqrt{x-6}}$.

6.4.1.7 а) $\int_3^{\infty}\frac{xdx}{x-1}$; б) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{ctg}dx$. **6.4.1.8** а) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int_1^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

6.4.1.9 а) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int_2^{4}\frac{dx}{x^2-16}$. **6.4.1.10** а) $\int_{-\infty}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int_6^{7}\frac{dx}{\sqrt[4]{x-6}}$.

6.4.1.11 а) $\int_4^{\infty}\frac{dx}{3x-1}$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$. **6.4.1.12** а) $\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int_1^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

6.4.1.13 а) $\int_4^{\infty}\frac{dx}{9+25x^2}$; б) $\int_1^{4}\frac{dx}{x^2-1}$. **6.4.1.14** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{3+x^2}$; б) $\int_7^{8}\frac{dx}{\sqrt{x-7}}$.

6.4.1.15 а) $\int_{2}^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi}\mathrm{ctg}\,dx$. **6.4.1.16** а) $\int_{5}^{\infty}\frac{dx}{x^5}$; б) $\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{6-x}}$.

6.4.1.17 а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{16+x^2}$; б) $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$. **6.4.1.18** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}}\frac{dx}{5+x^2}$; б) $\int_{9}^{10}\frac{dx}{\sqrt{x-9}}$.

6.4.1.19 а) $\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{3x-1}$; б) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\mathrm{tg}\,x\,dx$. **6.4.1.20** а) $\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^6}$; б) $\int_{5}^{9}\frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.

6.4.1.21 а) $\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{9+64x^2}$; б) $\int_{\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{x^2-4}$. **6.4.1.22** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}dx}{7+x^2}$; б) $\int_{8}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x-8}}$.

6.4.1.23 а) $\int_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{5x+2}$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{ctg}\,dx$. **6.4.1.24** а) $\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^7}$; б) $\int_{4}^{8}\frac{dx}{\sqrt{8-x}}$.

6.4.1.25 а) $\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{1+9x^2}$; б) $\int_{3}^{6}\frac{dx}{x^2-36}$. **6.4.1.26** а) $\int_{-\infty}^{4}\frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

6.4.1.27 а) $\int_{6}^{\infty}\frac{dx}{5x-1}$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{tg}\,x\,dx$. **6.4.1.28** а) $\int_{7}^{\infty}\frac{dx}{x^7}$; б) $\int_{0}^{9}\frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.

6.4.1.29 а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{64+x^2}$; б) $\int_{1}^{7}\frac{dx}{x^2-49}$. **6.4.1.30** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}}\frac{dx}{5+x^2}$; б) $\int_{6}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-6}}$.

6.4.2 При заданной функции Кобба-Дугласа $p(t)=(k+t)e^{0,2k\cdot t}$ найдите объём произведённой продукции за требуемый период m. В условии задачи значение k равно номеру варианта, а значение параметра $m=0{,}1\cdot k$.

7 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

(практическое занятие № 7)

Содержание: вычисление площадей фигур, длин дуг и объёмов тел.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Используя понятие определённого интеграла, можно вычислять площади плоских фигур, находить длины дуг плоских кривых, вычислять объёмы и площади поверхностей пространственных тел.

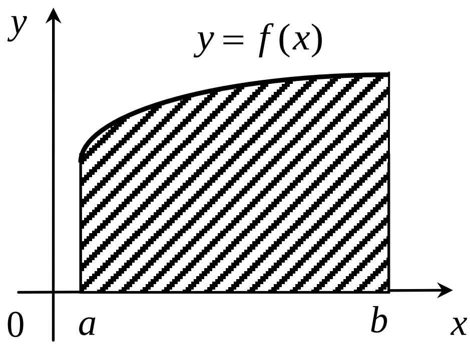

Рисунок 7.1.1.1 – Криволинейная трапеция

7.1.1 Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке_$[a;b]$ и $f(x)\ge 0$. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, а также осью Ox (рисунок 7.1.1.1).

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (7.1.1.1)$$

Рассмотрим плоскую фигуру Φ, которая ограничена графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, а также двумя прямыми $x=a$, $x=b$. Пусть для каждой точки x из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $f_1(x)\le f_2(x)$ (рисунок 7.1.1.2).

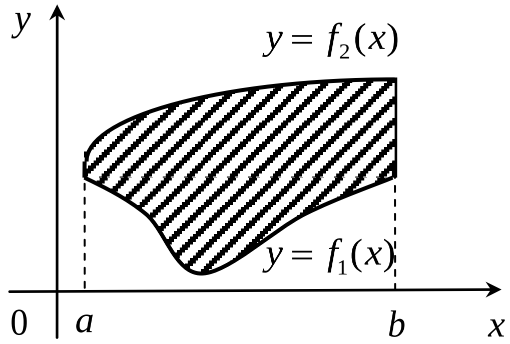

Рисунок 7.1.1.2 – Плоская фигура Ф

Площадь этой плоской фигуры находится по формуле

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (7.1.1.2)$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, то её площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (7.1.1.3)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $x(t_1)=a$, $y(t_2)=b$ ($y(t)\ge 0$ на отрезке $[t_1;t_2]$).

Пусть фигура ограничена непрерывной функцией $r=r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, где φ и r – полярные координаты. Полученная фигура называется *криволинейным сектором*, ограниченным дугой графика функции $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$ (рисунок 7.1.1.3).

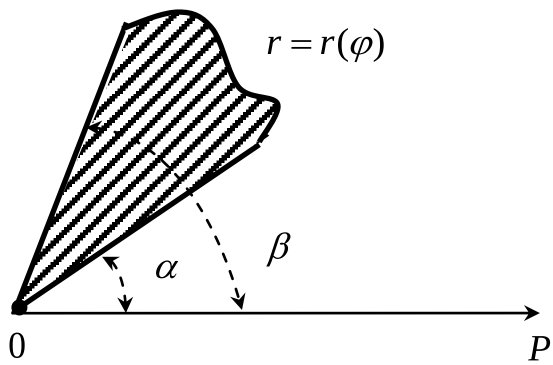

Рисунок 7.1.1.3 – Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (7.1.1.4)$$

7.1.2 Вычисление длин дуг плоских и пространственных кривых

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$, дуга AB – график этой функции (рисунок 7.1.2.1).

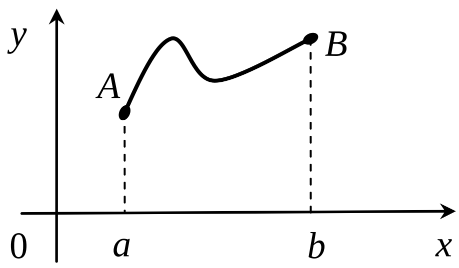

Рисунок 7.1.2.1 – Плоская дуга

Длина l плоской гладкой дуги AB, уравнение которой задано в аналитическом виде, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (7.1.2.1)$$

Предположим, что плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [t_1;t_2]$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1;t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t, которые соответствуют концам дуги, то есть точкам A и B соответственно (рисунок 7.1.2.1).

Длина l плоской гладкой дуги AB, уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt. \qquad (7.1.2.2)$$

Рассмотрим пространственную кривую L, заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $t \in [t_1;t_2]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1;t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t, которые соответствуют концам кривой L.

Длина l пространственной гладкой дуги L, уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\, dt. \qquad (7.1.2.3)$$

Пусть плоская гладкая кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, а α и β – значения полярного угла φ, которые соответствуют концам кривой L. Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \qquad (7.1.2.4)$$

7.1.3 Вычисление объёмов пространственных тел

Пусть задано некоторое пространственное тело, ограниченное поверхностью, и известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной некоторой прямой, например, к оси абсцисс. Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox. Если площадь $S(x)$ поперечного сечения является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$, то объём тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (7.1.3.1)$$

Предположим, что пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Ox, заданной на отрезке $[a;b]$ функцией $y = f(x)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(x) = \pi f^2(x)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (7.1.3.2)$$

Если же эта дуга будет вращаться вокруг оси Oy, то объём полученного тела можно вычислить по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\left|f(x)\right|dx. \qquad (7.1.3.3)$$

Пусть пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Oy, заданной на отрезке $[c;d]$ функцией $x = f(y)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(y) = \pi\varphi^2(y)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (7.1.3.4)$$

Если дуга L, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$ и $t \in [t_1;t_2]$, вращается вокруг оси Ox или Oy, то объёмы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)dt, \qquad (7.1.3.5)$$

$$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\left|y(t)\right|\,x'(t)\,dt. \qquad (7.1.3.6)$$

Предположим, что криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси. Тогда объём тела вращения находится по формуле

$$V_{OP} = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (7.1.3.7)$$

7.1.4 Вычисление площадей поверхности тел вращения

Рассмотрим дугу L, которая вращается вокруг произвольной оси l. Предположим, что известны расстояние ρ от произвольной точки дуги до оси вращения l и дифференциал дуги dl, которые выражаются через переменную интегрирования, а также пределы интегрирования A и B, соответствующих концов дуги L. Тогда площадь поверхности вращения будет выражаться следующим интегралом

$$Q_l = 2\pi\int_A^B \rho dl. \qquad 7.1.4.1)$$

На основании интеграла (7.1.4.1) приведём формулы площадей Q_x поверхностей вращения вокруг оси Ox, в зависимости от формулы задания дуги.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (7.1.4.2)$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, то

$$Q_x = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (7.1.4.3)$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то

$$Q_x = 2\pi\int_a^b r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad (7.1.4.4)$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Вычислить площадь фигуры $\Phi 1$, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

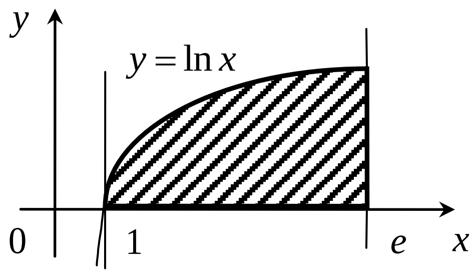

Рисунок 7.2.1 – Фигура $\Phi 1$

Решение. Находим площадь фигуры $\Phi 1$, которая является криволинейной трапецией (рисунок 7.2.1), по формуле (7.1.1.1).

$$S = \int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - 0 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1\,(\text{кв. ед}).$$

7.2.2 Вычислить площадь фигуры $\Phi 2$, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

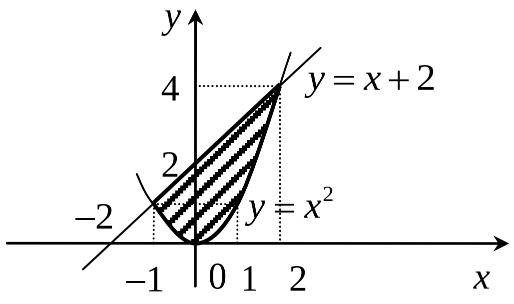

Рисунок 7.2.2 – Фигура $\Phi\,2$

Решение. Находим точки пересечения данных линий и строим искомую фигуру $\Phi\,2$ (рисунок 7.2.2):

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ x^2 = x + 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Следовательно, согласно формуле (7.1.1.2), имеем

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2 \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} = 4{,}5\,(\textit{кв. ед}).$$

7.2.3 Вычислить площадь фигуры $\Phi\,3$, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox, где $a > 0$.

Решение. Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую её арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π (рисунок 7.2.3).

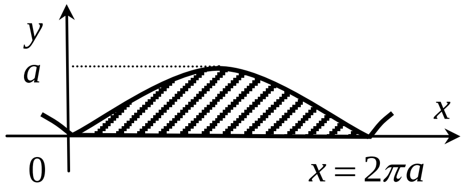

Рисунок 7.2.3 – Фигура $\Phi\,3$

Для определения площади фигуры $\Phi\,3$, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox, воспользуемся формулой (7.1.1.3). Следовательно,

$$S = \int_{0}^{2\pi} a\left(1 - \cos t\right)\left(a\left(t - \cos t\right)\right)' dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} a\left(1 - \cos t\right) a\left(1 - \cos t\right) dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - \cos t\right)^2 dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt =$$

$$= a^2 \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2\ (\textit{кв. ед}).$$

7.2.4 Вычислить площадь фигуры $\Phi\,4$, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, где $a > 0$.

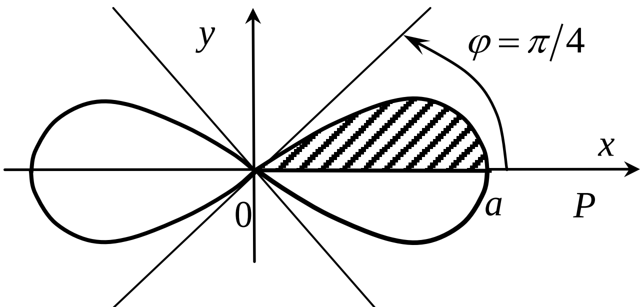

Рисунок 7.2.4 – Фигура $\Phi\,4$

Решение. Так как в уравнении лемнискаты Бернулли переменные x и y имеют чётную степень, то кривая, ограничивающая заданную фигуру $\Phi\,4$, симметрична относительно осей координат. Следовательно, для нахождения площади всей фигуры $\Phi\,4$, достаточно вычислить площадь четвёртой части этой фигуры, расположенной, например, в первой четверти, и полученный результат увеличить в четыре раза.

Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат, используя формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение данной кривой примет вид: $\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 = a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right) \to r^2 = a^2\cos 2\varphi$ или $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Первой четверти декартовой системы координат соответствует изменение полярного угла φ от 0 до $\pi/4$ (рисунок 7.2.4). Используя формулу (7.1.1.4), находим площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли.

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = a^2\ (кв.\,ед).$$

7.2.5 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсечённой прямой $x = 1$.

