МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА МЕХАНИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ВИТЕБСК
2010

УДК 517 (075)
Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей.
Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2010.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В., доц., к. ф.-м. н. Денисов В.С., доц., к. ф.-м. н. Загурский В.Н., ст. преп. Дмитриев А.П., ст. преп. Завацкий Ю.А.

Задания для выполнения типовых расчётов написаны в соответствии с учебными программами по курсам «Высшая математика» или «Математика» механико-технологических специальностей дневной и заочной форм обучения. Содержат задания и теоретические вопросы по следующим разделам вышеуказанных курсов: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Индивидуальные задания, приведённые в типовых расчётах, могут быть использованы преподавателем на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов при подготовке к сдаче экзамена или зачёта.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
9 февраля 2010 г., протокол № 7

Рецензент: канд. ф.-м. н., доцент кафедры Т и ПМ УО «ВГТУ» Дунина Е.Б.

Редактор: канд. ф.-м. н., доцент УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Сурин Т.Л.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2010 г., протокол №______

Ответственный за выпуск: Лопатнёва Н.Г.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч. - изд. лист _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ №____ Цена ______________
Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия №02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методические материалы предназначены для студентов механико-технологических специальностей высших учебных заведений, изучающих дисциплины «Высшая математика» и «Математика». В данных материалах приведены индивидуальные задания для выполнения типовых расчётов по темам «Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной» и « Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальные уравнения». Каждое задание типового расчёта содержит тридцать вариантов задач.

В имеющихся сборниках задач и индивидуальных заданий приведено достаточное количество задач для выполнения типовых расчетов для экономических и конструкторско-технологических специальностей, но нет расчетных заданий, которые бы отражали программы механических специальностей. Предлагаемые типовые расчёты составлены полностью в соответствии с базовыми и рабочими программами для студентов механико-технологических специальностей. В индивидуальных заданиях приведен перечень теоретических вопросов, которые необходимо знать студенту при сдаче типового расчёта по курсам «Высшая математика» или «Математика» в первом и во втором семестрах. Предлагаемые задачи в типовых расчётах могут быть использованы преподавателем при проведении практических занятий и контрольных работ у студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЁТА

Типовой расчет выполняется на листах формата А4, скреплённых между собой. Условие задач и их решение записывается только на одной стороне листа. Вторая сторона листа предназначена для выполнения работ над ошибками, указанных преподавателем при рецензировании работы, а также решения задач и ответа на теоретические вопросы, предложенные студенту при защите типового расчета.

Номера заданий типового расчёта, а также вариант его выполнения указывается преподавателем. При выполнении типового расчёта условие задачи должно быть приведено в полном объёме. Если в методических указаниях условие задания дано в общем виде, оно должно быть записано с учётом цифр своего варианта. В некоторых задачах типового расчёта исходные данные необходимо рассчитать, прежде чем записать условие индивидуального задания. На титульном листе, обрамлённом в чертёжную рамку, указывается: наименование учреждения, кафедры, номер и название типового расчёта, вариант индивидуального задания, инициалы того, кто выполнил и кто проверил типовой расчет, год выполнения.

## РАЗДЕЛ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Определение матрицы. Операции над матрицами.
2. Определитель и его свойства.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Общие понятия.
6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамара.
7. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Решения систем неоднородных линейных алгебраических уравнений.
10. Решение систем однородных линейных алгебраических уравнений.

### ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. Система линейных алгебраических уравнений задана расширенной матрицей $\tilde{A}=\left(a_{ij}\middle|b_i\right)$, где $i=\overline{1;4}$, а $j=\overline{1;4}$. Необходимо найти: а) произведение основной матрицы системы $A=(a_{ij})$ на расширенную матрицу, если оно существует; б) алгебраическую сумму основной матрицы системы, умноженную на два, и её квадрат, умноженный на три; в) определитель матрицы, полученной из расширенной матрицы вычеркиванием первого столбца (вычисления определителя произвести путем разложения по второму столбцу, а также получением нулей в произвольном столбце или строке). Записать систему алгебраических уравнений и доказать ее совместность, используя теорему Кронекера – Капелли. Решить полученную систему уравнений: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса. Найти решение системы линейных уравнений, которая получена из данной путем замены столбца свободных членов нулевым столбцом:

1.1 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$. 1.2 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$. 1.3 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$.

1.4 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right)$. 1.5 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right)$. 1.6 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

1.7 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$. 1.8 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -4 & 7 \\ 6 & 3 & -1 & 0 & 11 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right)$. 1.9 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

1.10 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)$. 1.11 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 8 \end{array}\right)$. 1.12 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$.

1.13 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$. 1.14 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$. 1.15 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$.

1.16 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right)$. 1.17 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right)$. 1.18 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$.

1.19 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$. 1.20 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right)$. 1.21 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

1.22 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$. 1.23 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. 1.24 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$.

1.25 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)$. 1.26 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$. 1.27 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

1.28 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right)$. 1.29 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$. 1.30 $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 9 \end{array}\right)$.

2. Найти фундаментальную систему решений и определить размерность линейного пространства решений однородной системы алгебраических уравнений $A \cdot X = 0$, у которой задана матрица $A$. Определить общее решение заданной однородной системы линейных алгебраических уравнений.

2.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2.2 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 2.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & 13 & 9 \end{pmatrix}$. 2.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 12 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 2.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 16 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

2.7 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. 2.8 $A=\begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. 2.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.10 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. 2.11 $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 6 & 11 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 2.12 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2.13 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 2.14 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 2.15 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.16 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 2.17 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. 2.18 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

2.19 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & -10 & 5 \end{pmatrix}$. 2.20 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & -7 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. 2.21 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.22 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. 2.23 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. 2.24 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.25 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 2.26 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 5 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}$. 2.27 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.28 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. 2.29 $A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2.30 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Исследовать на совместность и найти общее решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

3.1 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=5. \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+6x_2+5x_3=3, \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2. \end{cases}$ 3.3 $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+10x_3=2, \\ 8x_1+4x_2+22x_3=5. \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=7, \\ 4x_1-6x_2+8x_3=14, \\ 6x_1-9x_2+12x_3=21. \end{cases}$ 3.5 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+5x_2-5x_3=10. \end{cases}$ 3.6 $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=3, \\ 9x_1-3x_2+3x_3=9, \\ 6x_1-2x_2+2x_3=6. \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=5, \\ 2x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 4x_1-4x_2+5x_3=24. \end{cases}$ 3.8 $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=5, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+3x_2-4x_3=9. \end{cases}$ 3.9 $\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1-x_2+6x_3=5, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1. \end{cases}$

3.10 $\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3=4, \\ x_1-3x_2+x_3=2, \\ 4x_1-12x_2+x_3=4. \end{cases}$ 3.11 $\begin{cases} 5x_1+4x_2-x_3=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-2. \end{cases}$ 3.12 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=-5, \\ -2x_1-4x_2-4x_3=10, \\ -x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+2x_2-x_3=-1, \\ 6x_1-4x_2+2x_3=2. \end{cases}$ 3.14 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 3x_1+3x_2-3x_3=6, \\ 4x_1+4x_2-4x_3=8. \end{cases}$ 3.15 $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=2, \\ 2x_1 \qquad -4x_3=0. \end{cases}$

3.16 $\begin{cases} 4x_1+6x_2+2x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ x_1-4x_2+15x_3=4. \end{cases}$ 3.17 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 4x_1+6x_2-10x_3=0, \\ 4x_1+6x_2-9x_3=1. \end{cases}$ 3.18 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_1-x_2-x_3=-6, \\ \qquad x_2+x_3=12. \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=9, \\ x_1-12x_2+13x_3=14, \\ 4x_1-14x_2+18x_3=23. \end{cases}$ 3.20 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=4, \\ 6x_1+3x_2-3x_3=12, \\ 4x_1+2x_2-2x_3=8. \end{cases}$ 3.21 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1-4x_2+6x_3=8, \\ 3x_1-2x_2+9x_3=12. \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=12, \\ 10x_1-2x_2+4x_3=24, \\ 5x_1-x_2+2x_3=12. \end{cases}$ 3.23 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 3x_1+3x_2-3x_3=3, \\ 4x_1+4x_2-4x_3=4. \end{cases}$ 3.24 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=6, \\ 3x_1+3x_2-5x_3=0. \end{cases}$

3.25 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=5, \\ 2x_1-x_2+4x_3=4, \\ 4x_1-4x_2+8x_3=9. \end{cases}$ 3.26 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=7, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=3, \\ 4x_1+6x_2-6x_3=10. \end{cases}$ 3.27 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=7, \\ 8x_1+4x_2+2x_3=14, \\ 16x_1+8x_2+4x_3=28. \end{cases}$

3.28 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=-1, \\ x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1-2x_2 \quad =0. \end{cases}$ 3.29 $\begin{cases} 3x_1+3x_2-x_3=5, \\ x_1+x_2-12x_3=6, \\ x_1+x_2+23x_3=-7. \end{cases}$ 3.30 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_1-x_2-x_3=-6, \\ 3x_1+2x_2 \qquad =-8. \end{cases}$

# РАЗДЕЛ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Уравнения линии и поверхности.
2. Уравнения прямой линии на плоскости.
3. Взаимное расположение прямых линий на плоскости.
4. Уравнения плоскости в пространстве.
5. Уравнения прямых линий в пространстве.
6. Взаимное расположение прямых линий в пространстве.
7. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
8. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
9. Эллипс и его характеристики.
10. Гипербола и ее характеристики.
11. Парабола и ее характеристики.

## ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = m \cdot \vec{p} + n \cdot \vec{q}$ и $\vec{b} = n \cdot \vec{p} - m \cdot \vec{q}$, где число $m$ – номер варианта типового расчета, $n$ – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Длины векторов: $|\vec{p}| = m \cdot n$, $|\vec{q}| = m + n$. Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ совпадает с углом между векторами, $\vec{c} = n \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j}$ и $\vec{d} = m \cdot \vec{i} + n \cdot \vec{j}$. Определить также проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ и направляющие косинусы вектора $\vec{c}$. Ответ не должен содержать тригонометрические и обратно тригонометрические выражения, а также иррациональность в знаменателе.

5. В декартовой системе координат на плоскости заданы три точки $A(n;m)$, $B\left(\dfrac{n+m}{2};\dfrac{n-m}{2}\right)$ и $O\left(\dfrac{3n-m}{4};\dfrac{n+3m}{4}\right)$, где число $m$ – номер варианта типового расчета, $n$ – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Записать координаты точек $A, B, C$ и $D$, которые являются вершинами параллелограмма $ABCD$, а точка $O$ – точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Найти: 1) каноническое уравнение прямой $AB$, векторно-параметрическое и параметрические уравнения прямой $BD$, нормальное уравнение прямой $AC$; 2) общее уравнение прямой, перпендикулярной стороне $AB$ и проходящей через точку $C$; 3) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $D$, которая параллельна прямой $AC$; 4) длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины $D$ на сторону $AB$; 5) площадь параллелограмма $ABCD$; 6) угол $\varphi$ между стороной $AB$ и прямой, соединяющей точку $A$ с точкой, которая делит сторону $BC$ в отношении два к пяти, считая от точки $B$; 7) уравнение биссектрисы, проведенной из вершины $A$; 8) уравнение линии,

каждая точка которой равноудалена от точки $N(n;0)$ и прямой $y=-n$, с указанием характеристик кривой после приведения уравнения к каноническому виду; 9) уравнение линии, каждая точка которой расположена в два раза дальше от точки $N(n;0)$,чем к прямой $y=-n$, с указанием характеристик кривой после приведения полученного уравнения к каноническому виду; 10) уравнение линии, каждая точка которой расположена в два раза ближе к точке $N(n;0)$,чем к прямой $y=-n$, с указанием характеристик кривой после приведения полученного уравнения к каноническому виду.

6. Заданы координаты четырех точек $A(m;n;p)$, $B(2m;n;p)$, $C(m;2n+m;m+2p)$ $D(m;m+n-p;2p+m)$, которые являются вершинами пирамиды $ABCD$, где число $m$ – номер варианта типового расчета, $n$ – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки, а число $p$ – удвоенная сумма всех корней уравнения $x^3-(m+n+1)\cdot x^2+(mn+n+m)\cdot x-nm=0$, с учетом кратности его корней. Найти координаты вершины пирамиды $ABCD$. Доказать, что вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образуют базис, и определить координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ в этом базисе. Найти: 1) длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины $D$ на плоскость $ABC$; 2) координаты точки пересечения медиан треугольника $ABC$; 3) координаты точки $D'$ симметричной точке $D$ относительно плоскости $ABC$; 4) угол между прямой $AD$ и плоскостью $ABC$; 5) уравнения прямых $AB$ и $AC$ и угол между ними; 6) работу равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F}_1=\overrightarrow{DA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{DB}$, $\vec{F}_3=\overrightarrow{DC}$, приложенных к материальной точке $D$, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки $D$ в точку пересечения медиан треугольника $ABC$.

7. Построить кривую линию, которая задана уравнением $r=d(j)$ в полярной системе координат, начиная от значения $j=0$ до значения $j=2p$ и придавая углу $j$ значения через промежуток $\frac{p}{8}$. Записать уравнение кривой линии в декартовой прямоугольной системе координат, в которой начало системы совпадает с полюсом, а положительное направление оси абсцисс совпадает с направлением полярной оси.

7.1 – 7.5 $d(j)=n\cdot\sin mj$; 7.6 – 7.10 $d(j)=n\cdot\cos mj$;
7.11 – 7.15 $d(j)=n-\sin mj$; 7.16 – 7.20 $d(j)=n-\cos mj$;
7.21 – 7.25 $d(j)=n+\sin mj$; 7.26 – 7.30 $d(j)=n+\cos mj$,

где число $m$ – номер варианта типового расчета, $n$ – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки.

# РАЗДЕЛ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

## ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Линейное пространство. Примеры линейных (векторных) пространств.
2. Базис. Координаты вектора в базисе.
3. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
4. Линейный оператор и его свойства, матрица линейного оператора.
5. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому базису.
6. Операции над линейными операторами.
7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
8. Евклидово пространство. Неравенство Коши – Буняковского.
9. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований.

## ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

8 Из предположения, что на заданном множестве задана сумма двух элементов $a$ и $b$, а также произведение произвольного элемента этого множества на любое действительное число $a$, определить, образует ли данное пространство векторное (линейное) пространство.

8.1 Множество всех натуральных чисел; сумма $a+b$, произведение $a \cdot a$.
8.2 Множество всех целых чисел; сумма $a+b$, произведение $a \cdot a$.
8.3 Множество всех рациональных чисел; сумма $a+b$, произведение $a \cdot a$.
8.4 Множество всех иррациональных чисел; сумма $a+b$, произведение $a \cdot a$.
8.5 Множество всех действительных чисел; сумма $a+b$, произведение $a \cdot a$.
8.6 Множество всех натуральных чисел; сумма $a+b$, произведение $a^{a}$.
8.7 Множество всех целых чисел; сумма $a+b$, произведение $a^{a}$.
8.8 Множество всех рациональных чисел; сумма $a+b$, произведение $a^{a}$.
8.9 Множество всех иррациональных чисел; сумма $a+b$, произведение $a^{a}$.
8.10 Множество всех действительных чисел; сумма $a+b$, произведение $a^{a}$.
8.11 Множество всех векторов на плоскости, координаты которых являются действительными числами; сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $a \cdot \vec{a}$.
8.12 Множество всех векторов в трехмерном пространстве, координаты которых являются действительными числами; сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $a \cdot \vec{a}$.
8.13 Множество всех векторов на плоскости, которые лежат на одной оси; сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $a \cdot \vec{a}$.
8.14 Множество всех векторов в пространстве, которые лежат на одной оси; сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $a \cdot \vec{a}$.
8.15 Множество всех векторов трехмерного пространства; сумма $\vec{a}\times\vec{b}$, произведение $a \cdot \vec{a}$.

8.16 Множество всех многочленов второй степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.17 Множество всех многочленов третьей степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.18 Множество всех многочленов не выше второй степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.19 Множество всех многочленов не выше третьей степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.20 Множество всех многочленов четвертой степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.21 Множество всех многочленов не выше четвертой степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.22 Множество всех многочленов третьей степени от переменной $x$; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
8.23 Множество всех невырожденных матриц; сумма $a+b=(a_{ij}+b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.24 Множество всех диагональных матриц; сумма $a+b=(a_{ij}+b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.25 Множество всех симметрических матриц; сумма $a+b=(a_{ij}+b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.26 Множество всех невырожденных матриц; сумма $a+b=(a_{ij}\cdot b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.27 Множество всех диагональных матриц; сумма $a+b=(a_{ij}\cdot b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.28 Множество всех симметрических матриц; сумма $a+b=(a_{ij}\cdot b_{ij})$, произведение $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$.
8.29 Множество всех отрицательных чисел; сумма $|a|\cdot|b|$, произведение $|a|^{\alpha}$.
8.30 Множество всех действительных чисел; сумма $a\cdot b$, произведение $\alpha\cdot a$.

9 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро линейного оператора в базисе $\mathrm{B}=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Найти координаты вектора $\vec{x}=(m;n;p)$, а также матрицу линейного оператора в базисе $\mathrm{B}'=\{\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\}$, где координаты векторов $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$ совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, которые заданы в базисе $\mathrm{B}=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ и найдены в задаче №6, а числа $m;n;p$ определены в той же задаче.
9.1 Проектирования на плоскость $2x-3y+6z-2=0$.

9.2 Проектирования на ось $Oz$.

9.3 Зеркального отображения относительно плоскости $3x+4y=1$.

9.4 Проектирования на плоскость $6x-3y+2z-1=0$.

9.5 Проектирования на плоскость $3x+4z-5=0$.

9.6 Проектирования на ось $Ox$.

9.7 Зеркального отображения относительно плоскости $3x-6y-2z=2$.

9.8 Проектирования на плоскость $3x-2y+6z-4=0$.

9.9 Проектирования на плоскость $2x+6y+3z-5=0$.

9.10 Зеркального отображения относительно плоскости $3x+6y-2z=2$.

9.11 Проектирования на ось $Oy$.

9.12 Проектирования на плоскость $12x-4y+3z-9=0$.

9.13 Проектирования на плоскость $4x-12y+3z-1=0$.

9.14 Зеркального отображения относительно плоскости $6x+2y-3z=7$.

9.15 Проектирования на плоскость $4x+12y+3z-6=0$.

9.16 Проектирования на плоскость $12x-3y+4z-5=0$.

9.17 Зеркального отображения относительно плоскости $2x+6y-3z=8$.

9.18 Проектирования на плоскость $-12x+3y+4z-9=0$.

9.19 Проектирования на плоскость $3x+4y+12z-1=0$.

9.20 Зеркального отображения относительно плоскости $3x+4z=2$.

9.21 Проектирования на плоскость $2x+3y+6z-10=0$.

9.22 Проектирования на плоскость $6x+3y-2z+4=0$.

9.23 Зеркального отображения относительно плоскости $3y+4z=2$.

9.24 Проектирования на плоскость $4x+3y+12z-11=0$.

9.25 Проектирования на плоскость $3x+12y+4z-12=0$.

9.26 Зеркального отображения относительно плоскости $3y-4z=4$.

9.27 Проектирования на плоскость $-3x+12y+4z-13=0$.

9.28 Проектирования на плоскость $3x-12y-4z-15=0$.

9.29 Зеркального отображения относительно плоскости $-3x+4y=7$.

9.30 Зеркального отображения относительно плоскости $4x+3z=3$.

10 Из предположения, что задан вектор $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)$, проверить, являются ли линейными указанные преобразования. В случае линейности найти матрицу линейного оператора, его ядро и образ. Определить координаты вектора $\vec{x}=(m;n;p)$, а также матрицу линейного оператора в базисе $\mathrm{B}'=\{\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\}$, где координаты векторов $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$ совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, которые заданы в базисе $\mathrm{B}=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ и найдены в задаче №6, а числа $m;n;p$ определены в той же задаче.

