МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей

ВИТЕБСК
2012

УДК 517 (076.1) (075.8)

Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2012.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В.С.,
ст. преп. Дмитриев А.П.,
ст. преп. Завацкий Ю.А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В.Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения, вопросы к экзамену и зачёту по курсу “Высшая математика”. Указания предназначены для проведения практических занятий у студентов первого курса экономического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
6 ноября 2012 г., протокол № 4.

Рецензент: ст. преп. Статковский Н.С.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________ 2012 г., протокол № _____.

Ответственный за выпуск: Лопатнёва Н.Г.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч.-изд. лист. _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ №____
Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия №02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих экономистов. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты-экономисты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов экономического факультета. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена или зачёта, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей первого года обучения.

В методических указаниях содержатся рекомендации по девяти основным темам двух важных разделов «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы, методы и т. п.), который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с базовой и учебной программами дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей, а также могут применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в методических указаниях теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

Данная разработка может быть использована преподавателем как раздаточный материал на практических занятиях по высшей математике.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР)

1. Определение матрицы. Операции над матрицами.
2. Определитель и его свойства.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Общие понятия.
6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамара.
7. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Решения систем неоднородных линейных алгебраических уравнений.
10. Решение систем однородных линейных алгебраических уравнений.
11. Векторы. Линейные операции над векторами.
12. Векторное пространство. Примеры векторных пространств. Координаты вектора. Декартовая система координат.
13. Скалярная и векторная проекция вектора на ось.
14. Скалярное произведение геометрических векторов и его вычисление в ортонормированном базисе.
15. Векторное произведение геометрических векторов и его вычисление в ортонормированном базисе.
16. Смешанное произведение геометрических векторов и его вычисление в ортонормированном базисе.
17. Линейный оператор. Собственные векторы и значения матрицы линейного оператора.
18. Уравнения линии и поверхности.
19. Уравнения прямой линии на плоскости.
20. Взаимное расположение прямых линий на плоскости.
21. Уравнения плоскости в пространстве.
22. Уравнения прямых линий в пространстве.
23. Взаимное расположение прямых линий в пространстве.
24. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
25. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
26. Эллипс и его характеристики.
27. Гипербола и ее характеристики.
28. Парабола и ее характеристики.
29. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.
30. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
31. Правила предельного перехода для числовых последовательностей.
32. Предел функции в точке и его свойства.

33. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых функций.

34. Правила предельного перехода для функций.

35. Замечательные пределы для функций в точке и на бесконечности.

36. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функций на множестве и их свойства.

37. Точки разрыва функции и их классификация.

38. Комплексные числа (алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи). Операции над комплексными числами в различной форме записи. Основная теорема алгебры.

39. Экономический, геометрический и механический смысл производной.

40. Теорема о дифференцировании суммы функций.

41. Теорема о дифференцировании произведения функций.

42. Теорема о дифференцировании частного функций.

43. Дифференцирование обратной функции.

44. Дифференцирование сложной функции.

45. Дифференцирование функций, заданных параметрическим образом.

46. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных неявно.

47. Производные высшего порядка.

48. Дифференцируемость функций. Дифференциал и его геометрический смысл.

49. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши.

50. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов функции по правилу Лопиталя – Бернулли.

51. Монотонные функции. Необходимые и достаточные условия монотонности функции.

52. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума функции. Достаточные условия существования экстремума функции.

53. Глобальный экстремум функции на отрезке.

54. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости, вогнутости функции на интервале.

55. Точки перегиба графика функции. Необходимые и достаточные условия существования у функции точек перегиба.

56. Асимптоты графика функции. Нахождение вертикальных и наклонных асимптот.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ
(практическое занятие № 1)

Содержание: матрицы, операции над матрицами, определитель и методы его вычисления, ранг матрицы.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 1.1.1 Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, которая содержит m строк и n столбцов.

$$A = A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n},$$

где $a_{ij}\left(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}\right)$ – элементы матрицы, которые могут быть числами, функциями, векторами, матрицами и другими произвольными объектами. Первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс j указывает номер столбца. Если $i = 1$, то матрица называется *матрицей-строкой*, если $j = 1$, то матрица называется *матрицей-столбцом*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O.