Решение. Линия $L1$, длину которой необходимо найти, изображена на рисунке 7.2.5. Найдём производную функции $y = f(x)$, заданной неявно соотношением $y^2 = x^3$, имеем $2yy' = 3x^2$, откуда $\left(y'\right)^2 = \frac{9}{4}x$. В силу симметрии кривой относительно оси абсцисс достаточно вычислить длину дуги расположенной в первой четверти, и удвоить полученный результат. По формуле (7.1.2.1) получаем длину дуги заданной кривой

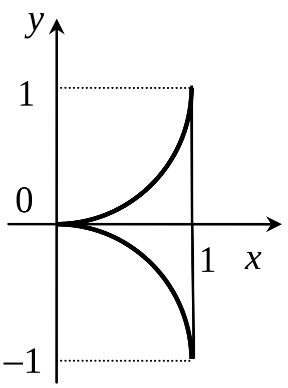

Рисунок 7.2.5 – Линия $L1$

$$l = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{4 + 9x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 \sqrt{4+9x}\, d(4+9x) = \frac{2}{27}\sqrt{(4+9x)^3}\Big|_0^1 = \frac{26}{27}\sqrt{13} - \frac{16}{27} = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \approx 2{,}9\ (лин.\,ед).$$

7.2.6 Вычислить длину астроиды $y = a\sin^3 t$, $x = a\cos^3 t$, где $a > 0$.

Решение. Ввиду симметрии астроиды (рисунок 7.2.6) относительно осей координат достаточно вычислить длину её части, расположенной в первой четверти плоскости, а затем полученный результат умножить на четыре. Имеем $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$. Тогда, согласно формуле (7.1.2.2), имеем

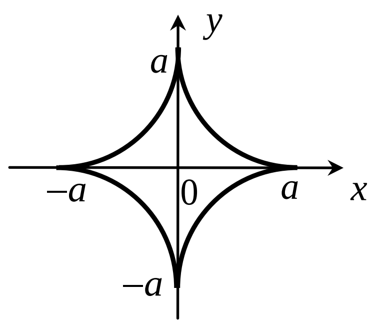

Рисунок 7.2.6 – Астроида

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$=12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=6a\ (\textit{лин. ед}).$$

7.2.7 Вычислить длину кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$, где $a>0$.

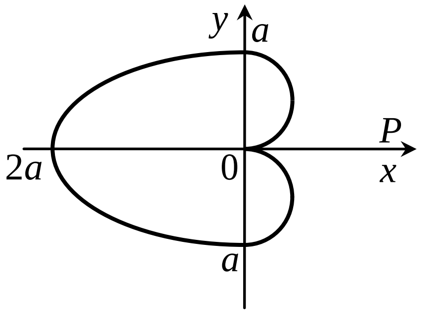

Рисунок 7.2.7 – Кардиоида

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рисунок 7.2.7) относительно полярной оси OP достаточно вычислить длину дуги, расположенной выше оси, а затем полученный результат увеличить в два раза. Имеем $r'_\varphi=a\sin\varphi$. Используя формулу (7.1.2.4), находим длину дуги кардиоиды.

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=2a^2\int_0^{\pi}2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=0+8a=8a\ (\textit{лин. ед}).$$

7.2.8 Вычислить объём тела $T1$, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $x=1$, $y=0$.

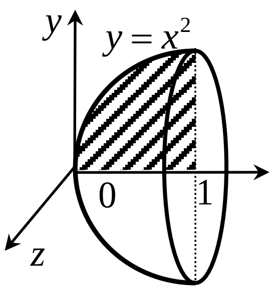

Рисунок 7.2.8 – Тело $T1$

Решение. Находим точку пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $x=1$: $M(1;0)$ (рисунок 7.2.8).

Воспользуемся формулой (7.1.3.2).

$$V=\pi\int_0^1 x^4dx=\frac{\pi x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}\approx 0{,}628\ (\textit{куб. ед}).$$

7.2.9 Вычислить площадь поверхности $П1$, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y=\sin 2x$ от точки $x=0$ до точки $x=\pi/2$.

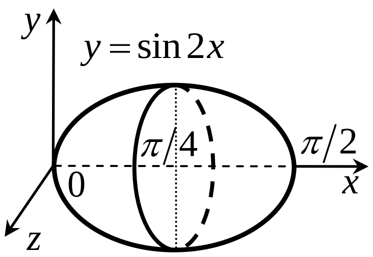

Рисунок 7.2.9 – Поверхность $П1$

Решение. Как видно из рисунка 7.2.9 и формулы 7.1.4.2 искомая площадь поверхности вращения

$$Q_x=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}dx=$$

$$=-\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+4\cos^2 2x}d\cos 2x=$$

$$=\begin{bmatrix} t=2\cos 2x & x=0\to t=2 \\ d\cos 2x=\dfrac{dt}{2} & x=\pi/2\to t=-2\end{bmatrix}=-\frac{\pi}{2}\int_2^{-2}\sqrt{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\approx 9,29\,(\textit{кв. ед}).$$

Для нахождения интеграла $\int\sqrt{1+t^2}\,dt$ воспользовались заменой $t=\operatorname{tg}z$, основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и формулой интегрирования по частям.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Вычислить площади фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 7.3.1.1 – 7.3.1.6.

7.3.1.1 $y=x^2+2x,\ y=x+2$.

7.3.1.2 $y=\dfrac{27}{x^2+9},\ y=\dfrac{x^2}{6}$.

7.3.1.3 $y=e^x-1,\ y=e^{2x}-3,\ x=0$.

7.3.1.4 $y=\ln(x+2),\ y=2\ln x,\ y=0$.

7.3.1.5 $y=2(1-\cos t),\ x=2(t-\sin t),\ y=0$.

7.3.1.6 $r=a(1+\sin\varphi),\ a>0$.

7.3.2 Вычислить длины дуг кривых.

7.3.2.1 $y=\ln\sin x$ *от* $x=\pi/3$ *до* $x=\pi/2$.

7.3.2.2 $y=\operatorname{ch}x$ *от* $x=0$ *до* $x=1$.

7.3.2.3 $y=e^t\sin t,\ x=e^t\cos t$ *от* $t=0$ *до* $t=\ln\pi$.

7.3.2.4 $r=\varphi^2$ *от* $\varphi=0$ *до* $\varphi=\pi$.

7.3.3 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox, фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 7.3.3.1 – 7.3.3.2.

7.3.3.1 $2y=x^2,\ y=-x+3/2$.

7.3.3.2 $y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1,\ x=0$.

7.3.4 Вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox, дуг кривых, которые указаны в задачах 7.3.4.1 – 7.3.3.2.

7.3.4.1 $y=\operatorname{ch}x$ *от* $x=0$ *до* $x=\ln 2$.

7.3.4.2 $y=x^3$ *от* $x=0$ *до* $x=1$.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Заданы функции $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$, $y=p(x)$, а также числа a и b. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$;

б) длину дуги кривой $y=g(x)$ от точки $x_1=a$ до точки $x_2=b$;

в) объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=p(x)$ и прямыми $x=a$, $y=b$ (в случае неоднозначности фигуры, ограниченной линиями, считать, что $x\ge a$);

г) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox, дуги кривой $y=g(x)$ от точки $x_1=a$ до точки $x_2=b$.

7.4.1.1 $f(x)=x^2+x$, $\varphi(x)=4x-2$, $g(x)=x^2$, $p(x)=x^3$, $a=1$, $b=2$.

7.4.1.2 $f(x)=x^2+5x$, $\varphi(x)=x-3$, $g(x)=\operatorname{ch}x$, $p(x)=1-x^2$, $a=1/2$, $b=3/4$.

7.4.1.3 $f(x)=x^2+2x$, $\varphi(x)=7x-4$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $p(x)=x^3$, $a=0$, $b=1/4$.

7.4.1.4 $f(x)=x^2-x$, $\varphi(x)=x+8$, $g(x)=2^x/\ln 2$, $p(x)=2^x$, $a=3$, $b=\log_2 15$.

7.4.1.5 $f(x)=x^2+4x$, $\varphi(x)=11x-6, g(x)=2\sqrt{x}$, $p(x)=\ln x$, $a=1/8$, $b=1/3$.

7.4.1.6 $f(x)=x^2-x$, $\varphi(x)=4x-6, g(x)=e^x$, $p(x)=e^{2x}$, $a=\ln\sqrt{3}$, $b=\ln\sqrt{8}$.

7.4.1.7 $f(x)=x^2-4x$, $\varphi(x)=2x-8, g(x)=x^{3/2}$, $p(x)=x^3+1$, $a=1$, $b=4$.

7.4.1.8 $f(x)=x^2-6x$, $\varphi(x)=x-10, g(x)=2x^2$, $p(x)=x^3-x$, $a=1$, $b=2$.

7.4.1.9 $f(x)=x^2-3x$, $\varphi(x)=5x-6, g(x)=\operatorname{ch}2x/2$, $p(x)=-x^3$, $a=0$, $b=\ln 3$.

7.4.1.10 $f(x)=x^2-2x$, $\varphi(x)=7x-14, g(x)=\sqrt{4-x^2}$, $p(x)=x^5$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$.

7.4.1.11 $f(x)=x^2-3x$, $\varphi(x)=16+3x, g(x)=3^x/\ln 3$, $p(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$.

7.4.1.12 $f(x)=x^2+5x$, $\varphi(x)=12+6x, g(x)=3\sqrt{x}$, $p(x)=x^3-2$, $a=4$, $b=9$.

7.4.1.13 $f(x)=x^2+4x$, $\varphi(x)=15+2x, g(x)=e^{2x}$, $p(x)=x^4-2$, $a=0$, $b=\ln 2$.

7.4.1.14 $f(x)=x^2+6x$, $\varphi(x)=18+3x, g(x)=4x^{3/2}$, $p(x)=x^5+1$, $a=1$, $b=4$.

7.4.1.15 $f(x)=x^2+4x$, $\varphi(x)=21+8x, g(x)=3x^2$, $p(x)=x^2+3x$, $a=2$, $b=5$.

7.4.1.16 $f(x)=x^2+x$, $\varphi(x)=3x+3, g(x)=\operatorname{ch}3x/3$, $p(x)=x^2-5$, $a=1$, $b=4$.

7.4.1.17 $f(x)=x^2+8x$, $\varphi(x)=x-12, g(x)=\sqrt{x^3}$, $p(x)=x^3$, $a=1$, $b=9$.

7.4.1.18 $f(x)=x^2+6x$, $\varphi(x)=x-4, g(x)=4^x/\ln 4$, $p(x)=1-x^3$, $a=0$, $b=2$.

7.4.1.19 $f(x)=x^2+2x$, $\varphi(x)=x+20, g(x)=4\sqrt{x}$, $p(x)=-x^3$, $a=9$, $b=16$.

7.4.1.20 $f(x)=x^2-x$, $\varphi(x)=x+48, g(x)=e^{3x}/3$, $p(x)=x^4$, $a=0$, $b=\ln 4$.

7.4.1.21 $f(x)=x^2-7x$, $\varphi(x)=112+2x, g(x)=9x^{3/2}$, $p(x)=\sin x$, $a=0$, $b=1$.

7.4.1.22 $f(x)=x^2+3x$, $\varphi(x)=7x-3, g(x)=4x^2$, $p(x)=\cos x$, $a=0$, $b=1/2$.

7.4.1.23 $f(x)=x^2-5$, $\varphi(x)=x-3, g(x)=\operatorname{ch}4x$, $p(x)=e^x$, $a=0$, $b=\ln 5$.

7.4.1.24 $f(x)=2x^2+2$, $\varphi(x)=5x, g(x)=4\sqrt{x^3}$, $p(x)=\sqrt{x}$, $a=9$, $b=16$.

7.4.1.25 $f(x)=3x^2+3$, $\varphi(x)=10x, g(x)=5^x/\ln 5$, $p(x)=\operatorname{tg}x$, $a=0$, $b=1$.

7.4.1.26 $f(x)=4x^2+4$, $\varphi(x)=17x, g(x)=5\sqrt{x}$, $p(x)=\operatorname{ctg}x$, $a=4$, $b=16$.

7.4.1.27 $f(x)=2x^2+2$, $\varphi(x)=-5x, g(x)=e^{4x}/4$, $p(x)=\sin 2x$, $a=0$, $b=1$.

7.4.1.28 $f(x)=3x^2+3$, $\varphi(x)=-10x, g(x)=16x^{3/2}$, $p(x)=\cos 2x$, $a=0$, $b=1/2$.

7.4.1.29 $f(x)=4x^2+4$, $\varphi(x)=-17x, g(x)=\operatorname{ch}5x/5$, $p(x)=-x^3$, $a=0$, $b=1/5$.

7.4.1.30 $f(x)=x^2+9x$, $\varphi(x)=11-x, g(x)=e^{5x}/5$, $p(x)=4-x^2$, $a=1$, $b=2$.

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
(практическое занятие № 8)

Содержание: арифметическое точечное пространство R^n, понятие функции нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных, дифференцирование функций нескольких переменных, предельная производительность факторов производства, предельная норма замещения двух факторов производства, частный коэффициент эластичности выпуска продукции.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В дифференциальном и интегральном исчислении функции нескольких переменных используется понятие n-мерного арифметического пространства.