10.1 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - x_2^2 + 3x_3; 0; x_1 + x_2 + x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 - x_2 + 1; x_1 + x_2; 4x_1 - x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (2x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 - x_3; 4x_1 + x_2 - x_3);$

10.2 $\hat{A}\vec{x} = (5x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_2 + 5; 0);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 - x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 + 3x_2; x_2 - x_3; x_1^3 + 2x_2 - x_3);$

10.3 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4x_3; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3 - 4; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - 9x_3);$

10.4 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 7x_2 + 3x_3; x_1 - x_2^4 + 2x_3; x_1 + x_2 - 32x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2^2 - 3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + x_2 - x_3);$

10.5 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - x_2 + x_3; x_1^2 + x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 3x_3; 4x_1 - x_2 + 6x_3; x_1 - x_2 + 9x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5; 3x_1 + x_2 - 3x_3; 2x_1 + 7x_2 - 9x_3);$

10.6 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2^2 - 13x_3; 21x_1 - x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 + x_3 - 9; 5x_1 + 3x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$

10.7 $\hat{A}\vec{x} = (2x_3 - x_2 - 4x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2 - 3; x_1 - x_2 + 8x_3; x_1 - x_2 + 7x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2; 3x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3^3);$

10.8 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + x_2^2 + 3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3);$

10.9 $\hat{A}\vec{x} = (9x_1 - 7x_2 - 8x_3; x_1 + 9x_2 + 3x_3; x_1 + x_2 - 5x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 9x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - 4x_2 + 9x_3; x_1 - 5x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3 - 6; 3x_1 + x_2 - x_3; 3x_1 + x_2 - 9x_3);$

10.10 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 4x_3; x_1 + 3; x_1 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3; 3x_1 + x_2^5 - x_3; 2x_1 + 6x_2 - x_3);$

10.11 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2^2 + 5x_3; 0; x_1 + 3x_2 + 4x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 + 4; x_1 + 5x_2; 6x_1 - 7x_2 + 2x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (3x_1 + 4x_2 - 5x_3; x_1 + 2x_2 - x_3; 4x_1 + 6x_2 - x_3);$

10.12 $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2 + x_3; 2x_1 - x_2 + 5; 0);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - 5x_2 + 4x_3; x_1 - 7x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2; x_2 - 6x_3; 3x_1^3 + 2x_2 - 5x_3);$

10.13 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 5x_3; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - 4x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (5x_1 - 3x_2 - x_3 - 3; 3x_1 + 6x_2 - x_3; 2x_1 + 7x_2 - x_3);$

10.14 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2^3 + 2x_3; x_1 + 2x_2 - x_1x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_2 + 3x_2^2 - 4; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 - 5x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - x_3; x_1 + 5x_2 - 2x_3; x_1 + 4x_2 - x_3);$

10.15 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1x_3 - 5x_2 + x_3; x_1^2 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 12x_2 - 13x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 4x_3; 4x_1 - 5x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 6; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$

10.16 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 13x_2 - 16x_3; x_1 - 17x_2 + 16x_3; x_1 + 15x_2 - x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (6x_1 + x_2^2 - 1x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 - 3x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3 - 1; 5x_1 + 3x_2 - x_3; 5x_1 + x_2 - x_3);$

10.17 $\hat{A}\vec{x} = (5x_1^3 - 6x_2 - 4x_3; x_1 - 3x_2; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 3x_2 + 2x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 2x_2; 3x_1 + 3x_2; 2x_1 + 4x_2 - 5x_3^3);$

10.18 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 6x_2 - 1; x_1 - 3x_2 + 3x_3 \cdot x_2; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2^2 + 3; 2x_1 - 2x_2 + 5x_3; 3x_1 - x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$

10.19 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 2x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 - 5x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 5x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - 2x_2 + 9x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2; 3x_1 + 7x_2 - x_3; 3x_1 + 4x_2 - 9x_3);$

10.20 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_3; 3x_1 + 3; x_1 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 7x_3; x_1 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3; 3x_1 + 3x_2^2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$

10.21 $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 - 3x_2^2 + 3x_3; x_1; 2x_1 + 3x_2 + x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (5x_1 - x_2 + 2; x_1 + x_2; 6x_1 - 2x_2 + x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + 3x_2 - 2x_3; 4x_1 + 2x_2 - x_3);$

10.22 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + x_3; 3x_1 - x_2 + 5; x_2);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + x_3; 2x_1 - x_2);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3; 3x_2 - 2x_3; x_1^2 + 2x_2 - 2x_3);$

10.23 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + 6x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + 4x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3 - 4; 3x_1 + 8x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - 19x_3);$

10.24 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 + 4x_3; x_1 - 3x_2^4 + 2x_3; x_1 + 5x_2 - 24x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 21x_2; 2x_1 - x_2 + x_3 + 6; 3x_1 - x_2 + 2x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 5x_1 + x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3);$

10.25 $\hat{A}\vec{x} = (12x_1 - x_2 + 4x_3; 3x_1^2 + 2x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 13x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + 6x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 2; 3x_1 + 3x_2 - 3x_3; 2x_1 + 3x_2 - 10x_3);$

10.26 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3; 2x_1 - 2x_2; x_1 - x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 3x_2^2; x_1 - 3x_2 + 5x_3; x_1 - 4x_2 + 2x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2; 4x_1 + 7x_2 - 3x_3; 2x_1 + 2x_2 - 2x_3);$

10.27 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1^3 - 3x_2^3 - 4x_3; x_1 - 3x_2 + 7x_3; x_1 + 9x_2 - 2x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 12; x_1 - 8x_2 + 4x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 3x_2; 4x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3);$

10.28 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 6x_2 + 8; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 7x_2 - 8x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2^2 + 5; 2x_1 - 3x_2 + 6x_3; 3x_1 - x_2 + 3x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$

10.29 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 4x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (3x_1 + 4x_2^2 - 7x_3; 2x_1 - 3x_2 + 5x_3; x_1 - 3x_2 + 7x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3; 3x_1 + 2x_2 - x_3; 3x_1 + 4x_2 - 9x_3);$

10.30 $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 - 5x_3; 2x_1 + 9; 7x_1 - 4x_3);$

$\hat{B}\vec{x} = (7x_1 - 6x_3; 5x_1 - 4x_2 + 3x_3; 2x_1 + 1x_3);$

$\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 5; 3x_1 + 4x_2^4 - x_3; 2x_1 + 6x_2 - 2x_3).$

11 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы $A$ линейного оператора $\hat{A}$.

11.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};$ 11.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$ 11.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

11.4 $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$ 11.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ 11.6 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

11.7 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$ 11.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$ 11.9 $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

11.10 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$ 11.11 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix};$ 11.12 $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix};$

11.13 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};$ 11.14 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix};$ 11.15 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

11.16 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$ 11.17 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ 11.18 $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix};$

11.19 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 11.20 $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 11.21 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

11.22 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 11.23 $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 11.24 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;

11.25 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; 11.26 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 11.27 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

11.28 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; 11.29 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 11.30 $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

12 Привести заданную квадратичную форму к каноническому виду ортогональными преобразованиями.

12.1 $F=8x_1^2-7x_2^2+8x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$;

12.2 $F=7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

12.3 $F=3x_1^2+3x_2^2-x_3^2-6x_1x_3+4x_2x_3$;

12.4 $F=2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$;

12.5 $F=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

12.6 $F=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

12.7 $F=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

12.8 $F=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

12.9 $F=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

12.10 $F=3x_1^2-3x_2^2+4x_3^2+8x_1x_2$;

12.11 $F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$;

12.12 $F=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$;

12.13 $F=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$;

12.14 $F=-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$;

12.15 $F=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$;

12.16 $F=2x_1^2-2x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-4x_2x_3$;

12.17 $F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

12.18 $F=3x_1^2-9x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

12.19 $F=2x_1^2+5x_2^2+8x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$;

12.20 $F = 4x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

12.21 $F = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3$;

12.22 $F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;

12.23 $F = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

12.24 $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 10x_1x_2$;

12.25 $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;

12.26 $F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;

12.27 $F = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$;

12.28 $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$;

12.29 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 18x_1x_2$;

12.30 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 + 36x_1x_2$.

13 Исследовать кривую второго порядка. Привести, уравнение кривой к каноническому виду. Построить график кривой, приведенной в каноническом виде, в новой системе координат. Определить формулы перехода от старых координат, в которых задана кривая, к новым координатам. Указать в старых координатах координаты начала новой системы координат. Определить характеристики полученной кривой второго порядка, которая задана в каноническом виде в новой системе координат.

13.1 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$; 13.2 $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$;

13.3 $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0$; 13.4 $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y - 1 = 0$;

13.5 $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$; 13.6 $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

13.7 $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$; 13.8 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$;

13.9 $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$; 13.10 $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 9 = 0$;

13.11 $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$; 13.12. $4xy - 8x - 8y - 1 = 0$;

13.13 $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

13.14 $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

13.15 $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$; 13.16 $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$;

13.17 $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$; 13.18 $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;

13.19 $7x^2 - +16xy - 23y^2 - 14x - -16y - 218 = 0$; 13.20 $4xy + 4x - 4y - 6 = 0$;

13.21 $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$; 13.22 $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0$;

13.23 $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$; 13.24 $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0$;

13.25 $4x^2 + 17xy + 4y^2 - x - 4y - 3 = 0$; 13.26 $7x^2 - 50xy + 7y^2 + x - 2y + 7 = 0$;

13.27 $x^2 + 6xy + 9y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$; 13.28 $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$;

13.29 $9x^2 + 6xy + y^2 - x + 2y - 4 = 0$; 13.30 $x^2 - 5xy + 6y^2 - x + y + 1 = 0$.

## РАЗДЕЛ 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
3. Правила предельного перехода для числовых последовательностей.
4. Предел функции в точке.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
6. Сравнение бесконечно малых функций.
7. Правила предельного перехода для функций.
8. Первый и второй замечательные пределы.
9. Непрерывность функции в точке и на множестве (различные определения непрерывности, их эквивалентность).
10. Односторонняя непрерывность.
11. Точки разрыва функции и их классификация.
12. Свойства непрерывных функций на отрезке.
13. Комплексные числа.

### ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

14 Доказать, что предел числовой последовательности $(x_n)$ равен $a$. Определить номер $N(e)$ такой, что $|x_n - a| < e$ при всех $n > N(e)$, если $e = 0{,}00035$ для номеров задач, которые заканчиваются четной цифрой, и $e = 0{,}00065$ для номеров задач, которые заканчиваются нечетной цифрой.

14.1 $x_n = \dfrac{2n-3}{3n+2}$, $a = \dfrac{2}{3}$; 14.2 $x_n = \dfrac{3n-4}{4n+5}$, $a = \dfrac{3}{4}$; 14.3 $x_n = \dfrac{4n-1}{5n-2}$, $a = \dfrac{4}{5}$;

14.4 $x_n = \dfrac{7n-3}{3n+5}$, $a = \dfrac{7}{3}$; 14.5 $x_n = \dfrac{2-8n}{n+5}$, $a = -8$; 14.6 $x_n = \dfrac{n+1}{5n-2}$, $a = \dfrac{1}{5}$;

14.7 $x_n = \dfrac{4n-8}{9n+2}$, $a = \dfrac{4}{9}$; 14.8 $x_n = \dfrac{6n-1}{4n+3}$, $a = \dfrac{3}{2}$; 14.9 $x_n = \dfrac{6-7n}{2+4n}$, $a = -\dfrac{7}{4}$;

14.10 $x_n = \dfrac{4n-9}{2n+2}$, $a = 2$; 14.11 $x_n = \dfrac{3n-4}{4n+5}$, $a = \dfrac{3}{4}$; 14.12 $x_n = \dfrac{3n-1}{6n-2}$, $a = \dfrac{1}{2}$;

14.13 $x_n = \dfrac{5n-1}{2n+5}$, $a = \dfrac{5}{2}$; 14.14 $x_n = \dfrac{n-4}{n+5}$, $a = 1$; 14.15 $x_n = \dfrac{9n-1}{3n-1}$, $a = 3$;

14.16 $x_n = \dfrac{n-7}{3n+5}$, $a = \dfrac{1}{3}$; 14.17 $x_n = \dfrac{2n+6}{6n+9}$, $a = \dfrac{1}{3}$; 14.18 $x_n = \dfrac{4n-1}{n-2}$, $a = 4$;

14.19 $x_n = \dfrac{5n+3}{7n+2}$, $a = \dfrac{5}{7}$; 14.20 $x_n = \dfrac{8n+64}{3n+5}$, $a = \dfrac{8}{3}$; 14.21 $x_n = \dfrac{9n-1}{2n+2}$, $a = \dfrac{9}{2}$;

14.22 $x_n = \dfrac{11n-3}{3n+2}$, $a = \dfrac{11}{3}$; 14.23 $x_n = \dfrac{8n-9}{9n-8}$, $a = \dfrac{8}{9}$; 14.24 $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$, $a = 1$;

14.25 $x_n = \dfrac{n-3}{3n+9}, \quad a = \dfrac{1}{3}$; 14.26 $x_n = \dfrac{7n-4}{8n+5}, \quad a = \dfrac{7}{8}$; 14.27 $x_n = \dfrac{6n-6}{5n-2}, \quad a = \dfrac{6}{5}$;

14.28 $x_n = \dfrac{8n-7}{9n+6}, \quad a = \dfrac{8}{9}$; 14.29 $x_n = \dfrac{5n-4}{4n-5}, \quad a = \dfrac{5}{4}$; 14.30 $x_n = \dfrac{3n+1}{2n-2}, a = \dfrac{3}{2}$.

15 Доказать (определить существование $d(e)$ и указать значение числа $d$ для значения $e = 0{,}001 \cdot m$, где $m$ – номер варианта), что

15.1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$; 15.2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5$; 15.3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x-3} = 7$;

15.4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} = 6$; 15.5 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x-2} = 8$; 15.6 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1} = 2$;

15.7 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+4x-21}{x-3} = 10$; 15.8 $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{9x^2-4}{3x-2} = 4$; 15.9 $\lim\limits_{x\to -\frac{6}{7}} \dfrac{49x^2-36}{7x+6} = -12$;

15.10 $\lim\limits_{x\to -\frac{4}{5}} \dfrac{25x^2-16}{5x+4} = -8$; 15.11 $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}} \dfrac{9x^2-25}{3x+5} = -10$; 5.12 $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}} \dfrac{16x^2-9}{4x-3} = 6$;

15.13 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x+3} = -2$; 15.14 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2} = -1$; 15.15 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} = -1$;

15.16 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} = 1$; 15.17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2} = 7$; 15.18 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x+1} = 3$;

15.19 $\lim\limits_{x\to \frac{5}{6}} \dfrac{36x^2-25}{6x-5} = 10$; 15.20 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}} \dfrac{16x^2-1}{4x+1} = -2$; 15.21 $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}} \dfrac{9x^2-16}{3x-4} = 8$;

15.22 $\lim\limits_{x\to \frac{3}{8}} \dfrac{64x^2-9}{8x-3} = 6$; 15.23 $\lim\limits_{x\to \frac{5}{9}} \dfrac{81x^2-25}{9x-5} = 10$; 15.24 $\lim\limits_{x\to \frac{7}{2}} \dfrac{4x^2-49}{2x-7} = 14$;

15.25 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+x-30}{x-5} = 11$; 15.26 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+x-20}{x-4} = 9$; 15.27 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = 1$;

15.28 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x-1} = 8$; 15.29 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x-4} = 7$; 15.30 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+7x+6}{x+1} = 5$.

16 Найти предел числовой последовательности или предел функции. В четвертом пункте (г) предположите формулу общего члена числовой последовательности, который удовлетворяет первым трем указанным членам, записанным под знаком предела, а заменив им параметр $T$, найти указанный предел последовательности.

`16.1 а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+5)^3-(3n+2)^3}{n^3+3n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left( n^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+2} \right) \right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+2}\right)^{3n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3+x-30}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{7-2x}{x-2}\right)^{tg\frac{p x}{6}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{30x-1}{x+2}\right)^{30x-1}$.

16.2 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)^3-(2n-4)^3}{3n^3+5n+6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^3-1}-\sqrt{n^3-5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+8}{9n-4}\right)^{3n-7}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+9x-22}{x^3-x^2-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 29}\dfrac{\sqrt{x-28}-1}{x^2+x-870}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x\cdot tg 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 4x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x-1}{29x+2}\right)^{29x-1}$.

16.3 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+8)^3-(3n-5)^3}{15n^3+7n-9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{7}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^7+8}-\sqrt{n^7-7}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n^2+8}{8n^2-3}\right)^{6n^2-5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^3+x^2-80}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-6}-2}{x^2+2x-35}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{tg 7x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\sin 4x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{32x-6}{26x+2}\right)^{28x-1}$.

16.4 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7n-1)^3-(2n-7)^3}{24n^3+9n+8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{n+6}-\sqrt{2n-9}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9-5n}{1-5n}\right)^{4n+9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 28}\dfrac{3x^2+28x-3136}{x^3-5x^2-18032}$;

е) $\lim\limits_{x\to 28}\dfrac{\sqrt{x^2-775}-3}{5x^2+x-3948}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{tg 6x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{tg 9x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{38x-8}{9x+9}\right)^{27x-7}$.

16.5 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(2n-7)^3}{15n^2+9n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{9}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^9-4}-\sqrt{2n^9+8}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8-7n}{6-7n}\right)^{5n+8}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot 8}+\dfrac{1}{9\cdot 11}+\dfrac{1}{12\cdot 14}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{2x^2+x-1485}{x^3+3x^2-21870}$;

е) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt{x-2}-5}{3x^2+2x-2241}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin x}{\sin 6x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4-x}{x-2}\right)^{\frac{1}{\sin p x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-8}{7x+9}\right)^{7x}$.

16.6 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+3n-2}{(2n+5)^3+(5n+2)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((8n-1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{8n-3}-\sqrt[3]{125n+8}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n-4}{9n+7}\right)^{5n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^3-x-120}$;

е) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{x^2-10x-375}{\sqrt{x}-5}$; ж) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{tg 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{tg\frac{p x}{2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{24x-1}{x+5}\right)^{27x-1}$.

16.7 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+5n^2-4}{(3n+4)^3+(2n+1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{n-3}-\sqrt[3]{8n+8}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-2}\right)^{2n-5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2}{6}+\dfrac{9+4}{36}+\dfrac{27+8}{216}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-7x-9}{4x^3-3x^2+7}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{\sqrt{x+4}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 6x}{5x\cdot tg 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{tgx}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{17x-1}{9x+2}\right)^{29x-1}$.

16.8 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-n^2-n+2}{(3n+1)^4+n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+9)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{625n-3}-1\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-5n^2+8}{-5n^2-1}\right)^{2n-6}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{9}+\dfrac{6}{16}+\dfrac{9}{25}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-3x^2+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+4x-60}{\sqrt{2x-4}-2\sqrt{2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x^2-x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-6}{7x+2}\right)^{28x-1}$.

16.9 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2}{(n+1)^4+n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-7)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{216n^2}-\sqrt[3]{n^2+8}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9+8n}{1+8n}\right)^{7n+9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 14}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3}{x^3+x^2-12}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{7\cdot x+6}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}tg 5x}{\arcsin 7x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x}{6x+2}\right)^{8x-1}$.

16.10 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+4n^2-n}{3(n+4)^3+2(4-3n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{343n^2-1}-\sqrt[3]{27n^2+2}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8+7n}{6+6n}\right)^{6n-8}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{6}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{3x^3+x^2-28}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9}{\sqrt[3]{4\cdot x+7}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 5x}{tg 7x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{p x}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{9x-8}{5x+9}\right)^{5x^3+8}$.

16.11 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(2n+1)^3}{2n^3+n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{2n^2+2}-\sqrt{2n^2+6}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{2n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 9}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2+x-132}{x^3+x-1342}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2+x-30}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{7-2x}{7x-20}\right)^{tg\frac{7p x}{2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{28x-1}{3x+2}\right)^{28x+1}$.

16.12 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n-2)^3-(4n-4)^3}{4n^3+6n+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{7}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^7+6}-\sqrt{n^7-25}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n+9}{10n-7}\right)^{8n-6}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+9x-36}{x^3+x^2-36}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4x^2+x-39}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x\cdot tg4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin 5x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-1}{29x+2}\right)^{29x-1}$.