Матрица, в которой $i = j$, то есть число строк равно числу столбцов, называется квадратной матрицей. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ образуют побочную диагональ. Матрица, в которой ниже и выше главной диагонали все элементы равны 0, называется *диагональной* матрицей. Диагональная матрица, все элементы которой равны 1, называется *единичной* и обозначается E.

На множестве матриц вводятся следующие операции: сложение матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц, транспонирование матрицы.

1. *Сложение матриц.* Данная операция вводится только для матриц одинаковой размерности. Суммой матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ и матрицы $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right) = A_{m\times n} + B_{m\times n}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}\right)$.

2. *Умножение матрицы на число*. Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ на число α называется матрица $C = \alpha \cdot A = \left(c_{ij}\right)$, где $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}\right)$.

3. *Произведение матриц.* Данная операция вводится только для согласованных матриц. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B, если

число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p}=\left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p}=\left(c_{ik}\right)$, где $c_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$ $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}\right)$. В общем случае операция произведения матриц не обладает свойством коммутативности, то есть $AB\neq BA$. Если выполняется равенство $AB=BA$, то матрицы называются перестановочными или коммутирующими. Для произведения матриц всегда справедливы равенства: $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$, $A\left(B+C\right)=AB+AC$, $\left(B+C\right)A=BA+CA$ и $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ раз}$. Если матрицы A и E согласованы, то $AE=EA=A$.

4. *Транспонирование матриц.* Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Матрица A^T к матрице A, если она получена из неё путём замены строк на столбцы, а столбцов на строки. Для транспонированных матриц справедливы равенства: $\left(A^T\right)^T=A$, $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$ и $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$

Перестановкой чисел $1,2,3,\ldots,n$ называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно $n!$. Рассмотрим перестановку из чисел $j_1,j_2,\ldots,j_n$. Два числа в перестановке образуют инверсию, если большее число стоит левее меньшего. Число $t\left[j_1,j_2,\ldots,j_n\right]$ указывает число инверсий в перестановке.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1.2 *Определителем* n-го порядка называется алгебраическая сумма произведений вида $a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}$, где элементы $a_{1j_1},a_{2j_2},\ldots,a_{nj_n}$ матрицы A взяты по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Знак перед произведением ставится «$+$», если число инверсий в перестановке из чисел $j_1,j_2,\ldots,j_n$ является чётным, а знак «$-$», если число инверсий в этой перестановке является нечётным.

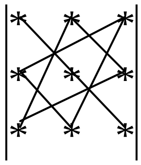
$$|A|=\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{перестановки \\ (j_1,j_2,\ldots,j_n)}}(-1)^{t[j_1,j_2,\ldots,j_n]}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}.$$

Определитель второго порядка равен числу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

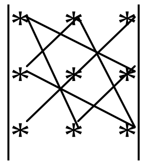
Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника или правилу Саррюса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематическая запись правила треугольника имеет вид:



"+"



"–"

Со знаком «+» выбираем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями параллельными главной диагонали; со знаком «–» выбираем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали.

Приведём основные свойства определителей:

1) $\left|A^T\right| = |A|$;

2) если определитель содержит нулевую строку, то его значение равно нулю,

3) если в определителе имеются две равные строки, то его значение равно нулю;

4) если строка (столбец) определителя представляет собой линейную комбинацию других строк (столбцов), то его значение равно нулю;

5) если в определителе поменять местами две строки (столбца), то значение определителя изменит знак на противоположный;

6) постоянный множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

7) если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;

8) значение определителя не изменится, если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же произвольное число, отличное от нуля;

9) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Определение 1.1.3 *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка, путём вычёркивания i-ой строки и j-го столбца.

Определение 1.1.4 *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$.

Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Значение определителя равно алгебраической сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Вычисление значения определителя путём разложения по i-ой строке:

$$|A|=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}.$$

Вычисление значения определителя путём разложения по j-у столбцу:

$$|A|=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+...+a_{nj}\cdot A_{nj}.$$

Определение 1.1.5 Матрица называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля.

Определение 1.1.6 Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если существуют произведения матриц $A^{-1}\cdot A$ и $A\cdot A^{-1}$, которые равны между собой и равны единичной матрице, то есть $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Обратная матрица существует только у невырожденных квадратных матриц и имеет ту же размерность, что и сама матрица.

Для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которую находим по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot C=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется союзной или присоединённой, её элементами являются алгебраические дополнения транспонированной матрицы A^{T}.