Определение 8.1.1 Множество всех упорядоченных наборов $(x_1; x_2; ...; x_n)$ действительных чисел $x_1; x_2; ...; x_n$ называется n-мерным арифметическим точечным пространством $\boldsymbol{R^n}$, а его элементы – точками пространства $\boldsymbol{R^n}$. Числа $x_1; x_2; ...; x_n$ называются координатами точки $P(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Определение 8.1.2 Расстоянием ρ между точками $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ и $P'(x_1'; x_2'; ...; x_n')$ n-мерного пространства называется число

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + ... + (x_n - x_n')^2}. \qquad (8.1.1)$$

Пусть $D \subset \boldsymbol{R^n}$ – произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое, вполне определённое действительное число $f(P) = f(x_1; x_2; ...; x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f: \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ от n переменных $x_1; x_2; ...; x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E = \{u \in R | u = f(P), P \in D\}$ – областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае $n = 2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости трёхмерного геометрического пространства с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек $\Gamma = \{(x, y, z) \in R^n | u = f(x, y)\}$.

Определение 8.1.3 Число A называется *пределом функции* $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ к точке $P_0(a_1; a_2; ...; a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x_1; x_2; ...; x_n) - A| < \delta.$$

При этом записывают

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1; x_2; ...; x_n).$$

Определение 8.1.4 Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $f(P)$ определена в точке P_0;

2) существует $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1) – 3) нарушено, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $u = f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и так далее.

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $P\left(x_1;...;x_i;...;x_n\right)$ из области определения функции $u = f\left(x_1;\ldots;x_n\right)$. Если придать переменной x_i приращение Δx_i, то функция также получит приращение $\Delta_{x_i} u = f(x_1;\ldots;x_i + \Delta x_i;\ldots;x_n) - f(x_1;\ldots;x_i;\ldots;x_n)$.

Определение 8.1.5 *Частной производной* функции $u = f\left(x_1;\ldots;x_n\right)$ в произвольно фиксированной точке $P\left(x_1;...;x_i;...;x_n\right)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x_i} u$ к соответствующему приращению аргумента Δx_i, при стремлении последнего к нулю, то есть

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1;\ldots;x_i + \Delta x_i;\ldots;x_n) - f(x_1;\ldots;x_i;\ldots;x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}\left(x_1;\ldots;x_n\right)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме переменной x_i, считаются постоянными величинами.

Частными производными второго порядка функции $u = f\left(x_1;\ldots;x_n\right)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{x_i}^2} = f''_{x_i x_i}\left(x_1;\ldots;x_i;\ldots;x_n\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}\left(x_1;\ldots;x_i;\ldots;x_n\right).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очерёдности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$. Частные производные первого и второго порядка от этой функции имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Рассмотрим **применение частных производных в экономике.** Пусть дана производственная функция $z = f(x;y)$, показывающая зависимость объёма производства z от факторов производства x и y. Рассмотрим применение частных производных для описания различных экономических показателей.

Предельная производительность факторов производства:

$$p_x = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } p_y = \frac{\partial z}{\partial y},$$

где p_x и p_y – предельные производительности факторов x и y, соответственно.

Предельная норма замещения двух факторов производства:

$$n_{xy} = -\frac{p_y}{p_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } n_{yx} = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y},$$

где n_{xy} – предельная норма замещения фактора производства x фактором производства y; n_{yx} – предельная норма замещения фактора производства y фактором производства x.

Частный коэффициент эластичности выпуска продукции по определённому фактору:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} \text{ и } \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y},$$

где ε_x – эластичность объёма производства относительно фактора x; ε_y – эластичность объёма производства относительно фактора y. Коэффициент эластичности приближённо показывает, на сколько процентов изменится объём производства при изменении одного фактора на 1 %, если второй фактор остаётся неизменным.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти область определения функции $y = \arcsin(y/x)$

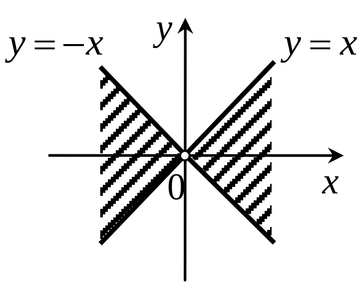

Рисунок 8.2.1 – Область определения функции $y = \arcsin(y/x)$

Решение: Функция $y = \arcsin(y/x)$ определена при $-1 \le \frac{y}{x} \le 1$, $x \ne 0$. Следовательно, $-x \le y \le x$ при $x > 0$, и $x \le y \le -x$ при $x < 0$.

Область определения функции изображена на рисунке 8.2.1 и содержит границы области, за исключением начала координат.

8.2.2 Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+xy\right)^{\frac{3}{x^2+xy}}$

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+xy\right)^{\frac{3}{x^2+xy}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{3xy}{x^2+xy}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{3y}{x+y}}=e^3$.

8.2.3 Найти точки разрыва функции $u=\dfrac{x+y+z}{3x+2y-z-4}$.

Решение. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва – плоскость $3x+2y-z-4=0$.

8.2.4 Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z=x^5+y^5-x^3y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^5+y^5-x^3y^3\right)'_x=5x^4-3x^2y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^5+y^5-x^3y^3\right)'_y=5y^4-3x^3y^2$. Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(5x^4-3x^2y^3\right)'_x=20x^3-6xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(5x^4-3x^2y^3\right)'_y=-9x^2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(5y^4-3x^3y^2\right)'_y=20y^3-6x^3y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(5y^4-3x^3y^2\right)'_x=-9x^2y^2.$$

8.2.5 Имеется производственная функция $z=6x^3-x^2y^2+5y^3$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=1$, $y=2$.

Решение. Находим частные производные от производственной функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=18x^2-2xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=15y^2-2x^2y$. Тогда частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам равны: $\varepsilon_x=\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{18x^3-2x^2y^2}{6x^3-x^2y^2+5y^3}$, $\varepsilon_y=\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{15y^3-2x^2y^2}{6x^3-x^2y^2+5y^3}$. Найдём значения коэффициентов при $x=1$, $y=2$: $\varepsilon_x(1;2)\approx 0,24$, $\varepsilon_y(1;2)\approx 2,67$. Таким образом, с увеличением затрат живого труда на 1 % объём производства возрастёт на 0,24 %, а с увеличением затрат овеществлённого труда на 1 % объём производства увеличится на 2,67 %.

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Найти области определения функций двух переменных.

8.3.1.1 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. **8.3.1.2** $z=\arccos(x/y)$. **8.3.1.3** $z=\ln(x-y)$.

8.3.2 Вычислить пределы

8.3.2.1 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(1+y^2\right)^{\frac{4x^2+x}{xy^2}}$. **8.3.2.2** $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ y\to0}}\frac{\sin xy}{y}$. **8.3.2.3** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\frac{xy^2-4x}{x}$.

8.3.3 Найти частные производные первого и второго порядков функций, заданных в задачах 8.3.3.1 – 8.3.3.6. В задаче 8.3.3.1 найти значения частных производных в точке $M_0(3;2)$.

8.3.3.1 $z=x^4+2y^4-x^5y^5$. **8.3.3.2** $z=xy-\frac{y}{x}$. **8.3.3.3** $z=e^{2x}\cos5x$.

8.3.3.4 $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ **8.3.3.5** $z=\cos\left(x^2y^2\right)$ **8.3.3.6** $z=x^y$

8.3.4 Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=x\sin(ax+by)$.

8.3.5 Показать, что $y\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln(x^2+y^2)$.

8.3.6 Имеется производственная функция $z=3x^4-x^3y^2+5y^2$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найдите частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=2$, $y=3$. Дайте экономическую интерпретацию полученных результатов.

8.3.7 Для производственной функции Кобба-Дугласа $z=1{,}4x^{0{,}36}y^{0{,}02}$ определите коэффициенты эластичности. Дайте экономическую интерпретацию полученных результатов.

8.3.8 Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа $z=6000\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$. Найдите среднюю и предельную производительности труда, среднюю и предельную фондоотдачи, эластичности по труду и фондам.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Найти частные производные первого и второго порядков для функции $z=f(x,y)$. Пусть функция $z=f(x,y)$ является производственной функцией от затрат живого труда x и затрат овеществлённого труда y. Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции при значениях $x=2$, $y=3$.

8.4.1.1 $z=x^5-x^3y^4+y^6$. **8.4.1.2** $z=x-x^3y^4+y^6$. **8.4.1.3** $z=x^5-xy^4$.

8.4.1.4 $z=x^6+x^7y^5-y^4$. **8.4.1.5** $z=x^5+x^2y^3-y$. **8.4.1.6** $z=x^9-x^3y$.

8.4.1.7 $z=x^4-x^3y^2+y^3$. **8.4.1.8** $z=x+x^4y^3+y^7$. **8.4.1.9** $z=x^6+x^3y$.

8.4.1.10 $z=x^4+x^6y^5-y^2$. **8.4.1.11** $z=x-xy^5+y^4$. **8.4.1.12** $z=xy^3+y^4$.

8.4.1.13 $z = x^3 - x^2y^3 + y^4$. **8.4.1.14** $z = x^7 - x^3y^2 - y$. **8.4.1.15** $z = x^5 - x^3y$.

8.4.1.16 $z = x^6 + x^5y^2 + y^5$. **8.4.1.17** $z = x - x^2y^3 + y^5$. **8.4.1.18** $z = x^2y + y^3$.

8.4.1.19 $z = x^2 - x^2y^3 + y^4$. **8.4.1.20** $z = x^4 + x^5y^2 + y$. **8.4.1.21** $z = xy^5 - y^3$.

8.4.1.22 $z = x^4 + x^6y^3 - y^4$. **8.4.1.23** $z = x - x^3y^4 + y^5$. **8.4.1.24** $z = x^2 + xy^7$.

8.4.1.25 $z = x^4 - x^5y^5 + y^4$. **8.4.1.26** $z = x^4 + x^5y^2 - y$. **8.4.1.27** $z = 4x^4 + y^5$.

8.4.1.28 $z = x^6 + x^5y^5 + y^2$. **8.4.1.29** $z = x + x^5y^6 + y^4$. **8.4.1.30** $z = xy^3 + y^2$.

9 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

(практическое занятие № 9)

Содержание: производные функции, заданной неявно, уравнения касательной и нормали к поверхности, полный дифференциал функции и его применение.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

9.1.1 Неявные функции одной и нескольких независимых переменных. Геометрические приложения частных производных

Пусть уравнение $f(x;y)=0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию от переменной x. Тогда первая производная этой неявной функции $y=y(x)$ в точке x определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x;y)}{f'_y(x;y)} \qquad (9.1.1.1)$$

при условии $f'_y(x;y) \neq 0$. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (9.1.1.1).

Пусть уравнение $F(x_1;\ldots;x_n;u)=0$, где F – дифференцируемая функция переменных $x_1,\ldots,x_n,u$, определяет u как функцию от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Частные производные этой неявной функции $u=u(x_1;\ldots;x_n)$ в точке $P(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x_1;\ldots;x_n;u)}{f'_u(x_1;\ldots;x_n;u)} \quad \left(i=\overline{1;n}\right) \qquad (9.1.1.2)$$

при условии $f'_u(x_1;\ldots;x_n;u) \neq 0$. Частные производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формул (9.1.1.2).

Определение 9.1.1.1 *Касательной плоскостью* к поверхности в её точке P_0 (*точка касания*) называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, проведённым на поверхности через эту точку.

Определение 9.1.1.2 *Нормалью* к поверхности в её точке P_0 называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0. \quad (9.1.1.3)$$

Уравнение нормали

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0. \quad (9.1.1.4)$$

В случае задания поверхности в явной форме $z=f(x;y)$, уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0), \quad (9.1.1.5)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_z(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (9.1.1.6)$$

9.1.2 Полный дифференциал функции и его применение

Полным приращением функции $u=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ в точке $P(x_1;x_2;\dots;x_n)$ соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n$ называется разность $\Delta u=f(x_1+\Delta x_1;x_2+\Delta x_2;\dots;x_n+\Delta x_n)-f(x_1;x_2;\dots;x_n)$.

Определение 9.1.2.1 Функция $u=f(P)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x_1;x_2;\dots;x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\dots+A_n\cdot\Delta x_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x_1^{\,2}+\Delta x_2^{\,2}\dots+\Delta x_n^{\,2}}$, $A_1,A_2,\dots,A_n$ – некоторые действительные числа, не зависящие от приращений аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n$.

Определение 9.1.2.2 *Полным дифференциалом* функции $u=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ в точке $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется главная линейная часть полного приращения функции в рассматриваемой точке, которая линейна относительно приращений аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n$, то есть выражение вида

$$du=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\dots+A_n\cdot\Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращению ($dx_i=\Delta x_i,\ i=\overline{1;n}$), а значения действительных чисел A_i равны значению частных производных в рассматриваемой точке ($A_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$).

Тогда для полного дифференциала функции $u=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n. \qquad (9.1.2.1)$$

Функции u и v подчиняются обычным правилам дифференцирования: $d(u+v) = du + dv$, $d(uv) = vdu + udv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Полный дифференциал находит широкое применение в приближённых вычислениях. При достаточно малом значении $\rho = \sqrt{\Delta x_1^{\ 2} + \Delta x_2^{\ 2} ... + \Delta x_n^{\ 2}}$ для дифференцируемой функции $u = f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$ имеет место приближённое равенство $\Delta u \approx du$. Следовательно, справедлива приближённая формула

$$f\left(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; ...; x_n + \Delta x_n\right) \approx f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right) + df\left(x_1; x_2; ...; x_n\right). \qquad (9.1.2.2)$$

Определение 9.1.2.3 Дифференциалом второго порядка d^2u функции $u = f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$ называется дифференциал от её дифференциала первого порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, ..., dx_n$: $d^2u = d(du)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка: $d^3u = d(d^2u)$, $d^4u = d(d^3u)$, …, $d^ku = d(d^{k-1}u)$.