16.13 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+8)^3-(n-5)^3}{5n^2+7n-9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{32n^5+8}-\sqrt{n^5-4}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9n^2+3}{9n^2-6}\right)^{2n^2+n-5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-x-20}{x^3-x^2-100}$;

е) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{5x+6}-6}{x^2+x-42}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{tgx}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\sin x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{31x-6}{22x+2}\right)^{27x+91}$.

16.14 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(2n-3)^3}{4n^3+9n^2-8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^5+16}-\sqrt{4n^5+9}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-4n}{2-4n}\right)^{3n+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+8x-28}{3x^3-x^2-20}$;

е) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x^2-64}-8}{5x^2+x-328}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{tg7x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{tg5px}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{9x-1}{8x+9}\right)^{7x-9}$.

16.15 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)^3-(3n+5)^3}{15n^4+9n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{n^3-4}-\sqrt{27n^3+1}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4-5n}{2-5n}\right)^{6n+8}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 27}\frac{2x^2+x-1485}{x^3+3x^2-21870}$;

е) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2+2x-63}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+\sin 3x}{\sin 5x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{7-2x}{4-x}\right)^{\frac{1}{tgpx}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{7x-1}{2x+12}\right)^{6x}$.

16.16 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n-2}{(5n+1)^3+(5n+6)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((32n-1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{64n-4}-\sqrt[3]{64n+5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{3n+1}\right)^{2n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{(n-1)^2}+\frac{4}{(n-1)^2}+\frac{5}{(n-1)^2}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

е) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+10x-56}{\sqrt{x}-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\cos 5x}{tg2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3-2x}{2x-1}\right)^{tg\frac{px}{2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x-1}{3x+5}\right)^{7x-1}$.

16.17 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^4+5n^2-4}{(2n+4)^3+(5n+1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((64n+8)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{125n^2+9}-\sqrt[3]{8n^2-4}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+9}{6n-1}\right)^{2n-9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+1}{1}+\dfrac{1+8}{4}+\dfrac{1+27}{9}+...+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{4x^3-x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+33}-6}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos9x}{5x\cdot tg6x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}(\cos7x)^{\frac{1}{tg3x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x-3}\right)^{27x+8}$.

16.18 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-n^2-3n+1}{(3n+1)^3+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((625n+1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{8n^2+3}-1\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-5n^2}{7-5n^2}\right)^{2n^2+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{16}+\dfrac{8}{25}+\dfrac{11}{36}+...+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+7x^2-8}{x^3-x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-x-42}{\sqrt{2x-5}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x-\sin2x}{3x^2-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+8x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{9x-9}{10x+1}\right)^{8x-5}$.

16.19 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{(2n+1)^4+n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((8n-4)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{8n^2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+6n}{5+6n}\right)^{3n+4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot12}+\dfrac{1}{12\cdot15}+...+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-3x^3}{x^3+x^2-36}$;

е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{7\cdot x+29}-4}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arc}tg6x}{\arcsin9x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}(\cos3x)^{\frac{1}{x^2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{7x}{8x+1}\right)^{9x-8}$.

16.20 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3+9n^2-6n-7}{4(2n+7)^3+3(7-2n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((8n+1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{64n^2+21}-\sqrt[3]{27n^2+21}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9+2n}{8+2n}\right)^{3n-7}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{7}+...+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x^3+x^2-80}$;

е) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2+x-42}{\sqrt[3]{4\cdot x+3}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin9x+\sin x}{tgx}$; з) $\lim\limits_{x\to3}\left(tg\dfrac{p\,(x-2)}{4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{5x-1}{x+2}\right)^{5x}$.

16.21 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+5)^3-(3n+2)^3}{4n^3+5n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((9n)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{4n^2+2}-\sqrt{9n^2+1}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{6n+2}\right)^{3n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot10}+...+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{x^2+x-110}{x^3+x-1010}$;

е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2+4x-12}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{tg4x}$; з) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{5+2x}{7x-5}\right)^{tg\frac{3px}{4}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{7x-1}{3x+2}\right)^{2x+1}$.

16.22 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+3)^3-(2n+2)^3}{2n^3+3n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{7}{2}}\cdot\left(\sqrt{9n^7+1}-\sqrt{4n^7-5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12n+4}{12n-3}\right)^{7n-5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2+7x-60}{x^3-x^2-100}$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+8}-4}{x^2+x-20}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 4x}{2\cdot x\cdot tg3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{9x+2}\right)^{9x-8}$.

16.23 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n-8)^3}{3n^2+6n-9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{16n^5+1}-\sqrt{8n^5-5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+1}{7n^2-5}\right)^{3n^2+2n-4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 12}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{2x^3-x^2-112}$;

е) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x^2-x-30}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 5x}{tg3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{\sin 5p x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{11x-6}{6x+2}\right)^{9x+9}$.

16.24 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-6)^3+(n-9)^3}{9n^3+6n^2-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((9n)^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{16n^5+1}-\sqrt{4n^5+5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4-5n}{3-5n}\right)^{4n+2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+7x-26}{5x^3-x^2-36}$;

е) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x^2-80}-1}{x^2-81}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 9x}{tg6x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{1}{tg6p x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{8x-7}{9x+7}\right)^{3x-5}$.

16.25 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6n-5)^3-(6n+2)^3}{5n^2+7n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((9n)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{25n^3-4}-\sqrt{36n^3+1}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5-6n}{3-6n}\right)^{7n+9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 18}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^3+x^2-28}$;

е) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-5}-2}{x^2+2x-99}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x+\sin 7x}{\sin 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{10-x}{42-5x}\right)^{\frac{1}{tgp x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{8x-7}{5x+19}\right)^{2x}$.

16.26 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+4n^2-1}{(3n+9)^3+(2n+3)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((125n-1)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{n-7}-\sqrt[3]{8n+9}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{3n-9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{(n-2)^2}+\frac{5}{(n-2)^2}+\frac{6}{(n-2)^2}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x-4}$.

е) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\cos 7x}{tg2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{5-2x}{2x-3}\right)^{tg\frac{p x}{4}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x-3}{4x+8}\right)^{6x-5}$.

16.27 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n^3+5n-9}{(3n+1)^3+(5n+1)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-8)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{125n^2+8}-\sqrt[3]{8n^2-27}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n+7}{8n-1}\right)^{3n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{4x^3-x-475}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+35}-6}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 6x}{2\cdot x\cdot tg 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 9x\right)^{\frac{1}{tg 4x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x-7}{5x-6}\right)^{24x+5}$.

16.28 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-3n^2-9n+6}{(5n+2)^3+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((625n+8)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{27n^2+8}-1\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8-6n^2}{4-6n^2}\right)^{9n^2+8}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{25}+\dfrac{9}{36}+\dfrac{12}{49}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^4+x^2-36}{2x^4-16x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-x-56}{\sqrt{3x-8}-4}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 7x}{2x^2-5x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{8x^2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{10x-5}{11x+7}\right)^{3x-9}$.

16.29 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+5}{(3n+8)^4+2n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-4)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n^2+5}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+7n}{6+7n}\right)^{4n+5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\dfrac{1}{13\cdot 16}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-4x^3}{x^3+2x^2-96}$;

е) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x+19}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc}tg 9x}{\arcsin 8x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 5x\right)^{\frac{1}{4x^2}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{9x}{5x+6}\right)^{3x-7}$.

16.30 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n-30}{2(3n+1)^3+6(5-n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((125n+6)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{8n^2+2}-\sqrt[3]{64n^2+1}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10+3n}{9+3n}\right)^{4n-9}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{7}+\dfrac{9}{8}+\ldots+T\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+12x^2-13}$;

е) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+x-56}{\sqrt[3]{4\cdot x-1}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 6x}{tg 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 5}\left(tg\dfrac{p(x-4)}{4}\right)^{\frac{1}{x-5}}$; и) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+9}\right)^{7x}$.

17 Пусть заданы функции $j(x)=\left(m+1\right)^{\frac{(-1)^m\cdot m}{x^2+(-1)^m\cdot(2\cdot m+4)\cdot x+m^2+4\cdot m+3}}$,
$y(x)=\log_{m+4}\left|\dfrac{x-m-1}{x-m-3}\right|$, $g_1(x)=(-1)^m\dfrac{x-m-2}{x-m-2}$, $g_2(x)=(-1)^m\dfrac{\sin(x-m-2)}{\sin(x-m-2)}$,
$g_3(x)=(-1)^m\dfrac{\cos(x-m-2)}{\cos(x-m-2)}$, $g_4(x)=(-1)^m\dfrac{tg(x-m-2)}{tg(x-m-2)}$,
$g_5(x)=(-1)^m\dfrac{\operatorname{ctg}(x-m-2)}{\operatorname{ctg}(x-m-2)}$, где число $m$ – номер варианта выполнения типового расчета. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность на множестве действительных чисел. Установить точки разрыва функции $y=f(x)$, указав ее аналитический вид, и провести классификацию точек разрыва, если они существуют . Выполнить схематический чертеж графика функции $y=f(x)$. Исходя из вариантов выполнения типового расчета, функция $y=f(x)$ определяется следующим образом:

– $f(x) = -y\,(x) + g_1(x)$, если номер вашего варианта $m \in \left\{5k-4 \middle| k \in \Box \right\}$;

– $f(x) = j\,(x) + g_2(x)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-3 \middle| k \in \Box \right\}$;

– $f(x) = -5 \cdot y\,(2x) + 4 \cdot g_3(3x)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-2 \middle| k \in \Box \right\}$;

– $f(x) = 3 \cdot j\,(3x) - 3 \cdot g_4(2x)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-1 \middle| k \in \Box \right\}$;

– $f(x) = j\,(4x) + 2 \cdot g_5(x)$, если номер варианта $m \in \left\{5k \middle| k \in \Box \right\}$.

18 Определить точки разрыва функции $y = f(x)$, если они существуют. Выполнить схематический чертеж графика функции. Для определения функции $y = f(x)$ заданы функции : $j_1(x) = (-1)^m \cdot x$, $j_2(x) = (-1)^m \cdot \cos x$, $j_3(x) = (-1)^m \cdot \sin x$, $j_4(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{tg} x$, $j_5(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{ctg} x$, $j_6(x) = (-1)^{m+1} \cdot \log_{m+1} x$, $j_7(x) = (-1)^m \cdot m^x$. Исходя из номеров $m$, вариантов выполнения типового расчета, функция $y = f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} j_1^{-1}(mx), \ x < 0; \\ j_2(mx), \ 0 \le x \le \dfrac{p}{2m}; \\ (-1)^m \cdot j_1^2\left(mx - \dfrac{p}{2}\right) + m, \ x > \dfrac{p}{2m}, \end{cases} \qquad \text{если номер варианта } m \in \left\{5k-4 \middle| k \in \Box \right\};$$

$$f(x) = \begin{cases} j_1(m^2x^2), \text{ если } x < \dfrac{p}{2m}; \\ j_5(mx), \text{ если } \dfrac{p}{2m} \le x \le \dfrac{p}{m}; \\ j_1(mx) + (-1)^{m+1}p, \text{ если } x > \dfrac{p}{m}, \end{cases} \qquad \text{если номер варианта } m \in \left\{5k-3 \middle| k \in \Box \right\};$$

$$f(x) = \begin{cases} -j_1(m^3x^3), \text{ если } x \le 0; \\ j_6\left(\dfrac{x}{m}\right), \text{ если } 0 \le x \le m; \\ j_7\left(\dfrac{x}{m}\right), \text{ если } x > m, \end{cases} \qquad \text{если номер варианта } m \in \left\{5k-2 \middle| k \in \Box \right\};$$

$$f(x)=\begin{cases} 1-j_1(m^2x^2), \text{ если } x<0; \\ j_4\left(\dfrac{x}{m}\right), \text{ если } 0\le x<\dfrac{mp}{2}; \\ \sqrt[3]{j_1\left(\dfrac{x}{m}\right)}, \text{ если } x>\dfrac{mp}{2}, \end{cases}$$ если номер варианта $m\in\left\{5k-1\middle|k\in\square\right\}$;

$$f(x)=\begin{cases} j_1(m^2x^2)+1, \text{ если } x\le 0; \\ j_3\left(\dfrac{x}{m}\right), \text{ если } 0<x\le\dfrac{mp}{2}; \\ j_1^{-1}\left(\dfrac{x}{m}-\dfrac{p}{2}\right), \text{если } x>\dfrac{mp}{2}, \end{cases}$$ если номер варианта $m\in\left\{5k\middle|k\in\square\right\}$.

## РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

### ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Производная функции в точке.
2. Геометрический и механический смысл производной.
3. Теорема о дифференцировании суммы функций.
4. Теорема о дифференцировании произведения функций.
5. Теорема о дифференцировании частного функций.
6. Дифференцирование обратной функции.
7. Дифференцирование сложной функции.
8. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
9. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций заданных неявно.
10. Производные высшего порядка. Механический смысл производной второго порядка.
11. Дифференцируемость функций. Дифференциал и его геометрический смысл.
12. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши.
13. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов функции по правилу Лопиталя – Бернулли.
14. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
15. Представление функций $y=(1+x)^m$, $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\ln(1+x)$ по формуле Тейлора.

16. Монотонные функции. Необходимые и достаточные условия монотонности функции.
17. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума функции. Достаточные условия существования экстремума функции.
18. Глобальный экстремум функции на отрезке.
19. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости, вогнутости функции на интервале.
20. Точки перегиба графика функции. Необходимые и достаточные условия существования у функции точек перегиба.
21. Асимптоты графика функции. Нахождение вертикальных и наклонных асимптот.

## ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

19 Пусть заданы функции: $j_1(x) = (-1)^m \cdot x$, $j_2(x) = (-1)^m \cdot \cos x$, $j_3(x) = (-1)^m \cdot \sin x$, $j_4(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{tg} x$, $j_5(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{ctg} x$, $j_6(x) = (-1)^{m+1} \cdot \log_{m+1} x$, $j_7(x) = (-1)^m \cdot m^x$, $j_8(x) = (-1)^m \cdot \arccos x$, $j_9(x) = (-1)^m \cdot \arcsin x$, $j_{10}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{arctg} x$, $j_{11}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{arcctg} x$, $j_{12}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{sh} x$, $j_{13}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{ch} x$, $j_{14}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{th} x$, $j_{15}(x) = (-1)^m \cdot \mathrm{cth} x$, где число $m$ – номер варианта. Записать условие задания исходя из номера варианта.

1) найти производную функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = m$ по определению.

$f(x) = j_1^{-m}(mx)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-4 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_2(mx)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-3 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_3(mx)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-2 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_6(mx)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-1 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_7(mx)$, если номер варианта $m \in \left\{5k \middle| k \in \square \right\}$.

2) найти производные и дифференциалы функции $y = f(x)$ первого и второго порядков.

$f(x) = j_2(j_7(mx)) \cdot j_{12}(mx+2m) + j_7^m(p)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-4 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_3(j_1^m(mx)) \cdot j_{13}(mx-m) + j_1^m(p)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-3 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_7(j_{12}(mx)) \cdot j_2(mx+p) + j_8(0)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-2 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_1(j_2^m(mx)) \cdot j_{12}(mx+m) + j_9\left(\dfrac{1}{m}\right)$, если номер варианта $m \in \left\{5k-1 \middle| k \in \square \right\}$;

$f(x) = j_{13}(j_3(mx)) \cdot j_1^m(mx-m) - j_{15}(m)$, если номер варианта $m \in \left\{5k \middle| k \in \square \right\}$.

3) найти производную функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

$f(x) = \dfrac{e^{j_{10}^{m}(mx)}}{j_8^m(mx)} + j_3^{2m}(m)$, если номер варианта $m \in \{5k-4 | k \in \square\}$;

$f(x) = \dfrac{j_1^{\frac{m}{3}}(mx^2+mx+1)}{j_{13}^m(mx)} + j_{12}^{2m}(m+1)$, если номер варианта $m \in \{5k-3 | k \in \square\}$;

$f(x) = \dfrac{j_4^{\frac{m}{5}}(mx^2)}{j_7\left(\dfrac{x^m}{m}\right)} + j_9^m\left(\dfrac{2}{m}\right)$, если номер варианта $m \in \{5k-2 | k \in \square\}$;

$f(x) = \dfrac{j_{14}^{\frac{m}{5}}(mx+1)}{j_2^m(mx^{m-2})} + 3 \cdot j_5\left(\dfrac{p\,m}{5}\right)$, если номер варианта $m \in \{5k-1 | k \in \square\}$;

$f(x) = \dfrac{j_{12}^{\frac{m}{4}}(mx^3)}{j_{11}^m(mx)} - 2 \cdot j_4\left(\dfrac{mp}{3}\right)$, если номер варианта $m \in \{5k | k \in \square\}$.

4) найти производную первого порядка функции $y = f(x)$.

$f(x) = \left(j_{15}(mx^m)\right)^{j_8(mx^{-m})}$, если номер варианта $m \in \{5k-4 | k \in \square\}$;

$f(x) = \left(j_{14}(mx^{m-1})\right)^{j_5(m(x+m)^m)}$, если номер варианта $m \in \{5k-3 | k \in \square\}$;

$f(x) = \left(j_{13}(mx^{2m})\right)^{j_9\left(\frac{m}{x}\right)}$, если номер варианта $m \in \{5k-2 | k \in \square\}$;

$f(x) = \left(j_{12}\left(\dfrac{m}{x}\right)\right)^{j_4(mx^2+mx+1)}$, если номер варианта $m \in \{5k-1 | k \in \square\}$;

$f(x) = \left(j_{11}((m+1)x^{m+1})\right)^{j_3(mx^m)}$, если номер варианта $m \in \{5k | k \in \square\}$.

5) продифференцировать функцию, которая задана неявно.

$j_1^m(mx) \cdot j_{15}(y^m+m) + j_6^m(x^m \cdot y^{m+1}) = e^p$, если номер варианта $m \in \{5k-4 | k \in \square\}$;

$j_2^m\left(\dfrac{m}{x}\right) \cdot j_{14}(my^m) + j_7^{1/m}(x^m + 2y^{m-1}) = p^e$, если номер варианта $m \in \{5k-3 | k \in \square\}$;

$j_3^m(x^m) \cdot j_{13}(y^{-m}) + j_8^m(x^m \cdot y^m) = \log_2 m$, если номер варианта $m \in \{5k-2 | k \in \square\}$;

$j_4^{-m}(x^m) \cdot j_{12}(my^m) - m \cdot j_6^m\left(\dfrac{x^{\frac{1}{m}}}{y^m}\right) = \mathrm{tg}\dfrac{mp}{3}$, если номер варианта $m \in \{5k-1 | k \in \square\}$;

$j_5^{-m}\left(\dfrac{m}{x}\right) \cdot j_{11}\left(\dfrac{y^m}{m}\right) + j_{10}^{1/m}(x^m - y^m) = \cos\dfrac{mp}{3}$, если номер варианта $m \in \{5k | k \in \square\}$.

6) найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$x(t) = j_2^{\,m}(mt),\ y(t) = j_3^{\,m}(mt)$, если номер варианта $m \in \{5k-4 \mid k \in \square\}$;

$x(t) = j_{12}^{\,m}(mt),\ y(t) = j_{13}^{\,m}(mt)$, если номер варианта $m \in \{5k-3 \mid k \in \square\}$;

$x(t) = j_1^{\,m}(mt),\ y(t) = j_1^{\,m+2}(mt)$, если номер варианта $m \in \{5k-2 \mid k \in \square\}$;

$x(t) = j_7^{\,m}(mt),\ y(t) = j_1(mt)$, если номер варианта $m \in \{5k-1 \mid k \in \square\}$;

$x(t) = j_6(mt),\ y(t) = j_1(mt^2 + mt + m)$, если номер варианта $m \in \{5k \mid k \in \square\}$.

7) найти производную n-го порядка. Доказать полученную формулу методом математической индукции.

$f(x) = j_1^{-1}(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k-4 \mid k \in \square\}$;

$f(x) = j_7(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k-3 \mid k \in \square\}$;

$f(x) = j_2(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k-2 \mid k \in \square\}$;

$f(x) = j_{12}(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k-1 \mid k \in \square\}$;

$f(x) = j_6(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k \mid k \in \square\}$.

20 С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины с точностью до четырех знаков после запятой. Оценить абсолютную погрешность и относительную погрешность вычисления.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20.1 | $\sin 28^0$. | 20.2 | $\cos 57^0$. | 20.3 | $\mathrm{tg} 43^0$. |
| 20.4 | $\mathrm{ctg} 46^0$. | 20.5 | $\arcsin 0{,}43$. | 20.6 | $\arccos 0{,}62$. |
| 20.7 | $\mathrm{arctg} 0{,}91$. | 20.8 | $\mathrm{arcctg} 1{,}22$. | 20.9 | $\ln(e^3 + 0{,}15)$. |
| 20.10 | $\sqrt{15{,}94}$. | 20.11 | $\sqrt[3]{8{,}15}$. | 20.12 | $\sqrt[5]{31{,}95}$. |
| 20.13 | $5^{2{,}01}$. | 20.14 | $\sqrt[4]{80{,}78}$. | 20.15 | $\lg 100{,}02$. |
| 20.16 | $\sqrt{\sin 33^0}$. | 20.17 | $\cos^3 62^0$. | 20.18 | $\mathrm{tg}^2 48^0$. |
| 20.19 | $\sqrt[3]{\mathrm{ctg} 44^0}$. | 20.20 | $\arcsin^2 0{,}54$. | 20.21 | $\arccos^3 0{,}57$. |
| 20.22 | $\mathrm{arctg}^2 1{,}05$. | 20.23 | $\mathrm{arcctg}^3 0{,}93$. | 20.24 | $\ln(e^4 - 0{,}25)$. |
| 20.25 | $\sqrt{(8{,}97)^3}$. | 20.26 | $\sqrt[3]{(26{,}75)^2}$. | 20.27 | $\sqrt[10]{(1023{,}99)^9}$. |
| 20.28 | $e^{3{,}91}$. | 20.29 | $\sqrt[4]{(624{,}87)^5}$. | 20.30 | $\lg^2 999{,}92$. |

21 Используя правило Лопиталя, найти указанные пределы.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21.1 | $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x}$. | 21.2 | $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{px}{2}}$. | 21.3 | $\lim\limits_{x\to 0}(\ln \sin x)^{x^2}$. |
| 21.4 | $\lim\limits_{x\to 1}\left(\cos\dfrac{px}{2}\right)^{\mathrm{tg} px}$. | 21.5 | $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\mathrm{ctg} 3x}$. | 21.6 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{sh} 2x}\right)^{\sin 2x}$. |

21.7 $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-x\right)^{x^3-5x+2}$.

21.8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lg(10+x)\right)^{1/x}$.

21.9 $\lim\limits_{x\to p/2}\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\mathrm{ctg}3x}$.

21.10 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sin\dfrac{px}{2}\right)^{x^2-4}$.

21.11 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ch}3x)^{1/tg2x}$.

21.12 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin 7x}$.

21.13 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\ln(5-x)\right)^{\mathrm{sh}(4-x)}$.

21.14 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)^{1/\ln(3-x)}$.

21.15 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$.

21.16 $\lim\limits_{x\to 8}\left(tg\dfrac{px}{8}\right)^{\sin px}$.

21.17 $\lim\limits_{x\to p/2}(\sin x)^{1/\mathrm{ctg}(x)}$.

21.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{2/\ln x}$.

21.19 $\lim\limits_{x\to o}\left(\mathrm{th}3x\right)^{x^3}$.

21.20 $\lim\limits_{x\to p/4}(\mathrm{tg}x)^{1/(4x-p)}$.

21.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg 7x\right)^{1/x}$.

21.22 $\lim\limits_{x\to 0}\left(shx\right)^{\ln x^2}$.

21.23 $\lim\limits_{x\to p}(1-\sin x)^{\mathrm{ctg}5x}$.

21.24 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{\ln x}$.

21.25 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\mathrm{ctg}\dfrac{px}{4}\right)^{\cos(px/4)}$.

21.26 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{c}h6x)^{1/\mathrm{sh}6x}$.

21.27 $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{1}{x-9}\right)^{2x-18}$.

21.28 $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x\right)^{x-1}$.

21.29 $\lim\limits_{x\to p/4}(\mathrm{ctg}x)^{1/(8x-2p)}$.

21.30 $\lim\limits_{x\to p/2}\left(\mathrm{tg}3x\right)^{ctg3x}$.

22 Дана функция $y=f(x)$. Необходимо: а) составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке $x=x_0$; б) определить, под каким углом пересекаются кривая $y=f(x)$ и прямая $y=kx+b$; в) найти кинетическую энергию и ускорение тела массой $m_0$ килограмм, которое движется прямолинейно по закону движения $s=f(t)$, через $t_0$ секунды после начала движения.

22.1 $f(x)=x^3+4x^2+5x+1$, $x_0=2$, $k=3$, $b=8$, $m_0=10$ кг., $t_0=5$ с.

22.2 $f(x)=\sqrt{x+6}$, $x_0=3$, $k=1$, $b=4$, $m_0=8$ кг., $t_0=30$ с.

22.3 $f(x)=\sqrt[3]{16-x^3}$, $x_0=\sqrt[3]{15}$, $k=-1$, $b=4$, $m_0=11$ кг., $t_0=3$ с .

22.4 $f(x)=\dfrac{2^{3-x}}{\ln 2}$, $x_0=1$, $k=3$, $b=\dfrac{2-6\ln 2}{\ln 2}$, $m_0=10$ кг., $t_0=3$ с .

22.5 $f(x)=\ln 2\cdot\log_2(3x+4)$, $x_0=4$, $k=-1$, $b=2\ln 2$, $m_0=100$ кг., $t_0=20$ с .

22.6 $f(x)=\arcsin(x-1)$, $x_0=1$, $k=-2$, $b=\dfrac{6-p}{6}$, $m_0=50$ кг., $t_0=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ с .

22.7 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0=1$, $k=1$, $b=-\dfrac{9}{5}$, $m_0=28$ кг., $t_0=3$ с.

22.8 $f(x)=\dfrac{2^{x-4}}{\ln 2}$, $x_0=2$, $k=-4$, $b=\dfrac{1+32\ln 2}{4\ln 2}$, $m_0=5$ кг., $t_0=5$ с.

22.9 $f(x)=\sin\left(x-\frac{p}{3}\right)$, $x_0=\frac{p}{3}$, $k=-1$, $b=\frac{p+1}{2}$, $m_0=70$ кг., $t_0=\frac{2p}{3}$ с.

22.10 $f(x)=\operatorname{arcctg}(x+1)$, $x_0=-1$, $k=-2$, $b=\frac{p}{4}$, $m_0=105$ кг., $t_0=\left(\sqrt{3}-1\right)$ с.

22.11 $f(x)=2x^3+x^2+x+3$, $x_0=3$, $k=1$, $b=23$, $m_0=12$ кг., $t_0=7$ с.

22.12 $f(x)=\sqrt{2x+2}$, $x_0=1$, $k=-1$, $b=11$, $m_0=6$ кг., $t_0=17$ с.

22.13 $f(x)=\sqrt[3]{35-x^3}$, $x_0=3$, $k=-1$, $b=5$, $m_0=13$ кг., $t_0=1$ с.

22.14 $f(x)=\frac{3^{5-x}}{\ln 3}$, $x_0=2$, $k=2$, $b=\frac{9-6\ln 3}{\ln 3}$, $m_0=20$ кг., $t_0=5$ с.

22.15 $f(x)=\ln 4\cdot\log_4(x+5)$, $x_0=59$, $k=-3$, $b=\ln 4-3$, $m_0=90$ кг., $t_0=11$ с.

22.16 $f(x)=\arccos(x-1)$, $x_0=1$, $k=2$, $b=\frac{2p-3}{3}$, $m_0=25$ кг., $t_0=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ с.

22.17 $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$, $x_0=2$, $k=2$, $b=\frac{11}{5}$, $m_0=24$ кг., $t_0=4$ с.

22.18 $f(x)=\frac{3^{x-3}}{\ln 3}$, $x_0=-1$, $k=-1$, $b=\frac{1+9\ln 3}{9\ln 3}$, $m_0=30$ кг., $t_0=4$ с.

22.19 $f(x)=\cos\left(x-\frac{p}{6}\right)$, $x_0=\frac{2p}{3}$, $k=1$, $b=\frac{1-p}{2}$, $m_0=80$ кг., $t_0=\frac{5p}{6}$ с.

22.20 $f(x)=\operatorname{arctg}(x-1)$, $x_0=1$, $k=-2$, $b=-\frac{p}{4}$, $m_0=175$ кг., $t_0=\left(\sqrt{3}+1\right)$ с.

22.21 $f(x)=x^3+2x^2+3x+2$, $x_0=4$, $k=2$, $b=50$, $m_0=14$ кг., $t_0=9$ с.

22.22 $f(x)=\sqrt{3x+19}$, $x_0=2$, $k=-1$, $b=3$, $m_0=4$ кг., $t_0=10$ с.

22.23 $f(x)=\sqrt[4]{128-x^4}$, $x_0=-2$, $k=1$, $b=0$, $m_0=15$ кг., $t_0=2$ с.

22.24 $f(x)=\frac{4^{2-x}}{\ln 4}$, $x_0=0$, $k=1$, $b=\frac{4-\ln 4}{\ln 4}$, $m_0=16$ кг., $t_0=2$ с.

22.25 $f(x)=\ln 3\cdot\log_3(2x+5)$, $x_0=11$, $k=-2$, $b=2\ln 3+4$, $m_0=10$ кг, $t_0=38$ с.

22.26 $f(x)=\operatorname{arctg}(x+1)$, $x_0=-1$, $k=-1$, $b=\frac{p}{4}$, $m_0=75$ кг., $t_0=\left(\sqrt{3}-1\right)$ с.

22.27 $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$, $x_0=3$, $k=3$, $b=-\frac{29}{10}$, $m_0=20$ кг., $t_0=4$ с.

22.28 $f(x)=\frac{4^{x-5}}{\ln 4}$, $x_0=5$, $k=-2$, $b=\frac{1+96\ln 4}{16\ln 4}$, $m_0=12$ кг., $t_0=6$ с.

22.29 $f(x)=\frac{16+x^4}{x^4}$, $x_0=-2$, $k=1$, $b=16$, $m_0=256$ кг., $t_0=2$ с.

22.30 $f(x)=\arcsin(2-x)$, $x_0=2$, $k=2$, $b=\frac{p-18}{6}$, $m_0=125$ кг., $t_0=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ с.

23 Найти наибольшее $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и наименьшее $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

23.1 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - 3\cos x - 2x, \left[0;p\right].$

23.2 $f(x) = \sin x + \sin 2x - x, \left[0;2p\right].$

23.3 $f(x) = -\cos x + \sin x - 1, \left[-\frac{p}{2};p\right].$

23.4 $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 2x, [-\frac{p}{2};\frac{p}{2}].$

23.5 $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{6}\sin 6x - x, \left[0;p\right].$

23.6 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x, [-p;p].$

23.7 $f(x) = 12\cos x + 6\cos 2x + 4\cos 3x + 3\cos 4x, \left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right].$

23.8 $f(x) = 3\cos 5x - 5\sin 3x, \left[0;\frac{p}{2}\right].$

23.9 $f(x) = \cos 3x - \sin 3x, \left[0;p\right].$

23.10 $f(x) = 3x - \frac{5}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 4x, \left[-\frac{p}{2};\frac{5p}{6}\right].$

23.11 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x, [-p;p].$

23.12 $f(x) = \cos 2x + \sin x, \left[-\frac{p}{2};\frac{3p}{2}\right].$

23.13 $f(x) = \cos 6x - 15\cos 2x + 8, \left[\frac{p}{6};\frac{3p}{4}\right]$

23.14 $f(x) = 5\cos x + 2{,}5\sin 2x + 3x, \left[-\frac{p}{6};\frac{3p}{4}\right].$

23.15 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x, [-p;p].$

23.16 $f(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos x, \left[-\frac{p}{2};\frac{3p}{2}\right].$

23.17 $f(x) = \sin 2x - 2\cos x - 2x, \left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right].$

23.18 $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 6 \cdot \cos x + 6 \cdot \sin x + 6 \cdot x, \left[-\frac{p}{2};\frac{5p}{2}\right].$

23.19 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-4\cos x-4\sin x+4x,\left[-\frac{3p}{2};\frac{5p}{6}\right].$

23.20 $f(x)=-\frac{5}{2}\cdot\cos 2x+11\cdot\cos x-11\cdot\sin x+7\cdot x,\left[-\frac{p}{2};2p\right].$

23.21 $f(x)=-2\cos 2x+5\cdot\sin 2x-6x,\left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right].$

23.22 $f(x)=\frac{1}{8}\cos 8x+\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 6x+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 8x,\left[-\frac{2p}{3};\frac{2p}{3}\right].$

23.23 $f(x)=-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{10}\sin 10x+\frac{\sqrt{2}}{15}\cos 15x,\left[-\frac{p}{10};\frac{p}{10}\right].$

23.24 $f(x)=-\frac{1}{11}\cos 11x-\frac{\sqrt{3}}{14}\cos 7x+\frac{1}{14}\sin 7x,\left[-\frac{p}{54};\frac{7p}{12}\right].$

23.25 $f(x)=4\sin x-3\cos x-5x,\left[0;5p\right].$

23.26 $f(x)=-\cos 3x+\sin 3x,\left[0;p\right].$

23.27 $f(x)=-\cos x+\sin x-0{,}5\cdot\cos 2x-x,\left[-3p;\frac{11p}{6}\right].$

23.28 $f(x)=-\cos x+\sin x+\cos 2x-x,\left[-\frac{p}{3};\frac{7p}{3}\right].$

23.29 $f(x)=-\cos x+\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x,\left[-p;p\right].$

23.30 $f(x)=-\cos x+\sin x-\sqrt{2}\cdot x,\left[-2p;\frac{3p}{2}\right].$

24 Решить следующие задачи.

24.1 Найти наибольший объём конуса, длина образующей которого равна $3\sqrt{3}$.

24.2 Найти высоту цилиндра, который можно вписать в шар радиуса $5\sqrt{2}$ и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

24.3 Найти радиус основания конуса с боковой поверхностью, равной $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot p$, если шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объём.

24.4 Найти наибольшую площадь боковой поверхности конуса, который вписан в шар радиуса $R=3$ м.

24.5 Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса $\sqrt{27}$, при этом центр шара совпадает с центром основания конуса.

24.6 Найти наибольший объём цилиндра, который вписан в шар радиуса $3\sqrt{3}$.

24.7 Найти отношение радиуса шара, описанного около цилиндра, с наибольшей площадью боковой поверхности к радиусу основания этого цилиндра.

24.8 Во сколько раз объём шара, описанного около цилиндра наибольшего объёма, больше объёма этого цилиндра?
24.9 Найти отношение радиуса шара, который описан около конуса наибольшего объёма, к высоте этого конуса.
24.10 Найти радиус основания конуса наименьшего объёма, в который вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.
24.11 В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной $2j$, вписана сфера радиуса $R = 4$ м. При каких значениях угла $j$ площадь боковой поверхности конуса будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.
24.12 Найти наибольшее значение объёма правильной четырёхугольной пирамиды, вершины которой принадлежат описанной сфере радиуса $R = 9$ м.
24.13 Найти наибольшее значение объёма правильной треугольной призмы, если расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно $4\sqrt{3}$ м.
24.14 Найти отношение высоты конуса, описанного около цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, к высоте этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.
24.15 Найти отношение радиуса основания конуса, описанного около цилиндра наибольшего объёма, к радиусу основания этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.
24.16 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно $l = 2$ м. При какой длине стороны основания объём пирамиды будет наибольшим? Найти наибольший объём пирамиды.
24.17 Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $S = 12p$ м$^2$.
24.18 Найти наименьшую площадь полной поверхности прямой правильной треугольной призмы объёмом $V = 36$ м$^3$.
24.19 Найти наибольший объём правильной четырёхугольной пирамиды с боковым ребром $l = \sqrt{2}$ м.
24.20 Из всех правильных треугольных призм с заданным объёмом $V = 16\sqrt{3}$ м$^3$ найти призму с наименьшей суммой длин всех её рёбер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?
24.21 Найти площадь прямоугольника наибольшей площади, который вписан в окружность радиуса $R = 4\sqrt{2}$ м.
24.22 Найти наименьший периметр прямоугольника с площадью $S = 36$ м$^2$.
24.23 Найти наибольшую площадь прямоугольника, основание которого лежит на гипотенузе длиной 13 см, описанного прямоугольного треугольника с углом, составляющим $30^0$.
24.24 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12см.

24.25 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см 30 см и имеющего с ними общий острый угол.

24.26 Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равен десяти. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_6$.

24.27 Пятый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равен двенадцати. Найти наименьшее значение произведения $S = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5$.

24.28 Четвёртый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равен четырём. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3$.

24.29 Определить размеры открытого бассейна объёмом 64 м$^2$ с квадратным дном таким образом, чтобы на облицовку дна и стен плиткой пошло наименьшее количество материала.

24.30 Через какую точку на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной, осями координат и прямой $x = 1$, имела наименьшую площадь?

25 Определить число корней уравнения $f(x) = a$, где параметр $a \in \mathbb{R}$, проведя полное исследование графика функции $y = f(x)$.

25.1 а) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$; б) $f(x) = (3 - x) \cdot e^{x-2}$.

25.2 а) $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{(x+1)^3}$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

25.3 а) $f(x) = \dfrac{8x^3 + 8x}{(2x-1)^3}$; б) $f(x) = (4 - x) \cdot e^{x-3}$.

25.4 а) $f(x) = \dfrac{8x^3 + 8x}{(2x+1)^3}$; б) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

25.5 а) $f(x) = \dfrac{x^4 - 8}{(x+1)^4}$; б) $f(x) = (-1 - x) \cdot e^{x+2}$.

25.6 а) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = x^2 \ln x$.

25.7 а) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$; б) $f(x) = (4 + x) \cdot e^{-x-3}$.

25.8 а) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

25.9 а) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$; б) $f(x) = (3 + 2x) \cdot e^{-2x-2}$.

25.10 а) $f(x)=\dfrac{x}{2-x^3}$;  б) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

25.11 а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;  б) $f(x)=(x-2)\cdot e^{3-x}$.

25.12 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$;  б) $f(x)=x^2\cdot\ln^2 x$.

25.13 а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$;  б) $f(x)=(5+2x)\cdot e^{-2x-4}$.

25.14 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;  б) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

25.15 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-4}$;  б) $f(x)=(2x-1)\cdot e^{2/x}$.

25.16 а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;  б) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$.

25.17 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$;  б) $f(x)=\dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$.

25.18 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2+4x+2}$;  б) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$.

25.19 а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;  б) $f(x)=\dfrac{e^{-1/x^2}}{x}$.

25.20 а) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$;  б) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+2}+2$.

25.21 а) $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$;  б) $f(x)=\dfrac{e^{5x-5}}{5x-5}$.

25.22 а) $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$;  б) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x-3}-3$.

25.23 а) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;  б) $f(x)=\dfrac{e^{7-x}}{7-x}$.

25.24 а) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$;  б) $f(x)=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

25.25 а) $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$;  б) $f(x)=-\dfrac{e^{-3-x}}{3+x}$.

25.26 а) $f(x)=\dfrac{8x-8}{x^2+2x+1}$;  б) $f(x)=3\cdot\ln\dfrac{x}{x+3}-7$.

25.27 а) $f(x)=\dfrac{x^3-32}{x^2}$;  б) $f(x)=\dfrac{e^{9+x}}{9+x}$.

25.28 а) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}$; б) $f(x)=e^{2x-x^2}$.

25.29 а) $f(x)=\dfrac{x^5}{x^4-1}$; б) $f(x)=\ln(x^2-5x+6)$.