Дифференциал *k*-го порядка функции $u = f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k u. \qquad (9.1.2.2)$$

Записанная формула формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов второго и третьего порядков справедливы формулы

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \qquad (9.1.2.3)$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \qquad (9.1.2.4)$$

Рассмотрим **применение дифференциала в экономике**. Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа $S = f(z, v)$, где S – стоимость выпускаемой продукции; z – затраты труда; v – объём произведённых фондов.

Зафиксируем текущее состояние предприятия, то есть объём основных фондов v и затраты трудовых ресурсов z. Тогда соответствующая стоимость выпуска продукции составит $S = f(z, v)$. Полный дифференциал производственной функции находим по формуле

$$dS = \frac{\partial S}{\partial v} dv + \frac{\partial S}{\partial z} dz = S'_v dv + S'_z dz.$$

Исходя из экономического смысла частных производных, имеем, что S'_v – предельная производительность труда, а S'_z – предельная фондоотдача. Следовательно, $S'_v\Delta v$ – стоимость добавочной продукции, произведённой с использованием добавочного объёма фондов Δv; $S'_z\Delta z$ – стоимость добавочной продукции, произведённой добавочными затратами труда Δz. При малом изменении затрат труда Δz и малом изменении объёмов фондов Δv изменение выпуска продукции $\Delta S = dS$, то есть $\Delta S = S'_v dv + S'_z dz$.

Предположим, выпуск S является постоянным, тогда полный дифференциал dS производственной функции тождественно равен нулю, то есть $dS = \frac{\partial S}{\partial v}dv + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 0$. Следовательно, отношение $-\frac{dz}{dv} = \frac{\partial S}{\partial z} : \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{p_z}{p_v} = n_{zv}$ является предельной нормой замещения основного капитала трудом. Таким образом, при постоянном выпуске и малых приращениях Δv и Δz получаем приближённое равенство: $n_{zv} = -\frac{dz}{dv} = \frac{\Delta z}{\Delta v}$.

Итак, предельная норма замещения показывает, на сколько единиц увеличатся затраты труда, если затраты основного капитала уменьшатся на одну единицу, при неизменном выпуске продукции.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $f(x,y)$. Тогда $f'_x(x,y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$, $f'_y(x,y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$.

По формуле (9.1.1.2) получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x;y)}{f'_y(x;y)} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$. Дифференцируем вторично, учитывая, что y есть функция от переменной x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

9.2.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz - 3 = 0$.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через функцию $F(x,y,z)$. Тогда $F'_x(x,y,z) = 3x^2 - 4yz$, $F'_y(x,y,z) = 6y^2 - 4xz$, $F'_z(x,y,z) = 9z^2 - 4xy$.

По формуле (9.1.1.2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{4yz - 3x^2}{9z^2 - 4xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{4xz - 6y^2}{9z^2 - 4xy}.$$

9.2.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1,2,5)$.

Решение. Находим частные функции в заданной точке $M_0(1,2,5)$: $z'_x(1,2) = 2x\big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2$, $z'_y(1,2) = 2y\big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4$. По формуле (9.1.1.5) уравнение касательной плоскости имеет вид $z - 5 = 2\cdot(x-1) + 4(y-2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$. По формуле (9.1.1.6) находим уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

9.2.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2,3,6)$.

Решение. Обозначим через $F(x,y,z)$ левую часть уравнения сферы. Находим значения частных производных функции $F(x,y,z)$ в точке $M_0(2,3,6)$: $F'_x(M_0) = 2x\big|_{x=2,\, y=3,\, z=6} = 4$, $F'_y(M_0) = 2y\big|_{x=2,\, y=3,\, z=6} = 6$, $F'_z(M_0) = 2z\big|_{x=2,\, y=3,\, z=6} = 12$.

По формуле (9.1.1.3) уравнение касательной плоскости имеет вид $4\cdot(x-2) + 6\cdot(y-3) + 12\cdot(z-6) = 0$ или $2x + 3y + 6z - 49 = 0$. По формуле (9.1.1.4) находим уравнение нормали: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-6}{6}$.

9.2.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = y^3 e^{2x}$.

Решение. Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 e^{2x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 e^{2x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^3 e^{2x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y^2 e^{2x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6ye^{2x}.$$

По формулам (9.1.2.1) и (9.1.2.3) имеем

$$dz = 2y^3 e^{2x} dx + 3y^2 e^{2x} dy, \quad d^2 z = 4y^3 e^{2x} dx^2 + 12y^2 e^{2x} dxdy + 6ye^{2x} dy^2.$$

9.2.6 Вычислить приближённо $\sqrt{(3{,}97)^2 + (3{,}02)^2}$.

Решение. Заданное число будем рассматривать как значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, при значениях $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$. Имеем

$$f(4{,}3) = 5,\ \Delta f(x,y) \approx df(x,y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \Delta f(x_0, y_0) = \frac{-4\cdot 0{,}03 + 3\cdot 0{,}02}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -0{,}012$$

Следовательно, $\sqrt{(3{,}97)^2 + (3{,}02)^2} \approx 5 - 0{,}012 = 4{,}988$.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x + y - e^{y-x} = 0$.

9.3.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^4-3y^2+2z^3-5xyz+7=0$.

9.3.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sin x\cos y$ в точке $M_0\left(\pi/4,\pi/4,1/2\right)$.

9.3.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $4x^2+9y^2+16z^2=144$ в точке $M_0(3,2,3\sqrt{2}/2)$.

9.3.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков для заданных функций: а) $z=y^3-2x^2y^4+x^4$; б) $z=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$; в) $z=x\ln\frac{y}{x}$.

9.3.6 Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближённо значения числовых выражений: а) $\sqrt{(1,05)^3+(1,96)^3}$; б) $\sin 32^0\cos 59^0$.

9.3.7 При изменении цены на продукцию с 20 до 18 денежных единиц и уменьшении объёмов продаж с 50 до 46 единиц продукции найдите изменение выручки предприятия при условии, что выручка предприятия вычисляется по формуле $Y=p^2v^3$, где p – цена единицы продукции, v – объём продаж.

9.3.8 Производственная деятельность предприятия описывается производственной функцией Кобба-Дугласа $z=5\sqrt{x}\sqrt{y}$. Определите, как изменится объём производства z, если производственные факторы возрастут на 15 % по сравнению с начальными значениями $x_0=4$, $y_0=64$. Найти первоначальный и планируемый объём производства.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Используя понятие полного дифференциала вычислить приближённое значение заданного числового выражения. Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции $z=f(x,y)$, которую надо составить для вычисления значения данного числового выражения. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=f(x,y)$, которая была выбрана для вычисления значения функции, в точке $P_0(x_0,y_0)$.

9.4.1.1	$\sqrt{(2,9)^2+(4,1)^2}$.	**9.4.1.2**	$\sin 28^0\cos 59^0$.	**9.4.1.3**	$\sqrt{(1,1)^3+(1,9)^3}$.
9.4.1.4	$3{,}01^{4,98}$.	**9.4.1.5**	$\ln(1{,}02\cdot 0{,}98)$.	**9.4.1.6**	$e^{1,03^2+2,99^2}$.
9.4.1.7	$\cos 58^0\sin 29^0$.	**9.4.1.8**	$\mathrm{tg}\,44^0\,\mathrm{ctg}\,47^0$.	**9.4.1.9**	$\left(2{,}03\right)^3(3{,}98)^2$.
9.4.1.10	$(3{,}05)^3+(6{,}98)^2$.	**9.4.1.11**	$\sqrt[3]{(0,9)^3+(2,2)^3}$.	**9.4.1.12**	$(5{,}05)^3-(1{,}9)^4$.
9.4.1.13	$\mathrm{arctg}\left(0{,}96\cdot 1{,}02\right)$.	**9.4.1.14**	$4{,}99^{-3,02}$.	**9.4.1.15**	$\mathrm{ch}\,0{,}1\cdot\mathrm{sh}\,0{,}2$.
9.4.1.16	$\sqrt{(6,1)^2+(7,9)^2}$.	**9.4.1.17**	$\sin 32^0\cos 55^0$.	**9.4.1.18**	$\sqrt{(0,8)^3+(1,8)^3}$.
9.4.1.19	$1{,}96^{5,04}$.	**9.4.1.20**	$\ln(1{,}03\cdot 0{,}97)$.	**9.4.1.21**	$e^{1,04^2+2,96^2}$.
9.4.1.22	$\cos 56^0\sin 31^0$.	**9.4.1.23**	$\mathrm{tg}\,43^0\,\mathrm{ctg}\,46^0$.	**9.4.1.24**	$\left(3{,}04\right)^3(5{,}97)^2$.

9.4.1.25 $(4,03)^3+(2,95)^2$. **9.4.1.26** $\sqrt[3]{(0,8)^3+(2,1)^3}$. **9.4.1.27** $(6,2)^4-(2,9)^4$.

9.4.1.28 $\operatorname{arctg}(0,98\cdot 1,01)$. **9.4.1.29** $3,95^{-3,03}$. **9.4.1.30** $\operatorname{ch}0,2\cdot\operatorname{sh}0,1$.

10 ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ (практическое занятие № 10)

Содержание: локальный экстремум функции двух переменных и его экономический смысл, наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 10.1.1 Функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0)$ *локальный максимум* (*локальный минимум*), если существует такая окрестность точки P_0, что для всех точек $P(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(P_0)\geq f(P)$ $\left(f(P_0)\leq f(P)\right)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

Теорема 10.1.1 Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке частные производные равны нулю, то есть $\dfrac{\partial z(P_0)}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial z(P_0)}{\partial y}=0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными*.

Пусть $P_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка функции $z=f(x,y)$, причём эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Введём обозначения:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\ B=f''_{xy}(x_0,y_0),\ C=f''_{yy}(x_0,y_0).$$

Вычисляем определитель $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$. Тогда:

1) если $\Delta>0$, то в точке $P_0(x_0,y_0)$ экстремум, а именно – максимум при значении $A<0\,(C<0)$ и минимум при значении $A>0\,(C>0)$;

2) если $\Delta<0$, то в точке $P_0(x_0,y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования.

Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема и ограничена в замкнутой области, она достигает глобального экстремума (наибольшего и наименьшего значения) либо в стационарных точках, принадлежащих области, либо на границе области.

Рассмотрим **применение локального экстремума в экономике, а именно задачу о прибыли от производства разных видов товаров.**

Пусть x и y – количество товаров двух видов, их цены – соответственно p_1 и p_2. Пусть затраты на производство этих товаров является дифференцируемой функцией издержек $C = C(x, y)$. Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = \Pi(x, y) = p_1 x + p_2 y - C(x, y). \tag{10.1.1}$$

Максимум прибыли будем находить как локальный экстремум функции двух переменных $\Pi = \Pi(x, y)$ при значениях $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Найдём стационарные точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = p_1 - \dfrac{\partial C}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} = p_2 - \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p_1 = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial C}{\partial y}, \tag{10.1.2}$$

где $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ – предельные издержки на производство x единиц продукции первого вида; $\dfrac{\partial C}{\partial y}$ – предельные издержки на производство y единиц продукции второго вида. Формулы (10.1.2) реализуют известное правило экономики: *предельная стоимость товара равна предельным затратам на производство этого товара.*

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка и составляем систему $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Решая полученную систему, находим две стационарные точки $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$. Найдём частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки $M_0(0,0)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, следовательно, в этой точке экстремума нет. Для точки $M_1(1,1)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, следовательно, в этой точке экстремум есть. Так как, $A = 6 > 0$, то в точке M_1 функция достигает минимума, причём $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

10.2.2 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 6 и 9 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x,y)=x^2+xy+y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

Решение. Согласно формуле (10.1.1) прибыль предприятия будет выражаться функцией $\Pi(x,y)=6x+9y-x^2-xy-y^2$. Так как в данном случае частные производные от функции прибыли всегда существуют, то для нахождения стационарных точек получаем систему уравнений: $\Pi'_x=6-2x-y=0$, $\Pi'_y=9-x-2y=0$. Решением этой системы является точка $P_0(1;4)$.

Находим частные производные второго порядка от функции прибыли в стационарной точке: $A=\Pi''_{xx}(1,4)=-2$, $B=\Pi''_{xy}(1,4)=-1$, $C=\Pi'_{yy}(1,4)=-2$.

Так как $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=3>0$ и $A=-2<0$, то найденная точка $P_0(1;4)$ является точкой максимума функции прибыли $\Pi(x,y)$, а максимальная прибыль предприятия равна $\Pi_{\max}=\Pi(1,4)=6\cdot1+9\cdot4-1^2-1\cdot4-4^2=21\,у.е.$

10.2.3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-4x+8y$ в замкнутой области G, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Находим стационарные точки, которые принадлежат области G, из системы: $z'_x=2x+2y-4=0$, $z'_y=2y+8$. Стационарная точка $P_0(6,-4)\notin G$. Исследуем функцию на границе области.

На границе области G, заданной прямой $x=0$, функция z принимает вид $z=8y$, причём $y\in[0,6]$. $z'=8\neq0$, $z(0,6)=8\cdot6=48$, $z(0,0)=8\cdot0=0$.

На границе области G, заданной прямой $y=0$, функция z принимает вид $z=x^2-4x$, причём $x\in[0,6]$. $z'=2x-4=0$, $x=2\in[0,6]$, $z(2,0)=2^2-4\cdot2=-4$, $z(0,0)=0^2-4\cdot0=0$, $z(6,0)=6^2-4\cdot6=12$.

На границе области G, заданной прямой $y=6-x$, функция z принимает вид $z=-x^2+48$, причём $x\in[0,6]$. $z'=-2x=0$, $x=0\in[0,6]$, $z(0,6)=-0^2+48=48$, $z(6,0)=-6^2+48=12$.