25.30 а) $f(x)=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$; б) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

## РАЗДЕЛ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

### ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Функции нескольких переменных. Область определения. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.
2. Предел функции нескольких переменных.
3. Непрерывность функции в точке и в области.
4. Частные производные функций нескольких переменных.
5. Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
6. Производная функции по направлению. Градиент функции и его свойства.
7. Касательная к пространственной кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
9. Неявные функции и их дифференцирование.
10. Экстремум функций нескольких переменных.
11. Наибольшее и наименьшее значения функций нескольких переменных в замкнутой области.
12. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

### ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

26 Задана функция двух переменных $z=f(x;y)$. Найти: а) полные дифференциалы функции первого и второго порядка в произвольной точке; б) приближенное значение функции в точке $M(x;y)$, исходя из ее значения в точке $M_0(x_0;y_0)$, заменив приращение функции при переходе от точки $M$ к точке $M_0$ полным дифференциалом; в) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=f(x;y)$ в точке $M_0'(x_0;y_0;z_0)$, где $z_0=f(x_0;y_0)$. Вычисления производить до третьего знака после запятой.

26.1 $z=y^3\cdot e^{x^2}$, $M(0{,}02;1{,}98)$, $M_0(0;2)$.

26.2 $z=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$, $M(3{,}97;3{,}03)$, $M_0(4;3)$.

26.3 $z = y^2 \cdot \ln x,\ \ M(0{,}99;2{,}01),\ M_0(1;2)$.

26.4 $z = 2x^4 \cdot \ln y,\ \ M(2{,}99;0{,}98),\ M_0(3;1)$.

26.5 $z = y^2 \cdot x + 5 \cdot x^3 \cdot y^3,\ \ M(2{,}95;3{,}05),\ M_0(3;3)$.

26.6 $z = x \cdot \operatorname{arctg} y,\ M(2{,}97;0{,}01),\ M_0(3;0)$.

26.7 $z = y \cdot \arccos x,\ \ M(0{,}51;4{,}99),\ M_0(0{,}5;5)$.

26.8 $z = \arcsin(y \cdot x),\ \ M(0{,}52;0{,}49),\ M_0(0{,}5;0{,}5)$.

26.9 $z = \dfrac{x}{y},\ M(3{,}98;2{,}01),\ M_0(4;2)$.

26.10 $z = \ln(x \cdot y),\ \ M(0{,}96;1{,}04),\ M_0(1;1)$.

26.11 $z = y^3 \cdot x^4 - x^3 \cdot y^4,\ \ M(2{,}93;4{,}02),\ M_0(3;4)$.

26.12 $z = \operatorname{arctg}(x \cdot y),\ M(1{,}03;0{,}04),\ M_0(1;0)$.

26.13 $z = y^5 \cdot e^{-x},\ \ M(0{,}07;2{,}02),\ M_0(0;2)$.

26.14 $z = \ln(2x + 3y),\ \ M(-0{,}99;1{,}01),\ M_0(-1;1)$.

26.15 $z = e^{x \cdot y},\ M(0{,}05;1{,}97),\ M_0(0;2)$.

26.16 $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2},\ M(5{,}02;2{,}98),\ M_0(5;3)$.

26.17 $z = e^{5x+4y},\ M(1{,}05;-0{,}96),\ M_0(1;-1)$.

26.18 $z = x \cdot \arcsin y,\ M(2{,}04;0{,}02),\ M_0(2;0)$.

26.19 $z = y^x,\ M(1{,}03;2{,}97),\ M_0(1;3)$.

26.20 $z = y \cdot \arcsin x,\ M(0{,}54;0{,}46),\ M_0(0{,}5;0{,}5)$.

26.21 $z = \ln(x - y),\ M(2{,}03;0{,}96),\ M_0(2;1)$.

26.22 $z = x^4 \cdot e^{-2y},\ \ M(1{,}96;0{,}02),\ M_0(2;0)$.

26.23 $z = 2x^3 \cdot y^3 - 4 \cdot x^4 \cdot y^4,\ M(2{,}03;1{,}97),\ M_0(2;2)$.

26.24 $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2},\ M(2{,}01;2{,}96),\ M_0(2;3)$.

26.25 $z = y \cdot \operatorname{arctg} x,\ M(0{,}97;2{,}04),\ M_0(1;2)$.

26.26 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ M(3{,}01;3{,}97),\ M_0(3;4)$.

26.27 $z = x \cdot y^2 - x^2 \cdot y,\ M(1{,}97;0{,}98),\ M_0(2;1)$.

26.28 $z = \dfrac{y}{x},\ M(2{,}97;6{,}01),\ M_0(3;6)$.

26.29 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ M(13{,}01;11{,}99),\ M_0(13;12)$.

26.30 $z = x^2 \cdot y^6 - 2 \cdot x^6 \cdot y^2,\ M(2{,}01;1{,}98),\ M_0(2;2)$.

27. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x;y)$.

27.1 $z = x^3 + y^2x - 3xy$. 27.2 $z = y^3 + x^2y - 3yx$. 27.3 $z = 12y^3 + 18x^3 - 2yx$.

27.4 $z = 18y^3 + 12x^3 - 2yx$. 27.5 $z = 8y^3 + x^3 - 6yx - 9$.

27.6 $z = 2y^3 + 2x^3 - 6yx - 4$. 27.7 $z = 3y^3 + 3x^3 - 9yx + 9$.

27.8 $z = y^3 + 3x^2y - 15y - 12x$. 27.9 $z = y^2 + x^2 + yx + x - y + 2$.

27.10 $z = -2y^2 - 3x^2 + 2yx - 5$. 27.11 $z = 8x - 8y - y^2 - x^2 - 7$

27.12 $z = 2xy - \frac{2}{3}x^3 - y^2 - 12$. 27.13 $z = -y^4 - x^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4yx + 2$.

27.14 $z = y^3 + x^3 - 6yx + 1$. 27.15 $z = y^2 + x^2 - 2x + 4y + 3$.

27.16 $z = x^2y + xy^2 - yx + 4$. 27.17 $z = y^2 + x^2 + yx - 13x - 11y + 5$.

27.18 $z = y^3 + x^3 + 6yx - 2$. 27.19 $z = x^3 - y^2 - 7x^2 + yx + 9x + 3y - 9$.

27.20 $z = 2x^3 + 2y^3 - 14xy + 5$. 27.21 $z = y^3 - x^2 - 7y^2 + xy + 9y + 3x + 5$.

27.22 $z = 7 - 6y^2 - 10x^2 + 4yx$. 27.23 $z = 5 - 2x\sqrt{y} + 2x^2 + 2y - 12x$.

27.24 $z = 3 + 2x^2y + 2y^2x - 24xy$. 27.25 $z = 3y^2 + 3x^2 - 6x + 12y - 1$.

27.26 $z = 3y^3 + 3x^3 + 18yx - 7$. 27.27 $z = 4 - 3y\sqrt{x} + 3y^2 + 3x - 18y$.

27.28 $z = 2xy - x^3 - y^2x$. 27.29 $z = 9xy - 3y^3 - 3x^2y$. 27.30 $z = y^3 + x^3 + 9yx$.

28. Найти условный экстремум функции $z = f(x;y)$ при условии $j(x;y) = 0$.

28.1 $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $j(x;y) = x + y - 2$. 28.2 $f(x;y) = xy^2$, $j(x;y) = x + 2y - 1$.

28.3 $f(x;y) = x + y$, $j(x;y) = x^2 + y^2 - 1$. 28.4 $f(x;y) = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $j(x;y) = x^2 + y^2 - 1$ .

28.5 $f(x;y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, $j(x;y) = x + y + 3$.

28.6 $f(x;y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, $j(x;y) = x + y - 4$.

28.7 $f(x;y) = x^2 - y^2$, $j(x;y) = x + 2y - 6$. 28.8 $f(x;y) = x^2y$, $j(x;y) = 2x + y - 1$.

28.9 $f(x;y) = x^2 + y^2$, $j(x;y) = x + y - 2$ 28.10 $f(x;y) = xy$, $j(x;y) = x^2 + y^2 - 2$.

28.11 $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $j(x;y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{9}$.

28.12 $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $j(x;y) = x + y - 2$. 28.13 $f(x;y) = xy^2$, $j(x;y) = x + 2y - 5$.

28.14 $f(x;y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $j(x;y) = x - y + \frac{p}{4}$.

28.15 $f(x;y) = 2x + 2y$, $j(x;y) = x^2 + y^2 - 8$.

28.16 $f(x;y) = 2x - 2y$, $j(x;y) = x^2 + y^2 - 18$.

28.17 $f(x;y)=\frac{3}{x}+\frac{3}{y},\ j(x;y)=\frac{3}{x^2}+\frac{3}{y^2}-6$.

28.18 $f(x;y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ j(x;y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}$.

28.19 $f(x;y)=x^2-2\sqrt{y},\ j(x;y)=x-y+0{,}5$.

28.20 $f(x;y)=y^2-2\sqrt{x},\ j(x;y)=y-x-0{,}75$.

28.21 $f(x;y)=\sin^2 x+\sin^2 y,\ j(x;y)=x+y+\frac{3p}{4}$.

28.22 $f(x;y)=3x^2+4y^2,\ j(x;y)=12x+16y+56$.

28.23 $f(x;y)=2x+4y, j(x;y)=x^2+y^2-20$.

28.24 $f(x;y)=\sin^2 x+\cos^2 y,\ j(x;y)=x-y-\frac{5p}{4}$.

28.25 $f(x;y)=2x^2-3y^2,\ j(x;y)=12(x-y)+120$.

28.26 $f(x;y)=3x+5y, j(x;y)=9x^2-10y^2+54$.

28.27 $f(x;y)=\sin^2 x-\sin^2 y,\ j(x;y)=x-y+\frac{7p}{4}$.

28.28 $f(x;y)=x^2+6y^2,\ j(x;y)=6x+24y-60$.

28.29 $f(x;y)=2x+y, j(x;y)=4x^2+y^2-8$.

28.30 $f(x;y)=\cos^2 x-\cos^2 y,\ j(x;y)=x+y-\frac{p}{4}$.

29. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x;y)$ в замкнутой области $G$, заданной системой неравенств. Сделать чертёж.

29.1 $f(x;y)=x^2+xy+x,\quad x\le 0, y\le 0, x+y\ge -2$.

29.2 $f(x;y)=2x^2+3xy-7x-3y,\quad x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 3$.

29.3 $f(x;y)=3x^2+4xy+4y-2x,\quad x\le 0, y\ge 0, y-x\le 3$.

29.4 $f(x;y)=4x^2+2xy-16x-6y,\quad x\ge 0, y\le 0, x-y\le 8$.

29.5 $f(x;y)=x^2+y^2-9xy+27,\quad 0\le x\le 3, 0\le y\le 3$.

29.6 $f(x;y)=x^2+2y^2+1,\quad x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 3$.

29.7 $f(x;y)=3-2x^2-xy-y^2,\quad x\le 1, y\ge 0, x-y\ge 0$.

29.8 $f(x;y)=x^2+3y^2+x-y,\quad x\ge 1, y\ge -1, x+y\le 1$.

29.9 $f(x;y)=5x^2+y^2-3xy+4,\quad x\ge -1, y\ge -1, x+y\le 1$.

29.10 $f(x;y)=x^2-y^2+2xy+4x,\quad x\le 0, y\le 0, x+y\ge -2$.

29.11 $f(x;y)=x^2+xy-2,\quad 4x^2-4\le y\le 0$.

29.12 $f(x;y)=10+4xy-x^2,\quad 0\le y\le 4-x^2$.

29.13 $f(x;y)=x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 9$.

29.14 $f(x;y)=x^2+2xy-4x+8y, \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

29.15 $f(x;y)=4x^2y-x^3y-x^2y^2, \quad x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6$.

29.16 $f(x;y)=\left(2x^2+3y^2\right)\cdot e^{-(x^2+y^2)}, \quad x^2+y^2\le 9$.

29.17 $f(x;y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y), \quad 0\le x\le \dfrac{p}{2}, 0\le y\le \dfrac{p}{2}$.

29.18 $f(x;y)=2x^2-2y^2, \quad x^2+y^2\le 16$.

29.19 $f(x;y)=x^3+y^3+6xy, \quad -3\le x\le 1, -3\le y\le 2$.

29.20 $f(x;y)=2x^2y-x^3y-x^2y^2, \quad x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6$.

29.21 $f(x;y)=5x^2-3xy+y^2, \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

29.22 $f(x;y)=x^2-y^2+2xy-4x, \quad x\le 3, y\ge 0, x-y\ge -1$.

29.23 $f(x;y)=4-2x^2-y^2, \quad y\ge 0, y\le \sqrt{1-x^2}$.

29.24 $f(x;y)=\cos x+\cos y+\cos(x+y), \quad 0\le x\le \dfrac{p}{2}, 0\le y\le \dfrac{p}{2}$.

29.25 $f(x;y)=1+2x^2+3y^2, \quad y\ge 0, y\le \sqrt{9-\dfrac{9}{4}x^2}$.

29.26 $f(x;y)=\dfrac{1}{2}x^2-xy, \quad 2x^2\le y\le 8$.

29.27. $f(x;y)=xy, \quad x^2+y^2\le 1$.

29.28. $f(x;y)=xy-3x-2y, 0\le x\le 4, 0\le y\le 4$.

29.29. $f(x;y)=xy^2, \quad x^2+y^2\le 1$.

29.29. $f(x;y)=x^3+y^3-3xy, \quad 0\le x\le 2, -1\le y\le 2$.

30. Экспериментально получены пять значений функций $y=f(x)$ при пяти значениях аргумента, одинаковых для всех вариантов, которые записаны в виде таблице. Методом наименьших квадратов найти линейную (для таблицы а) и квадратичную (для таблицы б), которые аппроксимируют функцию $y=f(x)$. Сделать чертежи, на которых в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и графики аппроксимирующих функций.

| | | | **x** | | | | | | | | **x** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | -1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 30.1 | а) | **y** | 1,1 | 1.9 | 3,2 | 2,9 | 3,1 | б) | **y** | | 4,1 | 2,8 | 1,9 | 1,5 | 3,2 |
| 30.2 | а) | | 4,5 | 3,5 | 4,1 | 1,3 | 0,5 | б) | | | 2,8 | 3,2 | 3,9 | 2,5 | 0,2 |
| 30.3 | а) | | 0,9 | 2,3 | 2,9 | 4,1 | 5,2 | б) | | | 4,1 | 3,8 | 2,3 | 3,7 | 5,6 |
| 30.4 | а) | | 3,6 | 3,8 | 2,7 | 3,2 | 2,1 | б) | | | 4,2 | 5,6 | 3,1 | 2,2 | 0,2 |
| 30.5 | а) | | 1,1 | 1,4 | 2,9 | 3,8 | 5,2 | б) | | | 2,9 | 1,3 | 1,2 | 1,4 | 2,5 |
| 30.6 | а) | | 4,3 | 2,5 | 3,3 | 2,1 | 0,9 | б) | | | 1,6 | 2,4 | 4,9 | 4,1 | 1,2 |
| 30.7 | а) | | 0,9 | 2,8 | 1,8 | 2,9 | 4,3 | б) | | | 4,9 | 3,5 | 2,2 | 1,3 | 3,9 |
| 30.8 | а) | | 2,3 | 4,3 | 2,1 | 1,9 | 2,0 | б) | | | 1,3 | 2,2 | 4,1 | 4,0 | 2,8 |
| 30.9 | а) | | 3,4 | 2,5 | 3,1 | 4,2 | 3,9 | б) | | | 6,3 | 5,2 | 4,9 | 4,5 | 7,2 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30.10 | а) | | 7,3 | 7,1 | 6,5 | 6,9 | 7,2 | б) | | 3,1 | 4,2 | 5,3 | 4,7 | 2,8 |
| 30.11 | а) | | 6,2 | 6,8 | 7,3 | 6,6 | 7,7 | б) | | 5,5 | 3,1 | 4,5 | 5,3 | 6,9 |
| 30.12 | а) | | 2,4 | 3,1 | 2,6 | 2,2 | 1,9 | б) | | 0,5 | 3,7 | 3,9 | 4,6 | 2,3 |
| 30.13 | а) | | 8,3 | 6,5 | 7,4 | 5,9 | 6,3 | б) | | 9,4 | 7,2 | 7,6 | 8,8 | 9,5 |
| 30.14 | а) | | 3,9 | 4,0 | 3,6 | 3,1 | 2,3 | б) | | 2,3 | 4,7 | 8,6 | 7,5 | 3,1 |
| 30.15 | а) | | 0,5 | 0,7 | 1,3 | 1,4 | 1,9 | б) | | 8,4 | 5,6 | 2,1 | 4,3 | 7,9 |
| 30.16 | а) | | 2,1 | 2,8 | 4,2 | 3,7 | 4,1 | б) | | 5,2 | 3,9 | 2,8 | 2,6 | 4,3 |
| 30.17 | а) | | 5,5 | 4,5 | 5,1 | 2,3 | 1,5 | б) | | 1,7 | 2,2 | 3,9 | 1,5 | 0,1 |
| 30.18 | а) | | 2,9 | 4,2 | 4,7 | 6,2 | 7,1 | б) | | 6,3 | 5,6 | 4,1 | 5,7 | 7,6 |
| 30.19 | а) | | 2,6 | 2,9 | 1,7 | 2,3 | 1,1 | б) | | 8,3 | 9,9 | 7,8 | 6,7 | 4,6 |
| 30.20 | а) | | 3,2 | 3,4 | 5,9 | 5,8 | 7,8 | б) | | 5,9 | 4,3 | 4,2 | 4,4 | 6,5 |
| 30.21 | а) | | 5,2 | 3,5 | 4,3 | 3,0 | 1,9 | б) | | 2,7 | 3,5 | 6,0 | 5,2 | 2,1 |
| 30.22 | а) | | 2,9 | 4,8 | 3,7 | 4,9 | 6,1 | б) | | 3,9 | 2,2 | 1,4 | 0,5 | 2,9 |
| 30.23 | а) | | 1,3 | 2,3 | 1,1 | 0,9 | 1,0 | б) | | 2,2 | 3,2 | 6,1 | 5,1 | 2,8 |
| 30.24 | а) | | 5,4 | 4,5 | 5,1 | 6,2 | 5,9 | б) | | 4,5 | 3,1 | 2,2 | 2,9 | 5,3 |
| 30.25 | а) | | 4,3 | 4,1 | 3,6 | 3,7 | 4,3 | б) | | 4,3 | 5,4 | 6,3 | 5,6 | 3,9 |
| 30.26 | а) | | 4,3 | 4,9 | 5,4 | 4,7 | 5,8 | б) | | 4,7 | 2,2 | 3,7 | 4,3 | 5,8 |
| 30.27 | а) | | 7,3 | 8,0 | 7,5 | 7,1 | 6,8 | б) | | 2,2 | 5,6 | 5,8 | 6,7 | 3,3 |
| 30.28 | а) | | 6,4 | 4,6 | 5,5 | 3,9 | 4,4 | б) | | 8,9 | 6,3 | 6,5 | 7,7 | 8,8 |
| 30.29 | а) | | 4,8 | 5,1 | 4,5 | 4,2 | 3,5 | б) | | 2,3 | 5,3 | 9,6 | 7,2 | 1,1 |
| 30.30 | а) | | 5,4 | 5,6 | 6,2 | 6,3 | 6,7 | б) | | 7,5 | 6,4 | 1,2 | 3,7 | 6,9 |

# РАЗДЕЛ 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Таблица интегралов.
3. Методы интегрирования неопределённого интеграла.
4. Интегрирование простейших рациональных дробей и дробно-рациональных функций.
5. Интегрирование тригонометрических выражений.
6. Интегрирование иррациональных выражений.
7. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
8. Определение определенного интеграла и его основные свойства. Теорема о среднем.
9. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница).
10. Методы интегрирования определенного интеграла.
11. Вычисление площадей фигур с помощью определённого интеграла.
12. Вычисление длины дуги плоской кривой.

13.Фигуры вращения. Вычисление площадей и объемов фигур вращения при помощи определенного интеграла.

14.Механические приложения определенного интеграла.

15.Несобственные интегралы первого и второго рода.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

31. Найти неопределенные интегралы.

31.1 а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int(4-3x)e^{-3x}\,dx$; в) $\int\frac{2x+1}{x^3+8}dx$; г) $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

д) $\int\frac{dx}{3-4\cos x+\sin x}$; е) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$; ж) $\int\frac{\sin^2 x dx}{2\sin^2 x-\cos^2 x}$.

31.2 а) $\int\frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int x^2\sin x\,dx$; в) $\int\frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$; г) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$;

д) $\int\frac{dx}{5\sin x-2\cos x+1}$; е) $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x-x^2}}$; ж) $\int\frac{tgx dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

31.3 а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int x\arcsin x\,dx$; в) $\int\frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$; г) $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$;

д) $\int\frac{dx}{3-5\cos x+6\sin x}$; е) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$; ж) $\int\frac{dx}{8-4\cos^2 x}$.

31.4 а) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$; б) $\int(7x-10)\sin 5x\,dx$; в) $\int\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx$;

г) $\int x^3\sqrt{16+x^2}\,dx$; д) $\int\frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$; е) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$; ж) $\int\frac{\cos^2 x dx}{4-\sin^2 x}$.

31.5 а) $\int tg\,x\ln\cos x\,dx$; б) $\int(4-2x)\cos 5x\,dx$; в) $\int\frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$;

г) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx$; д) $\int\frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$; е) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-2}}$; ж) $\int\frac{dx}{2+5\sin^2 x}$.

31.6 а) $\int\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^4}dx$; б) $\int arctg\sqrt{2x-1}\,dx$; в) $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx$;

г) $\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2+25}}dx$; д) $\int\frac{dx}{4\sin x-2\cos x}$; е) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; ж) $\int\frac{dx}{4-3\sin^2 x}$.

31.7 а) $\int \frac{3+\ln(2x-1)}{2x-1}dx$; б) $\int (2x-3)\cos 4x\,dx$; в) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)^2}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$; д) $\int \frac{dx}{3-4\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{2-x-x^2}}$; ж) $\int \frac{(2tgx-1)dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

31.8 а) $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$; б) $\int (5x-2)e^{6x}\,dx$; в) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$; д) $\int \frac{3\sin x+\cos x}{1+\sin x}dx$; е) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-3x-2x^2}}$; ж) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+5}$.

31.9 а) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; б) $\int \ln(x^2+4)\,dx$; в) $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{6+2\cos x}{2-\cos x+\sin x}dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; ж) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+\cos^2 x}$.

31.10 а) $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$; б) $\int arctg\sqrt{5x-1}\,dx$; в) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^2-4x}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{2-\cos x+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$; ж) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-16\cos^2 x}$.

31.11 а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{5+\cos x+2\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$; ж) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x+2\cos^4 x}$.

31.12 а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; б) $\int xe^{-x}\,dx$; в) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$;

д) $\int \frac{2-\sin x+2\cos x}{1+\cos x}dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+x^2-1}}$; ж) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-7\cos^2 x}$.

31.13 а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tg\,x}}$; б) $\int (1-4x)\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$; д) $\int \frac{dx}{1-4\cos x+2\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{1+x-x^2}}$; ж) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-4}$.

31.14 а) $\int e^x(\sin e^x)\,dx$; б) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int \frac{x^2+1}{x^3-27}dx$; г) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin x-3\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-2}}$; ж) $\int \frac{\sin 2x dx}{4\sin^4 x+\cos^4 x}$.

31.15 а) $\int e^{-x^3}x^2\,dx$; б) $\int (3-7x)e^{7x}\,dx$; в) $\int \frac{x}{64-x^3}dx$; г) $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{6\cos x+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x}$.

31.16 а) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$; б) $\int (4-7x)\sin 6x\,dx$; в) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)(x+1)^2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; д) $\int \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx$; е) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-x-1}}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

31.17 а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) $\int arctg\sqrt{3x-1}\,dx$; в) $\int \frac{x^3-1}{(x+1)^2(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

д) $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$; е) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$.

31.18 а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int (-3-6x)\cos 8x\,dx$; в) $\int \frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^3}dx$;

г) $\int \frac{x^4dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{2-\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x-1}}$; ж) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$.

31.19 . а) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int (x-7)\sin 9x\,dx$; в) $\int \frac{1+x^2}{(1+x)^2(x-1)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; д) $\int \frac{dx}{1+\cos x+3\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{1+x-x^2}}$; ж) $\int \frac{tgxdx}{1-ctg^2 x}$.

31.20 а) $\int \frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx$; б) $\int \arccos 2x\,dx$; в) $\int \frac{3x^3+25}{(x^2+3x+2)(x-1)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$; д) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+x+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

31.21 а) $\int \frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; в) $\int \frac{2x-x^2}{(x+2)^3}dx$; г) $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{2-2\cos x+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-x+1}}$; ж) $\int \frac{(2tgx+3)dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

31.22 а) $\int \cos^3 x\sin 2x\,dx$; б) $\int x^2\ln(1+x)\,dx$; в) $\int \frac{9-x^2}{(3+x)^3}dx$; г) $\int \sqrt{25-x^2}dx$;

д) $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+x-1}}$; ж) $\int \frac{dx}{1+4\cos^2 x}$.

31.23 а) $\int ctg(2x+1)\,dx$; б) $\int \arcsin 6x\,dx$; в) $\int \frac{x^3+8}{x^3-27}dx$; г) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$;

д) $\int \frac{\sin xdx}{1+\cos x+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2-x-1}}$; ж) $\int \frac{dx}{9\sin^2 x-8\sin x\cos x}$.

31.24 а) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+9}dx$; б) $\int 5x\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$;

д) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-6)\sqrt{1+x-x^2}}$; ж) $\int \frac{\sin^2 xdx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

31.25 а) $\int \frac{x-(arctg\,x)^4}{1+x^2}dx$; б) $\int (4x-1)\sin(1-x)\,dx$; в) $\int \frac{1}{(x^2+x+1)(x+1)}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$; д) $\int \frac{dx}{3+3\cos x+2\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-3x+2}}$; ж) $\int \frac{dx}{6\sin^2 x+7}$.

31.26 а) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int (2x-4)e^{-8x}\,dx$; в) $\int \frac{1-2x}{(x^2+4)(x-1)}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; д) $\int \frac{dx}{4\cos x+7\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-3}}$; ж) $\int \frac{dx}{6-5\cos^2 x}$.

31.27 а) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; б) ; б) $\int 3x\,arctg\,7x\,dx$; в) $\int \frac{x}{(x^2+9)(x-1)}dx$; г) $\int \sqrt{121-x^2}dx$;

д) $\int \frac{2\sin x-\cos x}{4-\cos x}dx$; е) $\int \frac{dx}{(x-6)\sqrt{1-3x-2x^2}}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+4\cos^2 x}$.

31.28 а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+6\cos x}}dx$; б) $\int arctg\sqrt{8x-1}\,dx$; в) $\int \frac{3-x^2}{(x-1)(x+2)^2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$; д) $\int \frac{3\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$; е) $\int \frac{dx}{(x+7)\sqrt{1-x-x^2}}$; ж) $\int \frac{\sin^2 xdx}{8\sin^2 x-3\cos^2 x}$.

31.29 а) $\int \frac{x^2+(\ln x)^2}{x}dx$; б) $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$; в) $\int \frac{x+6}{(x+1)(x-5)(x+2)}dx$;

г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{36-x^2}}$; д) $\int \frac{\sin xdx}{8+\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-8)\sqrt{x^2+x-2}}$; ж) $\int \frac{\sin^2 xdx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

31.30 а) $\int \frac{4arctg\,x-x}{1+x^2}dx$; б) $\int \ln(4x^2+1)\,dx$; в) $\int \frac{1-x}{(x^2+4x+5)(x-1)}dx$;

г) $\int x^2\sqrt{64-x^2}dx$; д) $\int \frac{\cos xdx}{7+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; ж) $\int \frac{\cos^2 xdx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$.

32. Найти неопределенные интегралы.

32.1 а) $\int_0^1 \frac{2xdx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_{-3}^0 (x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$; г) $\int_0^{p/3}\cos^3 x\sin 2x\,dx$.

32.2 а) $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int_0^1 x^2e^{3x}dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{\sin xdx}{2+\sin x}$; г) $\int_0^{p/2}\cos x\cos 3x\cos 5x\,dx$.

32.3 а) $\int_0^1\frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; б) $\int_{p/4}^{p/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$; в) $\int_0^{p/4}\frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$; г) $\int_{p/4}^{p}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$.

32.4 а) $\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$; б) $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$; г) $\int_0^{p/4}\sin 3x\cos 5x\,dx$.

32.5 а) $\int_p^{2p}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$; б) $\int_1^e\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$; в) $\int_0^{2p/3}\frac{\cos^2 xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; г) $\int_0^p\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$.

32.6 а) $\int_{-1}^0\frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$; б) $\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_0^{2p/3}\frac{\sin^2 xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; г) $\int_0^{p/4}2\cos x\sin 3x\,dx$.

32.7 а) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$; б) $\int_{-1/3}^{-2/3}\frac{x}{e^{3x}}dx$; в) $\int_{-2p/3}^0\frac{\cos^2 xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; г) $\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx$.

32.8 а) $\int_1^e\frac{x+\ln x^2}{x}dx$; б) $\int_{-2}^0(x^2+2)e^{x/2}dx$; в) $\int_{-p/2}^0\frac{\sin xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; г) $\int_0^p\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$.

32.9а) $\int_{\sqrt2}^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int_{-1}^1x^2e^{-x/2}dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{\sin xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; г) $\int_0^p\cos^4x\sin^2x\,dx$.

32.10а) $\int_{\sqrt3}^{\sqrt8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int_1^8\frac{\ln^2 xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int_{-p/2}^0\frac{\cos xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; г) $\int_{p/2}^p\cos^2x\sin^4x\,dx$.

32.11а) $\int_1^3\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$; б) $\int_0^{p/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{\cos xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; г) $\int_0^p\sin^4\frac{x}{2}dx$.

32.12 а) $\int_0^{\sqrt3}\frac{x-(arctg\,x)^4}{1+x^2}dx$; б) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; в) $\int_{-2p/3}^0\frac{\cos xdx}{1+\cos x-\sin x}$; г) $\int_0^p\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}dx$.

32.13 а) $\int_0^{\sqrt3}\frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx$; б) $\int_1^{\sqrt3}arctg\frac{1}{x}dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{\sin xdx}{(1+\sin x)^2}$; г) $\int_{-3}^3x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

32.14 а) $\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx$; б) $\int_{-p}^p x\sin x\cos x\,dx$; в) $\int_{-p/2}^0\frac{\cos xdx}{(1+\cos x)^2}$; г) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

32.15 а) $\int_0^2\frac{x^3}{4+x^2}dx$; б) $\int_{p/4}^3(3x-x^2)\sin 2x\,dx$; в) $\int_0^{p/2}\frac{(1+\cos x)dx}{1+\cos x+\sin x}$; г) $\int_{1/\sqrt3}^1\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

32.16 а) $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$; б) $\int\limits_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\,dx$; в) $\int\limits_0^{2p/3} \frac{(1+\sin x)dx}{1+\cos x+\sin x}$; г) $\int\limits_0^p \sin^4\frac{x}{2}\,dx$.

32.17 а) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int\limits_{-1/3}^{1/3} \arccos 3x\,dx$; в) $\int\limits_{p/3}^{p/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$; г) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

32.18 а) $\int\limits_p^{2p} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int\limits_{-2}^0 (x^2-4)\cos 4x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$; г) $\int\limits_{p/6}^{p/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$.

32.19 а) $\int\limits_0^{p/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; б) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$; г) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

32.20 а) $\int\limits_0^{p/4} tg\,x\ln\cos x\,dx$; б) $\int\limits_0^{p/2} (x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{5+\cos x}$; г) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

32.21 а) $\int\limits_0^1 \frac{3+\sqrt{x+2}}{x+3}dx$; б) $\int\limits_0^{2p} x^2\cos 4x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{3+2\cos x}$; г) $\int\limits_{p/4}^p 2\sin x\cos 3x\,dx$.

32.22 а) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{1-x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,arctg\,x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{(\cos x-\sin x)dx}{(1+\sin x)^2}$; г) $\int\limits_0^{p/4} \sin^3 2x\,dx$.

32.23 а) $\int\limits_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$; б) $\int\limits_1^2 \ln(3x+2)\,dx$; в) $\int\limits_{p/2}^p \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$; г) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

32.24 а) $\int\limits_{p/4}^{p/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$; б) $\int\limits_0^{2p} (2x^2-4)\sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2}$; г) $\int\limits_0^{p/2} \sin^6 x\,dx$.

32.25 а) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{2-x}\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{(\cos x+\sin x)dx}{(1+\cos x)^2}$; г) $\int\limits_0^{2p} \sin^8 x\,dx$.

32.26 а) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; б) $\int\limits_0^3 (x^2-3x)\sin 2x\,dx$; в) $\int\limits_0^{p/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$; г) $\int\limits_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3}}$.

32.27 а) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{2p} (3-7x^2)\cos 2x\,dx$; в) $\int\limits_{p/6}^{p/3} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x}$; г) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

32.28 а) $\int\limits_0^{p/4} ctg\,x\ln\sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-4}^0 (x^2+7x+12)\cos x\,dx$; в) $\int\limits_{p/2}^p \frac{\cos x dx}{6-2\sin x}$; г) $\int\limits_0^{p/2} \cos^5 x\,dx$.

32.29 а) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{2p} (3-7x^2)\sin 2x\,dx$; в) $\int\limits_{p/2}^p \frac{\sin x dx}{5-2\sin x}$; г) $\int\limits_0^p \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}dx$.

32.30 а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$; б) $\int\limits_p^{2p} (2+3x)\cos 2x\,dx$; в) $\int\limits_{p/2}^p \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$; г) $\int\limits_{p/6}^{p/3} \cos 4x\sin 2x\,dx$.

33. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

33.1 а) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. 33.2 а) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

33.3 а) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. 33.4 а) $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int_{p/2}^{p}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

33.5 а) $\int_4^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$. 33.6 а) $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2+x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

33.7 а) $\int_1^\infty \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; б) $\int_0^1 x\ln x\,dx$. 33.8 а) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

33.9 а) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int_0^1\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$. 33.10 а) $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$; б) $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

33.11 а) $\int_0^\infty x\sin x\,dx$; б) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$. 33.12 а) $\int_{-1}^\infty \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_0^{p/2}\frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

33.13 а) $\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$. 33.14 а) $\int_2^\infty\frac{dx}{x^2+x-2}$; б) $\int_0^{p/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$.

33.15 а) $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx$; б) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. 33.16 а) $\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln\ln x}$; б) $\int_1^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

33.17 а) $\int_{e^2}^\infty\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; б) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 33.18 а) $\int_{2/p}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; б) $\int_{-2}^2\frac{2xdx}{x^2-4}$.

33.19 а) $\int_1^\infty\frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int_0^1\frac{xdx}{1-x^2}$. 33.20 а) $\int_0^\infty\frac{3-x^2}{x^2+4}dx$; б) $\int_{-1/3}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

33.21 а) $\int_1^\infty\frac{16xdx}{16x^4-1}$; б) $\int_{3/4}^1\frac{dx}{\sqrt[7]{3-4x}}$. 33.22 а) $\int_0^\infty xe^{-3x}dx$; б) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

33.23 а) $\int_{-\infty}^0\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int_0^1 x\ln xdx$. 33.24 а) $\int_0^\infty\frac{x^3dx}{16x^4+1}$; б) $\int_0^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$.

33.25 а) $\int_0^\infty xe^xdx$; б) $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[8]{(4-x)^2}}$. 33.26 а) $\int_0^\infty\frac{arctg\,3x}{p(1+9x^2)}dx$; б) $\int_0^{p/2}\frac{e^{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$.

33.27 а) $\int_0^\infty\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$; б) $\int_0^1\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$. 33.28 а) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{5dx}{(x^2-4)\ln 5}$; б) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

33.29 а) $\int_e^\infty\frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$; б) $\int_{1/2}^1\frac{dx}{\sqrt[8]{1-2x}}$. 33.30 а) $\int_{-\infty}^0\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int_0^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

34. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах.

34.1 $y = x^2 + x, y = 3 - x$. 34.2 $y = x^2 + 4x, y = x$. 34.3 $y = x^2, y = 2 - x$.

34.4 $y = \frac{2}{x}, y = 3 - x$. 34.5 $y = \frac{6}{x}, y + x = -5$. 34.6 $y = -\frac{2}{x}, y = 3 + x$.

34.7 $y = \sqrt{x}, y = x$. 34.8 $y = -\sqrt{x}, y = -x^2$. 34.9 $y = \sqrt{x}, y = x - 2$.

34.10 $y = \frac{2}{x^2+1}, y = x^2$ 34.11 $y = \frac{32}{x^2+4}, y = x^2$. 34.12 $y = \frac{90}{x^2+1}, y = x^2$.

34.13 $y = x^2 - 4x, y = -x^2$. 34.14 $y = x^2 - 1, y = x - x^2$. 34.15 $y = x^2, y = 8 - x^2$.

34.16 $y = x^2 - x, y = 2x + 2$. 34.17 $y = x^2 - x, y = 4x$. 34.18 $y = x^2 - 6, y = -x$.

34.19 $y = \frac{4}{x^2}, y = 5 - x^2$ 34.20 $y = \frac{8}{x^3}, y = 9 - x^3$ 34.21 $y = \frac{10}{x^2}, y = 8 - x^2$.

34.22 $y = \sqrt{x^3}, y = x^3$ 34.23 $y = -\sqrt{x^3}, y = -x^3$ 34.24 $y = \sqrt{x^3}, y = 3x$.

34.25 $y = \frac{3}{x^2-4}, y = x^2 - 2$. 34.26 $y = \frac{5}{x^2-9}, y = x^2 - 5$. 34.27 $y = \frac{3}{4-x^2}, y = x^2$.

34.28 $y = x^2 + 8x, y = -x^2$. 34.29 $y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$. 34.30 $y = x^2, y = 2 - x^2$.

35. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

35.1 $r = 2\sin j, r = 4\sin j$. 35.2 $r = \cos 3j$. 35.3 $r = \sin j$.;

35.4 $r = \sin 3j$. 35.5 $r = \cos 2j$. 35.6 $r = 1/2 + \sin j$.

35.7 $r = \sin j$, $r = 2\sin j$. 35.8 $r = 1/2 + \cos j$. 35.9 $r = 4\cos 4j$.

35.10 $r = 2 + \cos j$. 35.11 $r = 2\sin 4j$. 35.12 $r = \cos j - \sin j$.

35.13 $r = \sin 6j$. 35.14 $r = \cos j + \sin j$. 35.15 $r = 2\cos 6j$.

35.16 $r = 6\sin j, r = 4\sin j$. 35.17 $r = 4\sin^2 j$. 35.18 $r = 4\sqrt{\cos 2j}$.

35.19 $r = 3\sin j, r = 5\sin j$. 35.20 $r = 3\cos 5j$. 35.21 $r = \sin 4j$.

35.22 $r = \sqrt{\sin 2j}$. 35.23 $r = \sin 5j$. 35.24 $r = 8\cos 8j$.

35.25 $r = 6\cos 6j$. 35.26 $r = 8\sin 8j$. 35.27 $r = 2 + 2\cos j$.

35.28 $r = 1 + \sqrt{2}\cos j$. 35.29 $r = 1 + \sqrt{2}\sin j$. 35.30 $r = 4\sin 3j$.

36. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, которые заданны параметрическим образом.

36.1 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4$ $(y \geq 4)$.

36.2 $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2$ $(x \geq 2)$.

36.3 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6$ $(0 < x < 8p, y \geq 6)$.

36.4 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ (x \geq 1).$

36.5 $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}\ (x \geq 6\sqrt{3}).$

36.6 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ (0 < x < 4p,\ y \geq 3).$

36.7 $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\ (y \geq 4).$

36.8 $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 12\sqrt{3}\ (x \geq 12\sqrt{3}).$

36.9 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6\ (0 < x < 12p,\ y \geq 6).$

36.10 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \geq 2).$

36.11 $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}\ (y \geq 2\sqrt{3}).$

36.12 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ (0 < x < 6p,\ y \geq 3).$

36.13 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ (x \geq 1).$

36.14 $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}\ (y \geq 4\sqrt{3}).$

36.15 $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 5\ (0 < x < 20p,\ y \geq 5).$

36.16 $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \geq 2).$

36.17 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5\ (y \geq 5).$

36.18 $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2\ (0 < x < 16p,\ y \geq 2).$

36.19 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ (y \geq 3).$

36.20 $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}\ (y \geq \sqrt{3}).$

36.21 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9\ (0 < x < 12p,\ y \geq 9).$

36.22 $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ (y \geq 3).$

36.23 $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}\ (x \geq 9\sqrt{3}).$

36.24 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2\ (0 < x < 4p,\ y \geq 2).$

36.25 $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2).$

36.26 $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2).$

36.27 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1\ (0 < x < 2p,\ y \geq 1).$

36.28 $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\ (x \ge 4).$

36.29 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}\ (x \ge 3\sqrt{3}).$

36.30 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4\ (0 < x < 8p,\ y \ge 4).$

37. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовых координатах.