Среди полученных значений функции z выбираем наибольшее и наименьшее значения: $\max\limits_G z=z(0,6)=48$, $\min\limits_G z=z(2,0)=-4$.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+3xy^2-111x-36y$.

10.3.2 Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-x\sqrt{y}-9x+y+5$.

10.3.3 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 140 и 200 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описывается функцией $C(x,y)=3x^2+4xy+4y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

10.3.4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в замкнутой области G, ограниченной прямыми $x=3$, $y=0$, $y-x=1$.

10.3.5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в замкнутой области G, ограниченной прямой $y=2$ и параболой $2y=x^2$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны m и n условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x,y)$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=C(x,y)$ в замкнутой области G, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $mx+ny=mn$.

10.4.1.1 $C(x,y)=x^2-5xy+9y^2, m=10, n=30$.

10.4.1.2 $C(x,y)=2x^2+xy+3y^2, m=50, n=80$.

10.4.1.3 $C(x,y)=4x^2-2xy+2y^2, m=20, n=100$.

10.4.1.4 $C(x,y)=5x^2+3xy+y^2, m=220, n=110$.

10.4.1.5 $C(x,y)=x^2-3xy+7y^2, m=50, n=20$.

10.4.1.6 $C(x,y)=6x^2+2xy+y^2, m=220, n=120$.

10.4.1.7 $C(x,y)=2x^2-5xy+13y^2, m=250, n=10$.

10.4.1.8 $C(x,y)=3x^2+4xy+3y^2, m=32, n=38$.

10.4.1.9 $C(x,y)=9x^2-5xy+4y^2, m=34, n=17$.

10.4.1.10 $C(x,y)=x^2+2xy+y^2, m=28, n=46$.

10.4.1.11 $C(x,y)=8x^2-3xy+5y^2, m=18, n=64$.

10.4.1.12 $C(x,y)=x^2+2xy+3y^2, m=16, n=28$.

10.4.1.13 $C(x,y)=7x^2-3xy+4y^2, m=60, n=46$.

10.4.1.14 $C(x,y)=8x^2+2xy+2y^2, m=40, n=20$.

10.4.1.15 $C(x,y)=2x^2-7xy+9y^2, m=2, n=6$.

10.4.1.16 $C(x,y)=6x^2+5xy+3y^2, m=170, n=110$.

10.4.1.17 $C(x,y)=4x^2-3xy+9y^2, m=12, n=126$.

10.4.1.18 $C(x,y)=3x^2+xy+3y^2, m=130, n=80$.

10.4.1.19 $C(x,y)=5x^2-5xy+3y^2, m=5, n=22$.

10.4.1.20 $C(x,y)=4x^2+2xy+7y^2, m=180, n=180$.

10.4.1.21 $C(x,y)=9x^2-4xy+2y^2, m=32, n=4$.

10.4.1.22 $C(x,y)=8x^2+6xy+3y^2, m=440, n=240$.

10.4.1.23 $C(x,y)=2x^2-7xy+8y^2, m=10, n=20$.

10.4.1.24 $C(x,y)=6x^2+2xy+5y^2, m=380, n=160$.

10.4.1.25 $C(x,y)=3x^2-6xy+7y^2, m=6, n=26$.

10.4.1.26 $C(x,y)=7x^2+4xy+5y^2, m=74, n=92$.

10.4.1.27 $C(x,y)=x^2-3xy+8y^2, m=4, n=17$.

10.4.1.28 $C(x,y)=3x^2+xy+y^2, m=75, n=40$.

10.4.1.29 $C(x,y)=4x^2-xy+8y^2, m=30, n=155$.

10.4.1.30 $C(x,y)=x^2+xy+y^2, m=110, n=130$.

11 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (практическое занятие № 11)

Содержание: комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи, основная теорема алгебры.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Комплексным числом в алгебраической форме называется число вида $z=x+iy$, где $x, y\in R$, а $i=\sqrt{-1}$ – *мнимая единица*, причём $i^2=-1$. Число $x=\operatorname{Re}z$ называется *действительной частью* комплексного числа $z=x+iy$, а число $y=\operatorname{Im}z$ – мнимой частью этого числа. Множество комплексных чисел обозначается буквой **C**. На комплексной плоскости по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимая часть этого числа. Так, например, на комплексной плоскости мнимой единице будет соответствовать точка с координатами $(0,1)$.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$ называются сопряжёнными. Если $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1\pm z_2=\left(x_1+iy_1\right)\pm\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1\pm x_2\right)+\left(y_1\pm y_2\right)i;$$

$$z_1\cdot z_2=\left(x_1+iy_1\right)\cdot\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+\left(x_1y_2\pm x_2y_1\right)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

Пусть дано комплексное число $z = x + iy$ в алгебраической форме. На комплексной плоскости ему будет соответствовать точка $M(x, y)$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.

Число $r = |z| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ называется *модулем комплексного числа* $z = x + iy$. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси абсцисс, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Для любого комплексного числа справедливы формулы:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = x/r, \sin\varphi = y/r, \qquad (11.1.1)$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \le \arg z < 2\pi$ или $-\pi < \arg z \le \pi$.

Любое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (11.1.2)$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число может быть представлено в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (11.1.3)$$

Если $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_2 e^{i\varphi_2}$, то справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = r_1 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad (11.1.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad (11.1.5)$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \qquad (11.1.6)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = \overline{0; n-1}. \qquad (11.1.7)$$

Формула (11.1.6) называется *формулой Муавра*. Для нахождения корня n-ой степени из комплексного числа используется формула (11.1.7), дающая n значений этого корня, при этом под корнем $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.

Многочленом n-ой степени называется функция вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad (11.1.8)$$

где $z \in C$, $a_0 \ne 0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты многочлена, вообще говоря, комплексные, $n \in N$. Уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \ a_0 \ne 0 \qquad (11.1.9)$$

называется алгебраическим уравнением n-ой степени. Число z_0, для которого $P_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (11.1.8) или уравнения (11.1.9).

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень (вообще говоря, комплексный).

Если учесть кратность корней, основная теорема алгебры может быть уточнена следующим образом: *многочлен n-ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность*.

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Даны комплексные числа $z_1 = 4-3i$ и $z_1 = 4-3i$ $z_2 = 2+5i$. Найти z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, z_2^2, z_1^3, $\overline{z}_1/z_2$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1+z_2=(4-3i)+(2+5i)=(4+2)+(-3+5)i=6+2i,$$

$$z_1\cdot z_2=(4-3i)\cdot(2+5i)=8-6i+20i-15i^2=8+14i+15=23+14i,$$

$$z_2^2=\left(2+5i\right)^2=4+20i+25i^2=4+20i-25=-21+20i,$$

$$z_1^3=\left(4-3i\right)^3=64-144i+108i^2-27i^3=64-144i-108+27i=-44-117i,$$

$$\frac{\overline{z}_1}{z_2}=\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{\left(4+3i\right)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)}=\frac{8+6i-20i-15i^2}{4-25i^2}=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i.$$

11.2.2 Данные числа $z_1=\sqrt{3}-i$ и $z_2=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ представить в тригонометрической и показательной форме записи комплексных чисел. Выполнить указанные действия над ними: $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^{10}, $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Представим указанные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Для числа $z_1=\sqrt{3}-i$, по формулам (11.1.1), находим модуль и аргумент комплексного числа. Модуль числа равен $|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$, а аргумент определяем из системы: $\cos\varphi_1=\sqrt{3}/2$, $\sin\varphi_1=-1/2$, то есть $\varphi_1=11\pi/6$. По формулам (11.1.2) и (11.1.3) получаем необходимые записи числа $z_1=\sqrt{3}-i$: $z_1=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=2e^{\frac{11\pi}{6}i}$. Аналогично, $z_2=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=6e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Для нахождения $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^{10}, $\sqrt[3]{z_2}$ воспользуемся формулами (11.1.4) – (11.1.7):

$$z_1z_2=2\cdot6\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=12\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=12e^{\frac{7\pi}{12}i},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{6}\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}e^{\frac{13\pi}{12}i},$$

$$z_1^{10}=2^{10}\cdot\left(\cos\left(10\cdot\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{11\pi}{6}\right)\right)=1024\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1024e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}i},\ k = 0, 1, 2.$$

В частном случае, если значение $k = 0$, то $\omega_0 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Если же значение $k = 1$, то $\omega_1 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{11\pi}{12}i}$. Если $k = 2$, то $\omega_2 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

11.2.3 Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Решение. $D = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$.

11.2.4 Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = \left(z^3 + 1\right)^2$, то корнями этого многочлена являются корни третьей степени из числа $-1 = 1\cdot\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$: $\omega_1 = -1$, $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение многочлена на линейные множители имеет вид: $z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$.

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме: а) $(2-4i)\cdot(5+3i)+7i$; б) $(6+i)\cdot(3-7i)-2i$; в) $(3-2i)^2+(1+i)^2$; г) $(3-i)^3+(3+i)^3$; д) $(i-3i^2)^2+(4i^3+i^2)^2$; е) $\dfrac{2-i}{3+i}$; ж) $\dfrac{1}{5-i}+\dfrac{1}{1+5i}$; з) $\left(\dfrac{i^7+3}{i^{19}+2}\right)^2$.

11.3.2 Найти действительные решения уравнения:

$$12\big((2x+1)\cdot(1+i)+(x+y)\cdot(3-2i)\big) = 17+6i.$$

11.3.3 Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2 = 1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2 = 7.\end{cases}$$

11.3.4 Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

а) $-i$; б) $\sqrt{3}-i$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ в) $2-2\sqrt{3}i$; г) $\sin\dfrac{\pi}{12}+i\cos\dfrac{\pi}{12}$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Записать числа в показательной форме.

11.3.5 Найти $z_1\cdot z_2$, z_2/z_1, z_1^8, $\sqrt[4]{z_2}$, если $z_1=2\left(\cos\pi/12+i\sin\pi/12\right)$, $z_1=16\left(\cos 23\pi/12+i\sin 23\pi/12\right)$.

11.3.6 Найти $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^{12}, $\sqrt[5]{z_2}$, если $z_1=4e^{\frac{5\pi}{12}i}$, $z_1=32e^{\frac{\pi}{3}i}$.

11.3.7 Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

11.3.8 Найти решения уравнений: а) $z^2-2z+5=0$; б) $4z^2+2z+1=0$; в) $z^2+(5-2i)z+5-5i=0$; г) $z^4+5z^2+4=0$; д) $z^3+64=0$; е) $z^6+729=0$.

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

11.4.1 Заданы два комплексных числа $z_1=\sin\alpha+i\cos\alpha$ и $z_1=\sin\beta-i\cos\beta$, где $\alpha=n\pi/6$, $\beta=n\pi/4$, n – номер варианта, причём $\alpha,\beta\in\left(0;2\pi\right]$. Если значения углов α β превышают угол 2π, то из полученных значений α и β исключить угол, кратный 2π, и принять полученные значения за значения углов α и β. Представить полученные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. При записи комплексных чисел в алгебраической форме найти $z_1z_2,\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^3, z_2^2. При записи комплексных чисел в тригонометрической форме найти $z_1z_2^2,\dfrac{z_1^3}{z_2}$, z_1^{10}, z_2^8. При записи комплексных чисел в показательной форме найти $z_1^2z_2,\dfrac{z_1}{z_2^2}$, z_1^7, z_2^9. Решить квадратное уравнение $z^2-2nz+(n^2+1)=0$. Решить кубическое уравнение $\omega^3+(-1)^n z_1=0$.

12 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (практическое занятие № 12)

Содержание: дифференциальные уравнения (общие понятия), дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия), дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 12.1.1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

$F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ – общий вид дифференциального уравнения n-го порядка.

$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)$ – нормальный вид дифференциального уравнения n-го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения, а функция $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ – общим интегралом дифференциального уравнения, где $C_i=Const,\ i=\overline{1,n}$.

Теорема 12.1.1 (Коши). Если функция $f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)$ и её частные производные по аргументам $y,y',y'',...,y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в окрестности точки $\left(x_0,y_0,y_0',y_0'',...,y_0^{(n-1)}\right)$, то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения $y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (12.1.1)$$

Условия (12.1.1) называются начальными условиями, а задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего этим условиям, задачей Коши для дифференциального уравнения.

Рассмотрим *дифференциальные уравнения первого порядка.*

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $F(x,y,y')=0$.

Нормальный вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $y'=f(x,y)$.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка: $y=\varphi(x,C)$.

Общий интеграл дифференциального уравнения 1-го порядка: $\Phi(x,y,y')=0$.

Теорема 12.1.2 (Коши). Если функция $f(x,y)$ и её частная производная $f_y'(x,y)$ определены и непрерывны в окрестности точки (x_0,y_0), то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую точку (x_0,y_0) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений первого порядка. Найдём общие решения основных типов этих уравнений.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 12.1.2 Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (12.1.2)$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ – заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Если $N_1(y) \neq 0$ и $M_2(x), \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (12.1.2) на произведение $N_1(y)M_2(x)$, получим равносильное уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (12.1.3)$$

Уравнение (12.1.3) называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*.

Проинтегрировав уравнение (12.1.3), находим общий интеграл дифференциального уравнения (12.1.2):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \qquad (12.1.4)$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 12.1.3 Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией измерения α относительно переменных x и y, если справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y), \ \forall t \in R, t \neq 0.$$

Определение 12.1.4 Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (12.1.5)$$

называется *однородным*, если $P(x, y), Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Разрешив уравнение (12.1.5) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \qquad (12.1.6)$$

Поскольку $P(x, y), Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения, то функция, стоящая в правой части уравнения (12.1.6), является однородной функцией нулевого измерения. Следовательно, $\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Таким образом, однородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (12.1.7)$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $\dfrac{y}{x} = u$. Тогда $y' = u'x + u$, а уравнение (12.1.7) принимает вид $u'x + u = f(u)$. Общий интеграл уравнения (12.1.7): $\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} - \ln|x| = C$. Выполнив обратную замену, находим общий интеграл первоначального уравнения.