37.1 $y = e^x + e,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

37.2 $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2},\ 1/4 \le x \le 1.$

37.3 $y = e^x + 25,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

37.4 $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1,\ 0 \le x \le 9/16.$

37.5 $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

37.6 $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2} + 4,\ 0 \le x \le 1/2.$

37.7 $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2.$

37.8 $y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5,\ 1/9 \le x \le 1.$

37.9 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,\ 0 \le x \le 2.$

37.10 $y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

37.11 $y = \ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

37.12 $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le 3/4.$

37.13 $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le p/6.$

37.14 $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le 8/9.$

37.15 $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3.$

37.16 $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le 15/16.$

37.17 $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le 1/4.$

37.18 $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le 1/4.$

37.19 $y = 2 + ch\,x,\ 0 \le x \le 1.$

37.20 $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le p/6.$

37.21 $y = 2 - e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

37.22 $y = 1 - \ln\sin x,\ p/3 \le x \le p/2.$

37.23 $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4.$

37.24 $y = \ln\sin x, p/3 \le x \le p/2.$

37.25 $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

37.26 $y = ch\,x + 3, 0 \le x \le 1.$

37.27 $y = \ln\cos x + 2, 0 \le x \le p/6.$

37.28 $y = e^x + 13,\ \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

37.29 $y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4,\ 0 \le x \le 2.$

37.30 $y = (1 - e^x - e^{-x})/2,\ 0 \le x \le 3.$

38. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

38.1 $r = 3e^{3j/4}, -p/2 \le j \le p/2.$

38.2 $r = 2e^{4j/3}, -p/2 \le j \le p/2.$

38.3 $r = \sqrt{2}e^{j}, -p/2 \le j \le p/2.$

38.4 $r = 5e^{5j/12}, -p/2 \le j \le p/2.$

38.5 $r = 6e^{12j/5}, -p/2 \le j \le p/2.$

38.6 $r = 3e^{3j/12}, 0 \le j \le p/3.$

38.7 $r = 4e^{4j/3}, 0 \le j \le p/3.$

38.8 $r = \sqrt{2}e^{j}, 0 \le j \le p/3.$

38.9 $r = 5e^{5j/12}, 0 \le j \le p/3.$

38.10 $r = 12e^{12j/5}, 0 \le j \le p/3.$

38.11 $r = 2j, 0 \le j \le 4/3.$

38.12 $r = 2(1 - \cos j), -p \le j \le -p/2.$

38.13 $r = 2j, 0 \le j \le 12/5.$

38.14 $r = 4(1 - \sin j), 0 \le j \le p/6.$

38.15 $r = 3j, 0 \le j \le 4/3.$

38.16 $r = 6(1 + \sin j), -p/2 \le j \le 0.$

38.17 $r = 2\cos j, 0 \le j \le p/6.$

38.18 $r = 8(1 - \cos j), -2p/3 \le j \le 0.$

38.19 $r = 2j, 0 \le j \le 3/4.$

38.20 $r = 1 - \sin j, -p/2 \le j \le -p/6.$

38.21 $r = 2j, 0 \le j \le 5/12.$

38.22 $r = 3(1 + \sin j), -p/6 \le j \le 0.$

38.23 $r = 4j, 0 \le j \le 3/4.$

37.24 $r = 5(1 - \cos j), -p/3 \le j \le 0.$

38.25 $r = 5j, 0 \le j \le 12/5.$

37.26 $r = 7(1 - \sin j), -p/6 \le j \le p/6.$

38.27 $r = 8\cos j, 0 \le j \le p/4.$

37.28 $r = 6\cos j, 0 \le j \le p/3.$

38.29 $r = 2\sin j, 0 \le j \le p/6.$

38.30 $r = 8\sin j, 0 \le j \le p/4.$

39. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями параметрическим образом.

39.1 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \le t \le p. \end{cases}$
39.2 $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \le t \le 2p. \end{cases}$
39.3 $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \\ 0 \le t \le 2p. \end{cases}$

39.4 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ 0 \le t \le \dfrac{p}{4}. \end{cases}$
39.5 $\begin{cases} x = (1{,}5 \cdot t^2 - 3)\sin t + 3t\cos t, \\ y = (3 - 1{,}5 \cdot t^2)\cos t + 3t\sin t, \\ 0 \le t \le p/2. \end{cases}$
39.6 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \le t \le p. \end{cases}$

39.7 $\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ p \le t \le 2p. \end{cases}$
39.8 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t, \\ \dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{2p}{3}. \end{cases}$
39.9 $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t), \\ 0 \le t \le \dfrac{p}{3}. \end{cases}$

39.10 $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \\ 0 \le t \le p/3. \end{cases}$
39.11 $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t), \\ y = e^t(\cos t + \sin t), \\ p/2 \le t \le p. \end{cases}$
39.12 $\begin{cases} x = e^{2t}(\cos 2t + \sin 2t), \\ y = e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t), \\ p/6 \le t \le p/4. \end{cases}$

39.13 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \\ 0 \le t \le p/3. \end{cases}$
39.14 $\begin{cases} x = 10\cos^3 2t, \\ y = 10\sin^3 2t, \\ 0 \le t \le p/4. \end{cases}$
39.15 $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t, \\ 0 \le t \le p/4. \end{cases}$

39.16 $\begin{cases} x = 8\cos^3 3t, \\ y = 8\sin^3 3t, \\ 0 \le t \le p/18. \end{cases}$
39.17 $\begin{cases} x = \cos 2t + 2t\sin 2t, \\ y = \sin 2t - 2t\cos 2t, \\ 0 \le t \le p/4. \end{cases}$
39.18 $\begin{cases} x = 3{,}5 \cdot (2\cos t + \cos 2t), \\ y = 3{,}5 \cdot (2\sin t + \sin 2t), \\ 0 \le t \le p/2. \end{cases}$

39.19 $\begin{cases} x = e^{t}(\cos 3t - \sin 3t), \\ y = e^{t}(\cos 3t + \sin 3t), \\ 0 \le t \le 2p. \end{cases}$ 39.20 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 + \cos t), \\ p\ /\ 2 \le t \le 2p\ /\ 3. \end{cases}$ 39.21 $\begin{cases} x = 2\cdot(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2\cdot(2\sin t + \sin 2t), \\ 0 \le t \le p\ /\ 3. \end{cases}$

39.22 $\begin{cases} x = \left(\dfrac{t^2}{2} - 1\right)\sin t + t\cos t, \\ y = \left(1 - \dfrac{t^2}{2}\right)\cos t + t\sin t, \\ 0 \le t \le 2p. \end{cases}$ 39.23 $\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 + \cos t), \\ \dfrac{p}{2} \le t \le \dfrac{3p}{4}. \end{cases}$ 39.24 $\begin{cases} x = 2{,}5\cdot(1 - \cos t), \\ y = 2{,}5\cdot(t - \sin t), \\ \dfrac{p}{4} \le t \le \dfrac{5p}{6}. \end{cases}$

39.25 $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{2}\sin\dfrac{t}{2}, \\ y = \sin\dfrac{t}{2} - \dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}, \\ 0 \le t \le p\ /\ 4. \end{cases}$ 39.26 $\begin{cases} x = 5\cos^2 4t, \\ y = 5\sin^2 4t, \\ \dfrac{p}{24} \le t \le \dfrac{p}{12} \end{cases}$ 39.27 $\begin{cases} x = e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}\right), \\ y = e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{t}{2} + \sin\dfrac{t}{2}\right), \\ 0 \le t \le 3p. \end{cases}$

39.28 $\begin{cases} x = 7(1 + \cos t), \\ y = 7(t + \sin t), \\ p\ /\ 2 \le t \le 3p\ /\ 2. \end{cases}$ 39.29 $\begin{cases} x = 4\cdot(2\cos t + \cos 2t), \\ y = 4\cdot(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \le t \le p. \end{cases}$ 39.30 $\begin{cases} x = \cos 5t + 5t\sin 5t, \\ y = 5\sin t - 5t\cos 5t, \\ 0 \le t \le p^2\ /\ 4. \end{cases}$

40. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций. В вариантах 1-15 ось вращения $Ox$, в вариантах 16-30 ось вращения $Oy$.

40.1 $xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0.$

40.2 $y^2 = (x+4)^3,\ x = 0.$

40.3 $y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$

40.4 $y = x^2,\ y = 1,\ x = 2.$

40.5 $y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}.$

40.6 $x^2 + (y-2)^2 = 1.$

40.7 $y = x^2, y^2 - x = 0.$

40.8 $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$

40.9 $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$

40.10 $y = xe^{x},\ y = 0, x = 1.$

40.11 $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$

40.12 $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$

40.13 $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$

40.14 $y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \le x \le p.$

40.15 $y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \ge 0.$

40.16 $y = (x-1)^2, x = 0, x = 2, y = 0.$

40.17 $y = x^3, y = x.$

40.18 $y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0.$

40.19 $y = x^3, y = x^2.$

40.20 $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$

40.21 $y = (x-1)^2, y = 1.$

40.22 $y = \ln x, x = 2, y = 0.$

40.23 $y=\sqrt{x-1}, y=0, y=1, x=0.5.$

40.24 $y=x^2+1, y=x, x=0, x=1.$

40.25 $y=x^2, x=2, y=0.$

40.26 $x^2/9+y^2/4=1.$

40.27 $y=x^2, 8x=y^2.$

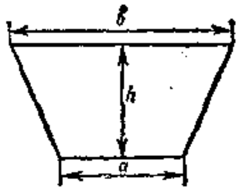
40.28 $y=x^3, x=0, y=8.$

40.29 $y=2-x^2/2, x+y=2.$

40.30 $y^2=4-x, x=0.$

41. Используя определенный интеграл решить следующие задачи.

Варианты 1-10: Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (см. рис.). Плотность воды $r=1000\,кг/м^3$, ускорение свободного падения $g$ положить равным $10\,м/с^2$.




*Указание*. Давление на глубине $x$ равно $rgx$.

41.1 $a=4.5\,м, b=6.6\,м, h=3.0\,м.$

41.2 $a=4.8\,м, b=7.2\,м, h=3.0\,м.$

41.3 $a=5.1\,м, b=7.8\,м, h=3.0\,м.$

41.4 $a=5.4\,м, b=8.4\,м, h=3.0\,м.$

41.5 $a=5.7\,м, b=9.0\,м, h=4.0\,м.$

41.6 $a=6.0\,м, b=9.6\,м, h=4.0\,м.$

41.7 $a=6.3\,м, b=10.2\,м, h=4.0\,м.$

41.8 $a=6.6\,м, b=10.8\,м, h=4.0\,м.$

41.9 $a=6.9\,м, b=11.4\,м, h=5.0\,м.$

41.10 $a=7.2\,м, b=12.0\,м, h=5.0\,м.$

Варианты 11-20: Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H$ км. Масса спутника равна $m$ т., радиус Земли $R_З=6380\,км$. Ускорение свободного падения $g$ у поверхности Земли положить равным $10\,м/с^2$.

41.11 $m=7.0$ т., $H=200\,км.$

41.12 $m=7.0$ т., $H=250\,км.$

41.13 $m=6.0$ т., $H=300\,км.$

41.14 $m=6.0$ т., $H=350\,км.$

41.15 $m=5.0$ т., $H=400\,км.$

41.16 $m=5.0$ т., $H=450\,км.$

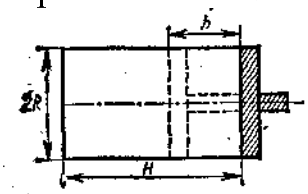
41.17 $m=4.0$ т., $H=500\,км.$

41.18 $m=4.0$ т., $H=550\,км.$

41.19 $m=3.0$ т., $H=600\,км.$

41.20 $m=3.0$ т., $H=650\,км.$

Варианты 21-30: Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением $(103.3\,кПа)$. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на $h$ м (см. рис.).




*Указание*. Уравнение состояния газа $pV=const$, где $p$ — давление, $V$ — объем.

41.21 $H=0.4\,м, h=0.35\,м, R=0.1\,м.$

41.22 $H=0.4\,м, h=0.3\,м, R=0.1\,м.$

41.23 $H=0.4\,м, h=0.2\,м, R=0.1\,м.$

41.24 $H=0.8\,м, h=0.7\,м, R=0.2\,м.$

41.25 $H=0.8\,м, h=0.6\,м, R=0.2\,м.$

41.26 $H=0.8\,м, h=0.4\,м, R=0.2\,м.$

41.27 $H=1.6\,м, h=1.4\,м, R=0.3\,м.$

41.28 $H=1.6\,м, h=1.2\,м, R=0.3\,м.$

41.29 $H=1.6\,м, h=0.8\,м, R=0.3\,м.$

41.30 $H=2.0\,м, h=1.5\,м, R=0.4\,м.$

## РАЗДЕЛ 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения (ДУ), его порядка, решения, общего интеграла.
2. Поле направлений. Построение интегральных кривых с помощью изоклин.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, общий вид и метод их решения.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним, общий вид и методы их решения.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним, общий вид и методы их решения.
6. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.
7. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах и их решение.
8. Однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами. Методы их решений для случая действительных корней характеристического уравнения, которое соответствует заданному дифференциальному уравнению.
9. Однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами. Методы их решений для случая действительных корней характеристического уравнения, которое соответствует заданному дифференциальному уравнению.
10. Неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
11. Неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами, правая часть которого не имеет специальный вид.

### ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

42. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

42.1 $(xy^2 - x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$.

42.2 $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$.

42.3 $xy^2dx + yx^2dy + xdx + 4ydy = 0$.

42.4 $(1 + x^2)dy = (9 + y^2)dx$.

42.5 $(xy^2 + 3y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$.

42.6 $(x+2)^3dy - (y-3)^2dx = 0$.

42.7 $(x-5)^4dy - (y+1)^3dx = 0$.

42.8 $\sin 3y \cos x dy = \cos 3y \sin x dx$.

42.9 $\dfrac{dx}{\cos^2 x \cos y} + ctgx \sin y dy = 0$.

42.10 $e^{2x+5y}dy - xdx = 0$.

42.11 $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$.

42.12 $3^{y^2-x^2} = \dfrac{y \cdot y'}{x}$.

42.13 $y' - \dfrac{\cos(2x+y)}{\cos^3 y} = \dfrac{\cos(2x-y)}{\cos^3 y}$.

42.14 $(1+e^{3y})xdx = e^{3y}dy$.

42.15 $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

42.16 $\sin x \cdot y' = y\cdot\cos x + 2\cos x$.

42.17 $e^x \cdot tgy\, dx = \dfrac{(1-e^x)}{\cos^2 y}dy$.

42.18 $\dfrac{\cos y}{\sqrt{1+x^2}}dx = 2dy + \cos y\, dy$.

42.19 $1+(1+y')\cdot e^y = 0$.

42.20 $e^x \cdot \sin y\, dx + tgy\, dy = 0$.

42.21 $3^{x+2y} + 5^{x-2y}\cdot y' = 0$.

42.22 $y'\cdot\left(\sqrt{x\cdot y} + \sqrt{x}\right) - y = 0$.

42.23 $\sqrt{9-y^2}\, dx + y\cdot\sqrt{4-x^2}\, dy = 0$.

42.24 $\sec^2 x\cdot tgy + y'\sec^2 y\cdot tgx = 0$.

42.25 $x\cdot(y^6+1)dx + y^2\cdot(x^4+1)dy = 0$.

42.26 $y\cdot\ln^3 y + y'\cdot\sqrt{x+1} = 0$.

42.27 $dy + \sin(x+y)dx = \sin(x-y)dx$.

42.28 $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{9+x^2}dy = 0$.

42.29 $\dfrac{dy}{dx} + \cos(x+2y) = \cos(x-2y)$.

42.30 $\ln(\cos y)dx + x\cdot tgy\, dy = 0$.

43. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

43.1 $(x^2-y^2)dy = 2\cdot x\cdot y\, dx$.

43.2 $y\cdot(\ln y - \ln x)\, dx - x\, dy = 0$.

43.3 $(x\cdot y' - y)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$.

43.4 $\dfrac{x}{y}dy = \dfrac{x}{y}\cdot e^{\frac{y}{x}}\, dx + dx$.

43.5 $(y+x)\, dy = (y-x)\, dx$.

43.6 $x\, dy = y\cdot(1-\ln x + \ln y)\, dx$.

43.7 $x\cdot y' = x\cdot\cos\dfrac{y}{x} + y$.

43.8 $x\, dy = \left(y + x\cdot\sin\dfrac{y}{x}\right)dx$.

43.9 $\left(x^2 + 2\cdot x\cdot y\right)dx + x\cdot y\, dy = 0$.

43.10 $y = x\cdot(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

43.11 $x\cdot y + y^2 = (2\cdot x^2 + x\cdot y)\cdot y'$.

43.12 $\left(2\cdot\sqrt{x\cdot y} - y\right)dx + x\, dy = 0$.

43.13 $x\cdot y' + y\cdot\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$.

43.14 $\left(x^2+y^2\right)dx + 2\cdot x\cdot y\, dy = 0$.

43.15 $\left(y^2 - 2\cdot x\cdot y\right)dx - x^2\, dy = 0$.

43.16 $\left(x^2-y^2\right)dx + 2\cdot x\cdot y\, dy = 0$.

43.17 $\left(x+2\cdot y\right)dx + x\, dy = 0$.

43.18 $\left(2\cdot x - y\right)dx + (x+y)\, dy = 0$.

43.19 $2\cdot x^3\cdot y' = y\cdot(2\cdot x^2 - y^2)$.

43.20 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

43.21 $x\, dy = \sqrt{x^2-y^2}\, dx + y\, dx$.

43.22 $x\, dy = y\, dx + x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}\, dx$.

43.23 $x\cdot y' = y + 2\cdot\sqrt{y^2 + 9\cdot x^2}$.

43.24 $x^2\, dy = x\cdot y\, dx + y^2\cdot e^{-x/y}\, dx$.

43.25 $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\, dy = 0$.

43.26 $2\cdot x^2\, dy = (x^2+y^2)\, dx$.

43.27 $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

43.28 $\left(2\sqrt{x\cdot y} - y\right)dx + x\,dy = 0$.

43.29 $\left(y + \sqrt{x\cdot y}\right)dx = x\,dy$.

43.30 $\sqrt{y^2 + x^2}\;dx = y\,dx - x\,dy$.

44. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

44.1 $y' = \dfrac{2x-3y+1}{4x+y-5}$.

44.2 $y' = \dfrac{6x-5y+1}{2x-y-1}$.

44.3 $y' = \dfrac{4x+3y-7}{2x-5y+3}$

44.4 $y' = \dfrac{7x-12y+5}{3x+2y-5}$

44.5 $y' = \dfrac{4x-5y+1}{3x+y-4}$

44.6 $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x+y-6}$

44.7 $y' = \dfrac{4x+2y-6}{3x+y-4}$

44.8 $y' = \dfrac{7x-3y-4}{4x-9y+5}$

44.9 $y' = \dfrac{3x-3y}{2x+2y-4}$

44.10 $y' = \dfrac{x-y}{2x+y-3}$

44.11 $y' = \dfrac{6x+y-7}{8x+y-9}$.

44.12 $y' = \dfrac{4x-y-3}{4x+3y-7}$

44.13 $y' = \dfrac{4x-5y+1}{2x+7y-9}$

44.14 $y' = \dfrac{x-y}{3x+2y-5}$

44.15 $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-y}$

44.16 $y' = \dfrac{x-3y+2}{x+y-2}$

44.17 $y' = \dfrac{x-5y+4}{9x-4y-5}$

44.18 $y' = \dfrac{6x+y-7}{3x+y-4}$

44.19 $y' = \dfrac{6x-2y-4}{3x+y-4}$

44.20 $y' = \dfrac{3x+3y-6}{4x+5y-9}$

44.21 $y' = \dfrac{5x-6y+1}{7x+2y-9}$

44.22 $y' = \dfrac{3x-2y+1}{5x+2y-7}$

44.23 $y' = \dfrac{x-7y+8}{2x-y-1}$

44.24 $y' = \dfrac{x+8y-9}{4x-y-3}$

44.25 $y' = \dfrac{2x+y-3}{x+6y-7}$

44.26 $y' = \dfrac{6x-5y-1}{2x+5y-7}$

44.27 $y' = \dfrac{2x-y-1}{4x-y-3}$

44.28 $y' = \dfrac{6x-y-5}{4x-y-3}$

44.29 $y' = \dfrac{5x-y-4}{7x+y-8}$

44.30 $y' = \dfrac{4x+3y-7}{2x+y-3}$

45. Найти частное решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

45.1 $(x+1)y' + y = x^2$, $y(0) = 5$.

45.2 $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x$, $y(p/2) = p/2$.

45.3 $y'\cos x = y\sin x + \cos^2 x$, $y(3p/2) = -1/4$.

45.4 $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x$, $y(0) = -1$.

45.5 $y' + \dfrac{x\cdot y}{1-x^2} = x + \arcsin x$, $y(0) = 0$.

45.6 $(1+x^2)y' - 2xy = 3x^2(1+x^2)^2$, $y(0) = 1$.

45.7 $x\cdot y' + y - 3\cdot\sin x = 0$, $y(p/2) = 2/p$.

45.8 $y' - y\cdot\mathrm{tg}x = 4\cdot x^3\cdot\sec x$, $y(0) = 0$.

45.9 $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$, $y(0) = 0$.

45.10 $xy' + y - 2x^2 = 0$, $y(1) = 1$.

45.11 $(x+1) \cdot y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$.

45.12 $x \cdot y' - 2 \cdot y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$.

45.13 $x \cdot y' + y = \sin x$, $y(p\ /\ 2) = 2\,/\,p$.

45.14 $(x^2 - 1) \cdot y' - x \cdot y = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$.

45.15 $(1 - x^2) \cdot y' + x \cdot y = 1$, $y(0) = 1$.

45.16 $y' \cdot \mathrm{ctg} x - y = 2\cos^2 x \cdot \mathrm{ctg} x$, $y(0) = 0$.

45.17 $x^2 \cdot y' = 2 \cdot x \cdot y + 3$, $y(1) = -1$.

45.18 $y' - 2 \cdot x \cdot y = x \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

45.19 $y' - 3 \cdot x^2 \cdot y - x^2 \cdot e^{x^3} = 0$, $y(0) = 0$.

45.20 $x \cdot y' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$.

45.21 $y' - y \cdot \mathrm{tg} x = \sec x$, $y(0) = 1$.

45.22 $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $y(p/2) = 2/p$.

45.23 $\sin 2x\, dy = 2 \cdot (y + \cos x)\, dx$, $y(p/4) = -\sqrt{2}$.

45.24 $y' = 2 \cdot y \cdot \sin^2 x + 2 \cdot x \cdot e^{x - \frac{1}{2}x^2}$, $y(0) = 0$.

45.25 $x \cdot (x-1) \cdot y' + y = x^2 \cdot (2x - 1)$, $y(2) = 4$.

45.26 $x \cdot y' + y - e^x = 0$, $y(1) = e$.

45.27 $y' - 2 \cdot y \cdot \mathrm{ctg} x = \sin^3 x$, $y(p\ /\ 2) = 0$.

45.28 $y' + 2 \cdot y \cdot \mathrm{tg} x = x \cdot \cos^3 x$, $y(0) = 1$.

45.29 $y' - y \cdot \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.

45.30. $x \cdot y' - y + \ln x = 0x$, $y(1) = 2$.

46. Решить задачу Коши при заданном начальном условии $y(3) = m$, где число $m$ – номер варианта. При решении задания необходимо указать тип уравнения.

46.1 $y^2 y' + \dfrac{y^3}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

46.2 $y' + 4x^3 y = \dfrac{(x^3+1)e^{-4x}}{y^{-2}}$.

46.3 $y' + y = x\sqrt{y}$.

46.4 $y' - y = \dfrac{x}{y} e^{2x}$.

46.5 $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \sqrt{y} \cdot \mathrm{arctg} x$.

46.6 $y' + x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{y^2}}$.

46.7 $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

46.8 $2x^3 y y' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$.

46.9 $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$.

46.10 $xy' + y = y^2 \ln x$.

46.11 $x(x-1) \cdot y' + y^3 = x \cdot y$.

46.12 $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = x + \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 - 1}$.

46.11 $y' + y^2 \cos x = y$. 46.14 $y' + y^2 \cdot \cos x = y \cdot tgx$. 46.15 $\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x^3$.

46.16 $y' = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2x}$. 46.17 $y' - \frac{3y}{2x} = -\frac{(5x^2+3)y^3}{2x}$. 46.18 $\frac{y'}{x} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2}$.

46.19 $y' = \frac{y^2 \ln x}{3x} - \frac{y}{3x}$. 46.20 $\frac{y'}{1-x^3} + \frac{4x^3 y}{1-x^3} = 4e^{4x} y^2$. 46.21 $y' - y = 2y^2 x$.

46.22 $y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2 \ln x}{x}$. 46.23 $\frac{y'}{x-1} + \frac{xy}{x-1} = e^x y^2$. 46.24 $\frac{y'}{x} - \frac{y}{x} = y^2$.

46.25 $y' + 2xy = 2x^3 y^3$. 46.26 $2\left(\frac{y'}{x-1} + \frac{xy}{x-1}\right) = e^x y^2$. 46.27 $y' + y = y^2 x$

46.28 $y' + \frac{y}{3x} = \frac{y^2}{3}$. 46.29 $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$. 46.30 $y' + y = \frac{x}{y^2}$

47. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

47.1 $\left(1 + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx + \frac{y^2 - x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} dy = 0$. 47.2 $(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0$.

47.3 $y' = \frac{3x^2 - 2x - y}{x - 2y - 3y^2}$. 47.4 $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$.

47.5 $y' = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2 y + 4y^3}$. 47.6 $\frac{\sin 2x + xy}{y}dx + \frac{y^3 - \sin^2 x}{y^2}dy = 0$.

47.7 $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$. 47.8 $y' = -\frac{3y^2 + 2xy + 2x}{6xy + x^3 + 3}$.

47.9 $y' = \frac{2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)}{\sqrt{x^2 - y}}$. 47.10 $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

47.11 $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$. 47.12 $y' = \frac{2x\cos^2 y}{x^2 \sin 2y - 2y}$.

47.13 $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$. 47.14 $y' = \frac{x^2 - 3xy^2}{3x^2 y - 6y^2 - 1}$.

47.15 $(\ln y - 2x)dx + \frac{x - 2y^2}{y}dy = 0$. 47.16 $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

47.17 $3 \cdot x^2 \cdot e^y + (x^3 \cdot e^y - 1) \cdot y' = 0$. 47.18 $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$.

47.19 $\frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$. 47.20 $e^y\, dx + (x \cdot e^y - 2 \cdot y)\, dy = 0$.

47.21 $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$. 47.22 $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

47.23 $\frac{dy}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$. 47.24 $\left(xe^x+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{dy}{x}=0$.

47.25 $tgx\,dx+\left(\frac{y-\ln(\cos x)}{y}\right)dy=0$. 47.26 $y'=-\frac{e^x\sin y+x}{e^x\cos y+y}$.

47.27 $(3x^2y^2+7)dx+2x^3ydy=0$. 47.28 $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$.

47.29 $(xy^2-x^3)dx+(x^2y-y)dy=0$. 47.30 $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2 y\right)dy=0$

48. С помощью изоклин постройте поле направлений и начертите общую картину хода интегральных кривых данного уравнения.

48.1 $3yy'=-x$. 48.2 $y'=x^2+2y$. 48.3 $y'=\sqrt{x^2+y^2}$.

48.4 $y'=x^2-y$. 48.5 $y'=4x^2+y^2$. 48.6 $y'=x^2+4y^2$.

48.7 $xy'=2y$. 48.8 $y'=y-x^2$. 48.9 $y'=x-y$.

48.10 $2(y+y')=x+3$. 48.11 $y'=\frac{2x}{3y}$. 48.12 $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

48.13 $y'=xy$. 48.14 $yy'=-2x$. 48.15 $y'=(y-1)^2$.

48.16 $yy'+x=0$. 48.17 $y'=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$. 48.18 $y'=-\frac{x}{y}$.

48.19 $y'=x(y-1)$. 48.20 $y+y'=x-2$. 48.21 $y'=\sqrt{4x^2+y^2}$.

48.22 $y'=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$. 48.23 $y'=-2xy$. 48.24 $y'=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$.

48.25 $yy'=-\frac{x}{2}$. 48.26 $y'=y-x$. 48.27 $y'=x^2-y^2$.

48.28 $y'=x+2y$. 48.29 $y'=x-y^2$. 48.30 $y'=\frac{x-y}{x+y}$.

49. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

49.1 $xy''+y'=\ln\frac{y'}{x}$. 49.2 $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$. 49.3 $xy'''-y''=0$.

49.4 $xy''-y'=x^2e^x$. 49.5 $(x+1)y'''+y''=(x+1)$. 49.6 $xy''-y'=x^2$.

49.7 $x^3y''+x^2y'=1$. 49.8 $y''-2y'ctgx=\sin^3 x$. 49.9 $y''+y'=\sin x$.

49.10 $xy''+y'=\ln x$. 49.11 $(x^2+1)y''+2xy'=x^3$. 49.12 $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$.

49.13. $xy'''-2y''=-\frac{2}{x^2}$. 49.14 $y''-\frac{y'}{x-1}=x^2-x$. 49.15 $y''=y'+x$.

49.16 $x^4y''+x^3y'=4$. 49.17 $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$. 49.18 $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

49.19 $xy'''+y''=\sqrt{x}$. 49.20 $(1+x^2)y''-2xy'=0$. 49.21 $y''tgx-y'=1$.

49.22 $y'''+\frac{y''}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^5}}$. 49.23 $y''(e^x+1)+y'=0$. 49.24 $x^2y''+xy'=1$.

49.25 $xy'''-y''+\frac{1}{x}=0$. 49.26 $xy''+xy'^2-y'=0$. 49.27 $xy'''+y''=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

49.28 $2xy'y''-y'^2=1$. 49.29 $y''+y'tgx=\sin 2x$. 49.30. $y''\ln x-\frac{y'}{x}=0$.

50. Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

50.1 $y'''=y''^2$, $y''(0)=-1, y'(0)=0, y(0)=1$.

50.2 $2yy''=y'^2$, $y(-1)=4,\ y'(-1)=1$.

50.3 $y''^2=4(y'-1)$, $y(0)=0,\ y'(0)=2$.

50.4 $yy''-y'^2=y^3$, $y(0)=-0{,}5, y'(0)=0$.

50.5 $y''y^3=1$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

50.6 $yy''-y'^2=y^2\ln y$, $y(0)=y'(0)=1$.

50.7 $yy''-y'^2=0$, $y(0)=1, y'(0)=2$.

50.8 $y''+yy'^3=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$.

50.9 $2y'^2=(y-1)y''$, $y(0)=y'(0)=2$.

50.10 $4y''^2=y'^2+1$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

50.11 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0)=y'(0)=0$.

50.12 $yy''-2yy'\ln y=y'^2$, $y(0)=y'(0)=1$.

50.13 $y''=y'/\sqrt{y}$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$.

50.14 $y''(1+y)=y'^2+y'$, $y(0)=y'(0)=2$.

50.15 $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$, $y(0)=y'(0)=1$.

50.16 $y''=-\frac{2}{1-y}y'^2$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

50.17 $y''-y'^2-y'=0$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

50.18 $y''+yy''-5y'^2=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

50.19 $2y'^2=yy''$, $y(0)=1, y'(0)=2$.

50.20 $y''=y^{-3}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

50.21 $2yy''-y'^2+1=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=1$.

50.22 $y''^2-y'=0$, $y(0)=2/3,\ y'(0)=1$.

50.23 $y'' + y'^2 - 1 = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

50.24 $2yy'' - y'^2 = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 1.$

50.25 $y'' = (1 + y'^2)^{3/2},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

50.26 $y'' - 2\sin^3 y \cdot \cos y = 0,$ $y(1) = \frac{p}{2},\ y'(1) = 1.$

50.27 $e^{-y} \cdot y'' - y' = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

50.28 $y \cdot y'' - 2 \cdot y \cdot y' \cdot \ln y = y^2,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

50.29 $y'' + 50 \cdot \sin y \cdot \cos^3 y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

50.30 $y'' = -yy'^3,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

51. Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

51.1 $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -9,\ y'''(0) = -27$.

51.2 $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -16$.

51.3 $y''' - y'' - y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.

51.4 $y''' + 2y'' + y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -3$.

51.5 $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,\ y^{IV}(0) = 27$.

51.6 $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -9$.

51.7 $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 12$.

51.8 $y^{IV} - 16y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -8$.

51.9 $y^{IV} - y = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = -4$.

51.10 $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 2$.

51.11 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -6$.

51.12 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4$.

51.13 $y''' - y'' + y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

51.14 $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -8,\ y'''(0) = 24$.

51.15 $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2,\ y'''(0) = 0$.

51.16 $y''' - 13y'' + 12y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 133$.

51.17 $y''' + 9y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 9,\ y''(0) = -18$.

51.18 $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,\ y(0) = -2.5,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$.

51.19 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.

51.20 $y''' + 3y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$

51.21 $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0$.

51.22 $y''' + y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

51.23 $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14$.

51.24 $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 8$.

51.25 $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$.

51.26 $y''' + y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$.

51.27 $y''' - 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$.

51.28 $y''' - y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$.

51.29 $y^{V} - 9y''' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0,\ y^{IV}(0) = 0$.

51.30 $y''' - 7y'' + 6y' = 0,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 30$.

52. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

52.1 $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$.

52.2 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$.

52.3 $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.

52.4 $y'' - y = -4\cos x + 2\sin x$.

52.5 $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x$.

52.6 $y'' - y' + y = -13\sin 2x$.

52.7 $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.

52.8 $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$.

52.9 $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

52.10 $y'' + y = 4xe^{x}$.

52.11 $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.

52.12 $y'' - 4y' + 5y = (3\sin x + \cos x)e^{-2x}$.

52.13 $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

52.14 $y'' + y' + y = 6e^{-x}$.

52.15 $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$.

52.16 $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

52.17 $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.

52.18 $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.

52.19 $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

52.20 $y'' + 4y' = e^{x}(12\cos 2x + \sin 2x)$.

52.21 $y'' - 6y' + 13y = -3\cos 2x$.

52.22 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$.

52.23 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

52.24 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

52.25 $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

52.26 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

52.27 $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

52.28 $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$.

52.29 $y'' + 2y' - 3y = x^2e^{x}$.

52.30 $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$.

53. Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

53.1 $y'' + y' = 2x\cos x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

53.2 $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

53.3 $y''' - y' = 6 - 3x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

53.4 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0$.

53.5 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 4$.

53.6 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 8$.

53.7 $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$, $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

53.8 $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 6$.

53.9 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$, $y(0) = y'(0) = 0$.

53.10 $y'' + 9y = 15\sin 2x$, $y(0) = -7,\ y'(0) = 0$.

53.11 $y'' + y' = 2x^2e^{x}$, $y(0) = 5,\ y'(0) = 0{,}5$.

53.12 $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

53.13 $y'' + 9y = \cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

53.14 $y'' + 2y' + y = \cos x,$ $y(0) = y'(0) = 0.$

53.15 $y'' + y' = 2x + x^2,$ $y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$

53.16 $y'' - 9y = e^{-2x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

53.17 $y''' + y'' = \sin x,$ $y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0.$

53.18 $y''' - 2y'' + y' = 4,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2, y''(0) = -2.$

53.19 $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

53.20 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2},$ $y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

53.21 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),$ $y(0) = 2, y'(0) = 2.$

53.22 $y'' - 8y' + 16y = (2x - 3)e^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

53.23 $y'' - 10y' + 25y = \left(x^2 + 8x\right)e^{5x},$ $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

53.24 $y'' + 4y = 4e^{7x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

53.25 $y'' + 9y = 36e^{3x},$ $y(0) = 2, y'(0) = 6.$

53.26 $y'' - 8y' + 16y = (x + 6)e^{4x},$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

53.27 $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

53.28 $y'' - 2y' + y = 16e^x,$ $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

53.29 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x,$ $y(0) = 3/4, y'(0) = -1/2.$

53.30 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1,$ $y(0) = 2, y'(0) = 3.$

54. Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

54.1 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

54.2 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{(1 + e^{-x})},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

54.3 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},$ $y(p/2) = 1,\ y'(p/2) = p/2.$

54.4 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(1 + e^{-x})},$ $y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2.$

54.5 $y'' + y = 2\mathrm{ctg} x,$ $y(\frac{p}{2}) = 1,\ y'(\frac{p}{2}) = 2.$

54.6 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x},$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

54.7 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{(2 + e^x)},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

54.8 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

54.9 $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

54.10 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x},$ $y(p/8) = 3,\ y'(p/8) = 2p.$

54.11 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$,
$y(p/4) = 2,\ y'(p/4) = p$.

54.12 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(2 + e^{-x})}$,
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3$.

54.13 $y'' + 0,25 \cdot y = 0,25 \cdot \mathrm{ctg}(0,5 \cdot x)$,
$y(p) = 2,\ y'(p) = 0,5$.

54.14 $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$,
$y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1$.

54.15 $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

54.16 $y'' + y = 4\mathrm{ctg} x$,
$y(p/2) = 4,\ y'(p/2) = 4$.

54.17 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$,
$y(p/6) = 4, y'(p/6) = 3p/2$.

54.18 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

54.19 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$,
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3$.

54.20 $y'' + p^2 y = \dfrac{p^2}{\cos p x}$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

54.21 $y'' + 4y = 8\mathrm{ctg} 2x$,
$y(p/4) = 5,\ y'(p/4) = 4$.

54.22 $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$,
$y(0) = \ln 4, y'(0) = 3 - \ln 8$.

54.23 $y'' + p^2 y = \dfrac{p^2}{\sin p x}$,
$y(1/2) = 1, y'(1/2) = p^2/2$.

54.24 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$,
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2$.

54.25 $y'' + \dfrac{1}{p^2} y = \dfrac{1}{p^2 \cos \dfrac{x}{p}}$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

54.26 $y'' + 4y = 4\mathrm{ctg} 2x$,
$y(p/4) = 3, y'(p/4) = 2$.

54.27 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{2 + e^{-2x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0$.

54.28 $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$,
$y(p/2) = 2,\ y'(p/2) = 0$.

54.29. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0$.

54.30 $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$,
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

55. Найти общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами двумя способами: а) методом исключения; б) используя характеристическое уравнение матрицы указанной системы.

55.1 $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

55.2 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 12y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$

55.3 $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 4y. \end{cases}$

55.4 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 12y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

55.5 $\begin{cases} \dot{x} = 14x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 12y. \end{cases}$

55.6 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$

55.7 $\begin{cases} \dot{x} = 12x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 10y. \end{cases}$

55.8 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$

55.9 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 8y. \end{cases}$

55.10 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

55.11 $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$

55.12 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

55.13 $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

55.14 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y, \\ \dot{y} = -2x - 4y. \end{cases}$

55.15 $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

55.16 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

55.17 $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$

55.18 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

55.19 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

55.20 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y, \\ \dot{y} = -3x - 4y. \end{cases}$

55.21 $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

55.22 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

55.23 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

55.24 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

55.25 $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 8y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

55.26 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 11y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

55.27 $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

55.28 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

55.29 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 5y. \end{cases}$

55.30 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р .М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн.: Выш. Шк. 1984. – Ч. 1- 3.

2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988 . – 432 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985 . – Т. 2. – 456 с.

4. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Мн.: Выш. шк., 1990. – Ч. 1 – 2.

6. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Мн.: Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. Школа, 1983. – 168 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