В **экономических исследованиях** часто требуется установить связь между некоторыми переменными величинами, а также скоростями их изменения. Моделирование таких задач приводит к дифференциальным уравнениям. Например, задача о спросе и цене товара или задача о полных и средних издержках производства.

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Найти общий интеграл уравнения $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Полагая $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$. Интегрируем: $\int \operatorname{ctg} y\, dy = \int \operatorname{tg} x\, dx$, или $\ln|\sin x| = -\ln|\cos x| + \ln C$. В данном случае постоянную интегрирования удобнее обозначить через $\ln C$. Из последнего равенства находим: $\sin y = C/\cos x$, или $\sin y \cos x = C$ – общий интеграл заданного уравнения.

12.2.2 Найти частное решение уравнения $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, если $y(1) = \pi/2$.

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением. Сделаем подстановку $y/x = z$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Приходим к уравнению с разделяющимися переменными $xz' = \sin z$. Разделяем переменные: $\dfrac{dz}{\sin z} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$, откуда $z = 2\operatorname{arctg} Cx$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$.

Подставляем заданные начальные условия: $\pi/2 = 2\operatorname{arctg} C$, откуда $C = 1$. Искомым частным решением будет функция $y = 2x \operatorname{arctg} x$.

12.2.3 (Спрос и цена товара.) Найти функцию спроса $s = s(p)$ относительно цены p, если известна эластичность $E_p(s) = f(p)$.

Решение. По определению эластичности, $E_p(s) = f(p) = -\dfrac{p}{s}\dfrac{ds}{dp}$. Приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными: $\dfrac{ds}{s} = -\dfrac{f(p)}{p}dp$. Его решение $s = Ce^{-\int \frac{f(p)}{p}dp}$ и является функцией спроса.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Найти общий интеграл уравнения $\ln\cos y\, dx + x \operatorname{tg} y\, dy = 0$.

12.3.2 Найти частный интеграл уравнения $yy' + xe^y = 0$, если $y(0) = \pi/4$.

12.3.3 Найти общее решение уравнения $\left(x^2 + y^2\right)dx - xy\, dy = 0$.

12.3.4 Найти частное решение уравнения $xy' = y + xe^{y/x}$, если $y(1) = 0$.

12.3.5 Найти функцию спроса $s = s(p)$ относительно цены p, если известна эластичность $E_p(s) = 10/(p+10)$. Известно, что при цене 5 д. е. спрос в определённый промежуток времени составил одну у. е.

12.3.6 Найти функцию спроса $s = s(q)$ относительно дохода q, если известна эластичность $E_q(s) = 2q/(2q+3)$.

12.3.7 Цена товара вначале составляла 36 д. е., а через t дней – $p(t)$. Спрос и предложение определяются уравнениями $s = 120 - 2p + 5p'_t$ и $r = -30 + 3p + 50p'_t$, соответственно. Найти закон изменения цены товара, при котором для каждого значения t сохраняется равновесие.

12.3.8 Полные издержки $C = C(v)$ есть функция объёма производства v. Найдите функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений v равны средним издержкам.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

12.4.1.1 $(x^2 - y^2)\,dy = 2\cdot x\cdot y\,dx$.

12.4.1.2 $y\cdot(\ln y - \ln x)\,dx - x\,dy = 0$.

12.4.1.3 $(x\cdot y' - y)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$.

12.4.1.4 $\dfrac{x}{y}\,dy = \dfrac{x}{y}\cdot e^{\frac{y}{x}}\,dx + dx$.

12.4.1.5 $\left(y + x\right)dy = (y - x)\,dx$.

12.4.1.6 $x\,dy = y\cdot\left(1 - \ln x + \ln y\right)dx$.

12.4.1.7 $x\cdot y' = x\cdot\cos\dfrac{y}{x} + y$.

12.4.1.8 $x\,dy = \left(y + x\cdot\sin\dfrac{y}{x}\right)dx$.

12.4.1.9 $y' = (x+y)/(x-y)$.

12.4.1.10 $y = x\cdot(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

12.4.1.11 $x\cdot y + y^2 = (2\cdot x^2 + x\cdot y)\cdot y'$.

12.4.1.12 $\left(2\cdot\sqrt{x\cdot y} - y\right)dx + x\,dy = 0$.

12.4.1.13 $x\cdot y' + y\cdot\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$.

12.4.1.14 $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2\cdot x\cdot y\,dy = 0$.

12.4.1.15 $\left(y^2 - 2\cdot x\cdot y\right)dx - x^2\,dy = 0$.

12.4.1.16 $\left(x^2 - y^2\right)dx + 2\cdot x\cdot y\,dy = 0$.

12.4.1.17 $\left(x + 2\cdot y\right)dx + x\,dy = 0$.

12.4.1.18 $\left(2\cdot x - y\right)dx + (x+y)\,dy = 0$.

12.4.1.19 $2\cdot x^3\cdot y' = y\cdot(2\cdot x^2 - y^2)$.

12.4.1.20 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

12.4.1.21 $x\,dy = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx + y\,dx$.

12.4.1.22 $x\,dy = y\,dx + x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}\,dx$.

12.4.1.23 $x\cdot y' = y + 2\cdot\sqrt{y^2 + 9\cdot x^2}$.

12.4.1.24 $x^2\,dy = x\cdot y\,dx + y^2\cdot e^{-x/y}\,dx$.

12.4.1.25 $xyy' = y^2 + 2x^2$.

12.4.1.26 $2\cdot x^2\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$.

12.4.1.27 $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

12.4.1.28 $\left(2\sqrt{x\cdot y} - y\right)dx + x\,dy = 0$.

12.4.1.29 $\left(y+\sqrt{x\cdot y}\right)dx = x\,dy$. **12.4.1.30** $\sqrt{y^2+x^2}\,dx = y\,dx - x\,dy$.

13 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (практическое занятие № 13)

Содержание: линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах.

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

На этом практическом занятии рассмотрим ещё три типа дифференциальных уравнений первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 13.1.1 Уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{13.1.1}$$

где $P(x),\ Q(x)$ – заданные функции, которые являются линейными относительно неизвестной функции y и её производной, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если $Q(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Существуют различные методы решения линейных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение (13.1.1). Записываем соответствующее однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$. Разделяя переменные в однородном уравнении, находим его общее решение $y = C\cdot e^{-\int P(x)dx}$, где C – произвольная постоянная.

Общее решение неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения по методу Лагранжа, варьируя произвольную постоянную, то есть, полагая $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)$ – некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от переменной x. Для нахождения $C(x)$ подставляем функцию y в исходное уравнение (13.1.1), что приводит к уравнению $C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$. Отсюда $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$, где C – произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение неоднородного линейного уравнения будет иметь вид

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{13.1.2}$$

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать также методом Бернулли, который заключается в следующем. Полагая $y = uv$, где

$u = u(x)$ и $v = v(x)$ две неизвестные функции, преобразуем исходное уравнение к виду

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \qquad (13.1.3)$$

или

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x). \qquad (13.1.4)$$

Функцию $v = v(x)$ находим как частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Разделяя переменные в уравнении, находим функцию $v = e^{-\int P(x)dx}$. Уравнение (13.1.4) приводится к уравнению $u'v = Q(x)$ или $u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, из которого находим функцию $u = u(x)$: $u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$. Умножая u на v, находим для решения уравнения (13.1.1) прежнее выражение:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Определение 13.1.2 Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \qquad (13.1.5)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно преобразовать в линейное уравнение, выполнив замену неизвестной функции при помощи замены $z = y^{1-\alpha}$, которая преобразует исходное уравнение в уравнение $\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x)$.

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не обязательно преобразовывать в линейное уравнение, а сразу можно применять либо метод вариации произвольной постоянной, либо метод Бернулли.

Определение 13.1.3 Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (13.1.6)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Теорема 13.1.1 Уравнение (13.1.6) с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (13.1.7)$$

Общий интеграл уравнения (13.1.6) находится по одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C, \qquad (13.1.8)$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C, \qquad (13.1.9)$$

где точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти частное решение уравнения $y' - y\,\text{th}\,x = \text{ch}^2 x$, если $y(0) = 1$.

Решение. Задано линейное уравнение. Решим его по методу Бернулли. Положим $y = uv$. Тогда $u'v + v'u - uv\,\text{th}\,x = \text{ch}^2 x$ или $u'v + u(v' - v\,\text{th}\,x) = \text{ch}^2 x$. Полагаем $v' - v\,\text{th}\,x = 0$, откуда $\frac{dv}{v} = \text{th}\,x\,dx$; интегрируя, находим: $\ln|v| = \ln|\text{ch}\,x|$, или $v = \text{ch}\,x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как нам достаточно найти какое-либо решение этого вспомогательного уравнения).

Для определения u решим уравнение $u'v = \text{ch}^2 x$ или $u'\,\text{ch}\,x = \text{ch}^2 x$. Откуда находим $u = \int \text{ch}\,x\,dx + C = \text{sh}\,x + C$. Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $y = \text{ch}\,x(\text{sh}\,x + C)$. По начальному условию $y(0) = 1$ находим произвольную постоянную C: $1 = \text{ch}\,0(\text{sh}\,0 + C)$, откуда $C = 1$. Следовательно, искомое частное решение $y = \text{ch}\,x(\text{sh}\,x + 1)$.

13.2.2 Найти общее решение уравнения $y' - y/x = x$.

Решение. Задано линейное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Интегрируем соответствующее однородное уравнение $\bar{y}' - \frac{\bar{y}}{x} = 0$, разделив переменные $\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} - \frac{dx}{x} = 0$, $\ln|\bar{y}| - \ln|x| = \ln C$, $\bar{y} = Cx$. Найдём решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)x$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Внося в исходное уравнение $y = C(x)x$ и $y' = C'(x)x + C(x)$, придём к уравнению $C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x$ или $C'(x) = 1$, откуда $C(x) = x + C$. Таким образом, общим решением исходного уравнения будет функция $y = x^2 + Cx$.

13.2.3 Найти общее решение уравнения $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y}\,\text{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Задано уравнение Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = uv$. Подставляя в исходное уравнение $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = \frac{4\sqrt{uv}\,\text{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения $v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0$. Разделяя в нём переменные, находим: $\frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$, откуда $\ln|v| = \ln\left(1+x^2\right)$ или $v = 1+x^2$. Для нахождения u имеем уравнение $u'v = \frac{4\sqrt{uv}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$, или (поскольку $v = 1+x^2$) $u'v = \frac{4\sqrt{u}\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}, \quad \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}, \quad \sqrt{u} = \mathrm{arctg}^2\,x + C, \quad u = \left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2.$$

Таким образом, $y = \left(1+x^2\right)\left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2$ – общее решение уравнения.

13.2.4 Найти общий интеграл уравнения $(x+y-1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

Решение. Здесь $P(x,y) = x+y-1$, $Q(x,y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, таким образом, условие полного дифференциала выполнено, то есть данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдём общий интеграл по формуле (13.1.9), положив в ней $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C_0, \quad \left.\left(\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right)\right|_0^x + \left.e^y\right|_0^y = C_0.$$

Подставляя пределы интегрирования, находим общий интеграл уравнения $x^2/2 + xy - x + e^x = C$, где $C = C_0 + 1$.

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти общее решение уравнения $xy' - y = x^2 \cos x$.

13.3.2 Найти общее решение уравнения $y' \cos x + y = 1 - \sin x$.

13.3.3 Найти частное решение уравнения $y' - \frac{4y}{x} = \frac{6}{x^4}$, если $y(1) = 0$.

13.3.4 Найти общее решение уравнения $y' = \frac{y}{y^4 + 2x}$.

13.3.5 Найти общее решение уравнения $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

13.3.6 Найти частное решение уравнения $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$, если $y(0) = \frac{9}{4}$.

13.3.7 Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + \sin y)dx + (x\cos y + 1)dy = 0$.

13.3.8 Найти частный интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(0) = 2$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

13.4.1.1	$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x$.	**13.4.1.2**	$\left(x+1\right)y' + y = x^2$.
13.4.1.3	$y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x$.	**13.4.1.4**	$y'\cos x = y\sin x + \cos^2 x$.
13.4.1.5	$y'\cdot\sin x - y\cdot\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.	**13.4.1.6**	$y' + \dfrac{x\cdot y}{1-x^2} = x + \arcsin x$.
13.4.1.7	$y' - y\cdot\mathrm{tg}x = 4\cdot x^3\cdot\sec x$.	**13.4.1.8**	$x\cdot y' + y - 3\cdot\sin x = 0$.
13.4.1.9	$xy' + y - 2x^2 = 0$.	**13.4.1.10**	$y' + y\cdot\cos x = e^{-\sin x}$.
13.4.1.11	$x\cdot y' - 2\cdot y + x^2 = 0$.	**13.4.1.12**	$\left(x+1\right)\cdot y' + y = x^3 + x^2$.
13.4.1.13	$\left(x^2-1\right)\cdot y' - x\cdot y = x^3 - x$.	**13.4.1.14**	$x\cdot y' + y = \sin x$.
13.4.1.15	$y'\cdot\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\cdot\mathrm{ctg}x$.	**13.4.1.16**	$(1-x^2)\cdot y' + x\cdot y = 1$.
13.4.1.17	$y' - 2\cdot x\cdot y = x\cdot e^{-x^2}$.	**13.4.1.18**	$x^2\cdot y' = 2\cdot x\cdot y + 3$.
13.4.1.19	$x\cdot y' + y = \ln x + 1$.	**13.4.1.20**	$y' - 3\cdot x^2\cdot y - x^2\cdot e^{x^3} = 0$.
13.4.1.21	$(1+x^2)y' - 2xy = 3x^2(1+x^2)^2$.	**13.4.1.22**	$y' - y\cdot\mathrm{tg}x = \sec x$.
13.4.1.23	$y' = 2\cdot y\cdot\sin^2 x + 2\cdot x\cdot e^{x-\frac{1}{2}x^2}$.	**13.4.1.24**	$\sin 2x\,dy = 2\cdot(y+\cos x)\,dx$.
13.4.1.25	$x\cdot y' + y - e^x = 0$.	**13.4.1.26**	$x\cdot(x-1)\cdot y' + y = x^2\cdot(2x-1)$.
13.4.1.27	$y' + 2\cdot y\cdot\mathrm{tg}x = x\cdot\cos^3 x$.	**13.4.1.28**	$y' - 2\cdot y\cdot\mathrm{ctg}x = \sin^3 x$.
13.4.1.29	$x\cdot y' - y + \ln x = 0$.	**13.4.1.30**	$y' - y\cdot\cos x = -\sin 2x$.

14 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(практическое занятие № 14)

Содержание: дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.

14.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков значительно сложнее задачи решения дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений этого типа формулируется также, как и для любых уравнений высшего порядка.

1. *Уравнение типа* $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение (n –1)-го порядка: $y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + \bar{C}_1$. Повторяя эту операцию, приходим к уравнению (n –2)-го порядка:

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx=\int\left(\varphi_1(x)+C_1\right)dx=\varphi_2(x)+\bar{C}_1x+\bar{C}_2.$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения:

$$y=\varphi_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n,$$

где $C_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ – произвольные постоянные величины, связанные определённым образом с произвольными постоянными значениями $\bar{C}_i$.

2. *Уравнение типа* $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$, не содержащее явно искомую функцию y и её производные до (k –1)-го порядка включительно $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Порядок такого дифференциального уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию наименьшую из производных данного уравнения, то есть, положив $y^{(k)}=z$. Тогда получим уравнение $F\left(x,z,z',...,z^{(n-k)}\right)=0$. Таким образом, порядок уравнения понизили на «k» единиц. Если удастся найти общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $z=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)$, то приходим к дифференциальному уравнению высшего порядка, допускающего понижение порядка, первого типа: $z=y^{(k)}=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)$, решение которого находим k-кратным интегрированием. В частности, если $n=2,k=1$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3. *Уравнение типа* $F\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$, не содержащее явно независимую переменную x.

Порядок этого дифференциального уравнения можно понизить, если выполнить замену $y'=p(y)$, где y рассматривается как аргумент функции y'. В этом случае $y'',y''',...$, по правилам дифференцирования сложной функции, выразятся по формулам

$$y''=p\frac{dp}{dy},\ y'''=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и так далее. В итоге вместо исходного уравнения получаем уравнение вида

$$F_1\left(y,p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2}...,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Если последнее уравнение имеет общее решение $p=\varphi\left(y,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)$, где $p=\dfrac{dy}{dx}$, то для нахождения общего интеграла исходного уравнения необходимо разделить переменные в уравнении и решить его

$$\int\frac{dy}{\varphi\left(y,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)}=\int dx \text{ или } \Phi\left(y,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)=x+C_n.$$

В частности, если $n=2$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Найти частное решение уравнения $y'''=24x-16\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=3$, $y'(0)=8$, $y''(0)=6$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению первого типа. Найдём его решение путём трёхкратного интегрирования. Интегрируем уравнение: $y''=\int(24x-16\cos 2x)\,dx+C_1=12x^2-8\sin 2x+C_1$. Используя начальное условие $y''(0)=6$, получаем, что $C_1=6$, а, следовательно, $y''=12x^2-8\sin 2x+6$. Интегрируем полученное дифференциальное уравнение: $y'=\int(12x^2-8\sin 2x+6)\,dx=4x^3+4\cos 2x+6x+C_2$. Используя начальное условие $y'(0)=8$, получаем, что $C_2=4$, а, следовательно, $y'=4x^3+4\cos 2x+6x+4$. Интегрируем полученное уравнение: $y=\int(4x^3+4\cos 2x+6x+4)\,dx+C_3=$ $y=x^4+2\sin 2x+3x^2+4x+C_3$. Используя начальное условие $y(0)=3$, получаем, что $C_3=3$, а, следовательно, $y=x^4+2\sin 2x+3x^2+4x+3$ – частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

14.2.2 Найти общее решение уравнения $y''=y'/x$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению второго типа. Сделаем замену $y'=z$, тогда $y''=z'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z'=z/x$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Записав это уравнение в дифференциальной форме и разделив переменные, получаем равносильное уравнение $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{dx}{x}$. Интегрируем последнее уравнение: $\int\dfrac{dz}{z}=\int\dfrac{dx}{x}+\ln C_1$, $\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1$, $z=C_1x$. Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'=C_1x$. Из него находим общее решение исходного уравнения: $y=\int C_1x\,dx=C_1x^2/2+C_2$.

14.2.3 Найти общее решение уравнения $y''=\dfrac{y'^2}{y}$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению третьего типа. Выполнив замену $y'=p(y)$, с учётом того, что $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{y}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $p=0$ и $\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}$. Первое уравнение, после обратной замены, принимает вид $y'=0$, а его решение $y=C$. Разделив переменные во втором уравнении $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$, и интегрируя его, находим решение уравнения: $p=C_1y$. Учитывая, что $p=y'$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y'=C_1y$ или $\frac{dy}{y}=C_1\,dx$. Интегрируем последнее уравнение: $\int\frac{dy}{y}=C_1\int dx+\ln C_2$, $\ln|y|=C_1x+\ln C_2$, $y=C_2e^{C_1x}$. Функции $y=C$ и $y=C_2e^{C_1x}$ являются общими решениями исходного уравнения.

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Найти общее решение уравнения $y'''\sin^4 x=\sin 2x$.

14.3.2 Найти частное решение уравнения $y'''=xe^{-x}$, при заданных начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

14.3.3 Найти частное решение уравнения $y^{\mathrm{IV}}=\cos^2 x$, при заданных начальных условиях $y(0)=1/32$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$.

14.3.4 Найти общее решение уравнения $(1-x^2)y''-xy'=2$.

14.3.5 Найти частное решение уравнения $(x-1)y''-y'=x(x-1)^2$, при заданных начальных условиях $y(2)=1$, $y'(2)=-1$.

14.3.6 Найти общее решение уравнения $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

14.3.7 Найти частное решение уравнения $yy''-y'^2=0$, при заданных начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

14.4.1.1 $xy''=y'\ln\left(y'/x\right)$.

14.4.1.2 $xy''+y'=\ln\left(y'/x\right)$.

14.4.1.3 $y''tgx-y'=1$.

14.4.1.4 $xy''-y'=x^2e^x$.

14.4.1.5 $x^2y''+xy'=1$.

14.4.1.6 $x^3y''+x^2y'=1$.

14.4.1.7 $xy'''+y''=1/\sqrt{x}$.

14.4.1.8 $xy''+y'=\ln x$.

14.4.1.9 $y''\ln x-y'/x=0$.

14.4.1.10 $xy'''-2y''=-2/x^2$.

14.4.1.11 $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$.

14.4.1.12 $x^4y''+x^3y'=4$.

14.4.1.13 $(x+1)y'''+y''=(x+1)$.

14.4.1.14 $xy'''+y''=\sqrt{x}$.

14.4.1.15 $y''-2y'ctgx=\sin^3 x$.

14.4.1.16 $y'''+y''/x=1/\sqrt{x^5}$.

14.4.1.17 $(x^2+1)y''+2xy'=x^3$.

14.4.1.18 $xy'''-y''+1/x=0$.

14.4.1.19 $y''-y'/(x-1)=x^2-x$.

14.4.1.20 $2xy'y''-y'^2=1$.

14.4.1.21 $y''+2xy'/(x^2+1)=2x$.

14.4.1.22 $xy'''-y''=0$.

14.4.1.23 $(1+x^2)y''-2xy'=0$.

14.4.1.24 $xy''-y'=x^2$.

14.4.1.25 $y''(e^x+1)+y'=0$.

14.4.1.26 $y''+y'=\sin x$.

14.4.1.27 $xy''+xy'^2-y'=0$.

14.4.1.28 $y''-y'/x=x^2/y'$.

14.4.1.29 $y''+y'tgx=\sin 2x$.

14.4.1.30 $y''=y'+x$.

15 ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА
(практическое занятие № 15)

Содержание: линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами, решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка методом вариации произвольной постоянной.

15.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 15.1.1 *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (15.1.1)$$

где $a_i, i=\overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0\neq 0$.

Определение 15.1.2 Система функций $y_i(x), i=\overline{1,n}$ называется *линейно зависимой* на интервале I, если существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, что для всех $x\in I$ линейная комбинация функций равна нулю, то есть выполняется равенство $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=0$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах, то система функций называется *линейно независимой*.

Определение 15.1.3 Любая совокупность n линейно независимых решений линейного однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 15.1.1 *Общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Таким образом, если $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения, то общее решение уравнения (15.1.1) имеет вид

$$y_{o.o}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x), \qquad (15.1.2)$$

где $C_1,C_2,...,C_n$ – произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами составляем *характеристическое уравнение*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (15.1.3)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – корни характеристического уравнения. Тогда

1) каждому действительному однократному корню λ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будет соответствовать функция

$$y = e^{\lambda x};$$

2) каждому действительному корню λ кратности k в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x},\ \ ...,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x};$$

3) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

4) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Приведём схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем характеристическое уравнение (15.1.3).
2. Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
3. В зависимости от характера корней записываем фундаментальную систему решений.
4. Подставляя фундаментальную систему решений в формулу (15.1.2), получаем общее решение уравнения (15.1.1).

Определение 15.1.4 *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (15.1.4)$$

где $a_i, i = \overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$ и $f(x) \neq 0$.

Предположим, что известно общее решение (15.1.2) соответствующего однородного уравнения (15.1.1).

Теорема 15.1.2 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнением n-го порядка (15.1.4) равно сумме соответствующего однородного уравнения (15.1.1) и произвольного частного решения неоднородного дифференциального уравнения, то есть

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}. \qquad (15.1.5)$$

Существует несколько методов определения частного решения неоднородного дифференциального уравнения. Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Предположим, что известно общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{о.о} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$. Согласно методу Лагранжа, частное решение всегда представимо в виде

$$y_{ч.н} = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + ... + C_n(x) \cdot y_n(x), \qquad (15.1.6)$$

где функции $y_i(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (15.1.1), а неизвестные функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \qquad (15.1.7)$$

которая является линейной системой алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$. Так как функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми, то определитель основной матрицы данной системы отличен от нуля, а, следовательно, система имеет единственное решение $C_i'(x) = g_i(x)$. Интегрируя последние равенства, которые являются дифференциальными уравнениями первого порядка, находим $C_i(x) = \int g_i(x)dx$, для всех $i = \overline{1, n}$.

Следовательно, частное решение $y_{ч.н}$ уравнения (15.1.4) имеет вид

$$y_{ч.н} = y_1(x) \cdot \int g_1(x)dx + y_2(x) \cdot \int g_2(x)dx + ... + y_n(x) \cdot \int g_n(x)dx. \qquad (15.1.8)$$

Замечание 1. При нахождении интегралов в формуле (15.1.8) появляются n произвольных постоянных. В общем случае их можно принять равными нулю.

15.2 Примеры решения типовых задач

15.2.1 Найти решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 2$ или $\lambda = 3$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{о.о} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Воспользуемся начальными условиями: $C_1 + C_2 = 3$, $2C_1 + 3C_2 = 8$. Откуда $C_1 = 1$, а $C_2 = 2$. Следовательно, искомое решение будет $y_{ч.о} = e^{2x} + 2e^{3x}$.

15.2.2 Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2,3} = 1$ – корень кратности $k = 3$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{о.о} = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2 e^x$.

15.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{о.о} = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$.

15.2.4 Найти общее решение уравнения $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y' = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $y_2 = e^x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{о.о} = C_1 + C_2 e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н} = C_1(x) + C_2(x) e^x$.

Для определения произвольных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (15.1.7):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^x = 0, \\ \qquad\qquad C_2'(x) e^x = e^{2x} \sin e^x. \end{cases}$$

Решая систему, имеем $C_2(x) = -\cos e^x$, $C_1(x) = e^x \cos e^x - \sin e^x$. Следовательно, частное решение заданного неоднородного уравнения может быть записано в виде $y_{ч.н} = -\sin e^x$.

Согласно формуле (15.1.5), получаем общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$.

15.3 Задания для решения на практическом занятии

15.3.1 В задачах 15.3.1.1 – 15.3.1.9 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

15.3.1.1 $y'' - 6y' + 8y = 0$. **15.3.1.2** $y'' + y' - 2y = 0$. **15.3.1.3** $y'' - 4y' = 0$.

15.3.1.4 $y''+4y'+4y=0$. **15.3.1.5** $y''+6y'+9y=0$. **15.3.1.6** $y''-2y'+y=0$.

15.3.1.7 $y''+6y'+25y=0$. **15.3.1.8** $y''-4y'+5y=0$. **15.3.1.9** $y''+4y=0$.

15.3.2 В задачах 15.3.2.1 – 15.3.2.4 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

15.3.2.1 $y'''+6y''+12y'+8=0$. **15.3.2.2** $y'''-9y''+26y'-24y=0$.

15.3.2.3 $y'''-y''-5y'-3y=0$. **15.3.2.4** $y^{\mathrm{V}}+5y'''+4y=0$.

15.3.3 Найти решение уравнения $y''-5y'+4y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

15.3.4 Решить задачу Коши: $y'''-2y''=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=7$, $y''(0)=8$.

15.3.5 Найти общее решение уравнения $y''+5y'+6y=1\big/\left(1+e^{2x}\right)$.

15.3.6 Решить задачу Коши: $y''+4y=\operatorname{ctg}2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

15.4.1 Найти общее решение дифференциальных уравнений

15.4.1.1 а) $y''+3y'-18y=0$; б) $y''+4y'+4y=0$; в) $y''+4y'+5y=0$.
15.4.1.2 а) $y''-11y'+18y=0$; б) $y''-28y'+196y=0$; в) $y''+25y=0$.
15.4.1.3 а) $y''+y'-20y=0$; б) $y''+8y'+16y=0$; в) $2y''+2y'+y=0$.
15.4.1.4 а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+22y'+121y=0$; в) $y''+y=0$.
15.4.1.5 а) $y''+11y'+28y=0$; б) $y''+16y'+64y=0$; в) $16y''+y=0$.
15.4.1.6 а) $y''-7y'+12y=0$; б) $y''-14y'+49y=0$; в) $y''-2y'+2y=0$.
15.4.1.7 а) $y''+4y'-32y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $36y''+25y=0$.
15.4.1.8 а) $y''-7y'+10y=0$; б) $y''-26y'+169y=0$; в) $5y''-2y'+y=0$.
15.4.1.9 а) $y''+12y'+32y=0$; б) $y''+20y'+100y=0$; в) $25y''+y=0$.
15.4.1.10 а) $y''-8y'+15y=0$; б) $y''-18y'+81y=0$; в) $y''+4y=0$.
15.4.1.11 а) $y''+4y'-21y=0$; б) $y''+12y'+36y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.
15.4.1.12 а) $y''-9y'+20y=0$; б) $y''-8y'+64y=0$; в) $9y''+25y=0$.
15.4.1.13 а) $y''-4y'-21y=0$; б) $y''+18y'+81y=0$; в) $5y''+4y'+y=0$.
15.4.1.14 а) $y''-8y'+12y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $4y''+25y=0$.
15.4.1.15 а) $y''-5y'-24y=0$; б) $y''+26y'+169=0$; в) $81y''+y=0$.
15.4.1.16 а) $y''-9y'+18y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''-4y'+5y=0$.
15.4.1.17 а) $y''-7y'-18y=0$; б) $y''+28y'+196=0$; в) $4y''+9y=0$.
15.4.1.18 а) $y''-10y'+24y=0$; б) $y''-24y'+144y=0$; в) $9y''+y=0$.
15.4.1.19 а) $y''-3y'-10y=0$; б) $y''+14y'+49y=0$; в) $y''-2y'+5y=0$.
15.4.1.20 а) $y''-9y'+14y=0$; б) $y''-16y'+64y=0$; в) $y''+81y=0$.
15.4.1.21 а) $y''+3y'-18y=0$; б) $y''+30y'+225y=0$; в) $25y''+36y=0$.
15.4.1.22 а) $y''-10y'+21y=0$; б) $y''-6y'+9y=0$; в) $5y''-4y'+y=0$.

15.4.1.23 а) $y''+7y'-18y=0$; б) $y''+22y'+121y=0$; в) $49y''+4y=0$.
15.4.1.24 а) $y''-11y'+28y=0$; б) $y''-2y'+y=0$; в) $2y''-2y'+y=0$.
15.4.1.25 а) $y''+2y'-15y=0$; б) $y''+10y'+25y=0$; в) $y''+9y=0$.
15.4.1.26 а) $y''-10y'+16y=0$; б) $y''-20y'+100y=0$; в) $16y''+49y=0$.
15.4.1.27 а) $y''-3y'-28y=0$; б) $y''+24y'+576y=0$; в) $5y''+2y'+y=0$.
15.4.1.28 а) $y''-11y'+24y=0$; б) $y''-12y'+36y=0$; в) $4y''+y=0$.
15.4.1.29 а) $y''-12y'+32y=0$; б) $y''+2y'+y=0$; в) $y''+16y=0$.
15.4.1.30 а) $y''+11y'+30y=0$; б) $y''-30y'+225y=0$; в) $y''+2y'+2y=0$.

16 НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА
(практическое занятие № 16)

Содержание: решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка со специальной правой частью (в случае действительных и комплексных корней характеристического уравнения).

16.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет вид: $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$, где $a_i,\ i=\overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0\neq 0$ и $f(x)\neq 0$. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнением *n*-го порядка равно сумме соответствующего однородного уравнения и произвольного частного решения неоднородного дифференциального уравнения, то есть $y_{о.н}=y_{о.о}+y_{ч.н}$. Предположим, что известно общее решение соответствующего однородного уравнения $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0$:

$$y_{о.о}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x).$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения, правая часть которых имеет специальный вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (16.1.1)$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m, соответственно.

Если число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения (15.1.3) для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н}=e^{\alpha x}\left(p_k(x)\cos\beta x+q_k(x)\sin\beta x\right), \qquad (16.1.2)$$

где $p_k(x), q_k(x)$ – многочлены степени $k=\max\{n,m\}$.

Если число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения (15.1.3) кратности r для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н} = x^s e^{\alpha x}\left(p_s(x)\cos\beta x + q_s(x)\sin\beta x\right), \qquad (16.1.3)$$

где $p_s(x), q_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{n, m\}$.

Приведём виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных уравнений.

№	Правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Частное решение $y_{ч.н}$ дифференциального уравнения
1	2	3	4
1	$P_n(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x)$
		Число 0 является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot p_n(x)$
2	$A \cdot e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$a \cdot e^{\alpha x}$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$a \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}$
3	$e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
4	$P_n(x) \cdot \sin\beta x$ $(Q_n(x) \cdot \cos\beta x)$	Число $\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x) \cdot \sin\beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos\beta x$
		Число $\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot (p_n(x) \cdot \sin\beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos\beta x)$

1	2	3	4
5	$e^{\alpha x}\cdot P_n(x)\cdot\sin\beta x$ $(e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x)$
		Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x)$
6	$e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+Q_m(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\cdot(p_s(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_s(x)\cdot\cos\beta x)$
		Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(p_s(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_s(x)\cdot\cos\beta x)$ $s=\max\{n,m\}$

Для определения параметров многочленов применяется *метод неопределённых коэффициентов*. Подставляем частное решение $y_{ч.н}$ и его производные в исходное уравнение. Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях многочлена в левой и правой части полученного равенства или при соответствующих тригонометрических функциях, находим соответствующие параметры многочленов $p_s(x)$ и $q_s(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме различных функций, каждая из которых имеет специальный вид, то для нахождения частного решения такого уравнения необходимо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и будет являться частным решением исходного уравнения.

16.2 Примеры решения типовых задач

16.2.1 Найти общее решение уравнения $y''-3y'+2y=130\cdot\sin 3x$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y''-3y'+2y=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. Следовательно, $y_{о.о.}=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $130\cdot\sin 3x=e^{0x}(0\cdot\cos 3x+130\cdot\sin 3x)$, причём $\alpha\pm\beta i=0\pm 3i=\pm 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда, частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.}=A\cos 3x+B\sin 3x$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$(-7A-9B)\cos 3x+(9A-7B)\sin 3x=130\cdot\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получаем $A=9$, $B=-7$. Тогда $y_{ч.н.}=9\cos 3x-7\sin 3x$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{о.н.}=C_1e^x+C_2e^{3x}+9\cos 3x-7\sin 3x$.

16.2.2 Найти общее решение уравнения $y''-8y'+20y=10e^{5x}$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y''-8y'+20y=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2-8\lambda+20=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=4\pm 2i$. Следовательно, $y_{о.о.}=C_1e^{4x}\cos 2x+C_2e^{4x}\sin 2x$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $10e^{5x}=e^{5x}(10\cdot\cos(0\cdot x)+Q_m(x)\cdot\sin(0\cdot x))$, причём $\alpha\pm\beta i=5\pm 0i=5$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.}=Ae^{5x}$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем $5Ae^{5x}=10\cdot e^{5x}$. Откуда получаем $A=2$. Тогда $y_{ч.н.}=2e^{5x}$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{о.н.}=C_1e^{4x}\cos 2x+C_2e^{4x}\sin 2x+2e^{5x}$.

16.2.3 Найти общее решение уравнения $y'''-4y''=48x^2-48x-10$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'''-4y''=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3-4\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=4$. Следовательно, $y_{о.о.}=C_1+C_2x+C_3e^{4x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $48x^2-48x-10=e^{0x}((48x^2-48x-10)\cdot\cos(0\cdot x)+Q_m(x)\cdot\sin(0\cdot x))$, причём $\alpha\pm\beta i=0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Тогда, частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.}=x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^4+Bx^3+Cx^2$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$-48Ax^2+(24A-24B)x+6B-8C=48x^2-48x-10.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получаем $A=-1$, $B=1$, $C=2$. Тогда, $y_{ч.н.}=-x^4+x^3+2x^2$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{о.н.}=C_1+C_2x+C_3e^{4x}-x^4+x^3+2x^2$.

16.3 Задания для решения на практическом занятии

16.3.1 Найти общее решение уравнения $y''-5y'-6y=19\cdot\sin x+3\cos x$.

16.3.2 Найти общее решение уравнения $y''+9y=10e^{3x}$.

16.3.3 Найти общее решение уравнения $y''+8y'=60x^2-32x^3+18x$.

16.3.4 Решить задачу Коши: $y''-4y'+3y=e^{5x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=9$.

16.3.5 Решить задачу Коши: $y''+y=\cos 3x$, $y(\pi/2)=4$, $y'(\pi/2)=1$.

16.3.6 Найти частное решение уравнения $y''+3y'=(40x+58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

16.3.7 Найти общее решение уравнения $y''+y=xe^{x}+2e^{-x}$.

16.3.8 Найти общее решение уравнения $y'''+y''-2y'=x-e^{x}$.

16.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

16.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

16.4.1.1 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

16.4.1.2 $y'' + 2y' + 10y = 50x^2 - 30.$

16.4.1.3 $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3.$

16.4.1.4 $y''' - y'' = 12x^2 + 6x.$

16.4.1.5 $y'' + 4y' = e^x(\cos x + \sin x).$

16.4.1.6 $y'' - 6y' + 13y = -3\cos 2x.$

16.4.1.7 $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}.$

16.4.1.8 $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x.$

16.4.1.9 $6y'' - y' - y = 3e^{2x}.$

16.4.1.10 $y'' + y = 4xe^x.$

16.4.1.11 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x.$

16.4.1.12 $y'' - 4y' + 5y = (3\sin x + \cos x)e^{-2x}.$

16.4.1.13 $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$

16.4.1.14 $y'' + y' + y = 6e^{-x}.$

16.4.1.15 $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x.$

16.4.1.16 $y'' + 16y = 8\cos 4x.$

16.4.1.17 $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}.$

16.4.1.18 $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}.$

16.4.1.19 $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27.$

16.4.1.20 $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x.$

16.4.1.21 $y'' - y' + y = -13\sin 2x.$

16.4.1.22 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x.$

16.4.1.23 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

16.4.1.24 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x.$

16.4.1.25 $y'' - y = -4\cos x + 2\sin x.$

16.4.1.26 $y'' - 2y' + y = 6xe^x.$

16.4.1.27 $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

16.4.1.28 $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

16.4.1.29 $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x.$

16.4.1.30 $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x.$

16.4.2 Найти решение уравнения при $y(0) = y'(0) = 0$.

16.4.2.1 $y'' - 2y' + y = 16e^x.$

16.4.2.2 $y'' + 9y = 36e^{3x}.$

16.4.2.3 $y'' - 9y = e^{-2x}.$

16.4.2.4 $y'' + 9y = \cos 3x.$

16.4.2.5 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1.$

16.4.2.6 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x.$

16.4.2.7 $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 + 2.$

16.4.2.8 $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x}.$

16.4.2.9 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 2x.$

16.4.2.10 $y'' + 9y = 15\sin 2x.$

16.4.2.11 $y'' + y' = 2x^2 e^x.$

16.4.2.12 $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2.$

16.4.2.13 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}.$

16.4.2.14 $y'' + 2y' + y = \cos x.$

16.4.2.15 $y'' + y' = 2x + x^2.$

16.4.2.16 $y''' - y' = 6 - 3x^2.$

16.4.2.17 $y''' + y'' = \sin x.$

16.4.2.18 $y''' - 2y'' + y' = 4.$

16.4.2.19 $y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x.$

16.4.2.20 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}.$

16.4.2.21 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3).$

16.4.2.22 $y'' - 8y' + 16y = \left(2x - 3\right)e^{4x}.$

16.4.2.23 $y'' - 10y' + 25y = \left(x + 1\right)e^x.$

16.4.2.24 $y'' + 4y = 4e^{7x}.$

16.4.2.25 $y'' - y' = 2(1 - x).$

16.4.2.26 $y'' - 8y' + 16y = \left(x + 6\right)e^{4x}.$

16.4.2.27 $y'' - 5y' + 6y = (2x - 7)e^{-x}.$

16.4.2.28 $.\ y'' + y' = 2x\cos x$

16.4.2.29 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$

16.4.2.30 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 1 – 3.

2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.

3. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 352 с.

5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

7. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1988. – 432 с.

8. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 456 с.

9. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.

10. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.

11. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

12. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1 – 2.

13. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.

14. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.

15. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. Ч. 2 / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2003. – 64 с.

16. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

СОДЕРЖАНИЕ