Определение 1.1.7 *Рангом* матрицы A называется число $r=rangA$, которое равно наивысшему порядку минора, отличному от нуля.

Свойства ранга матрицы:

1) $0\le rangA\le\min(m;n)$, где m,n – число строк и столбцов матрицы;
2) $rangA^{T}=rangA$;
3) элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы;
4) если все возможные миноры k-го порядка равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

К элементарным преобразованиям относятся:

a) перестановка строк (столбцов) матрицы;
b) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

c) умножение строки (столбца) матрицы на число отличное от нуля, и прибавление к ней соответствующих элементов другой строки (столбца).

Строка (столбец) матрицы назовём линейно-независимой, если её (его) нельзя представить в виде линейной комбинации остальных строк (столбцов).

Определение 1.1.8 *Минор называется базисным*, если он отличен от нуля и его порядок совпадает с рангом матрицы.

Теорема о базисном миноре. Базисные строки (столбцы) матрицы, которые соответствуют её базисному минору, являются линейно-независимыми, а любые строки (столбцы) матрицы, которые не входят в базисный минор, являются линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Ранг матрицы находится либо *методом окаймляющих миноров*, либо методом *элементарных преобразований*, которые не изменяют ранга матрицы.

При вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров переходим последовательно от миноров низшего порядка к минорам более высокого порядка. Если найден минор *M*, который имеет порядок k и при этом отличен от нуля, то необходимо вычислить миноры $k+1$ порядка, окаймляющие минор *M*, то есть содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен числу k. При вычислении ранга матрицы методом элементарных преобразований приводим матрицу к трапецеидальному виду, вычёркивая нулевые строки (столбцы). Преобразования проводим либо только над строками, либо только над столбцами. Ранг матрицы равен числу линейно-независимых строк (столбцов).

Рассмотрим некоторые **матричные модели в экономике**.

1. Пусть матрицы D_1 и D_2 – *матрицы доходов* данных предприятий в нескольких регионах за один и тот же период времени, в первом и втором временных отрезках. Тогда матрица $\bar{D}$, которая характеризует средние размеры приростов предприятий за заданный период времени, равна матрице изменений доходов предприятий, за указанные временные отрезки, делённая на k – количество заданных периодов времени во временных отрезках: $\bar{D} = \frac{1}{k}\left(D_2 - D_1\right)$.

2. Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$ норм расхода *i*-го вида сырья для выпуска изделий *j*-го типа и матрица V ежедневного объёма выпуска продукции каждого типа, при условии, что сырьё используется полностью. Тогда матрица запаса сырья имеет вид: $Z = AV$.

3. Пусть даны матрицы: $A = \left(a_i\right)$, где a_i – суммарные затраты сырья i; $K = \left(\kappa_j\right)$, где κ_J – произведённое количество продукта j; $B = \left(b_{ij}\right)$, где b_{ij} – затраты сырья i для одной единицы продукции j; $C = \left(c_{kj}\right)$, где c_{kj} – затраты промежуточного продукта k на одну единицу конечного продукта j; $D = \left(d_{ik}\right)$, где d_{ik} – затраты сырья i для одной единицы продукции k.

Простой метод анализа «затраты – выпуск»: $A = B \cdot K$.

Обратный метод анализа «затраты – выпуск»: $К = B^{-1} \cdot A$, при условии, что матрица B является невырожденной, то есть $|B| \neq 0$.

Сложный метод анализа «затраты – выпуск»: $A = D \cdot C \cdot К$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти линейную комбинацию $2A - 3B$, если матрицы A и B имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 14 \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 \\ 6 & -9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -23 & -4 \\ 0 & 19 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Даны матрицы о доходах D_1 и D_2 трёх предприятий в трёх регионах за 2007 и 2012 годы в у. е. Найти матрицу $D_{пд}$ приростов доходов за рассматриваемый период. Выяснить экономический смысл элементов полученной матрицы доходов. Найти средние размеры прироста за указанный период.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 470 & 340 & 430 \\ 560 & 350 & 345 \\ 325 & 125 & 202 \end{pmatrix} \text{ и } D_1 = \begin{pmatrix} 430 & 250 & 390 \\ 535 & 350 & 245 \\ 280 & 245 & 182 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим матрицу доходов трёх предприятий по трём регионам с 2007 по 2012 годы.

$$D_{пд} = D_2 - D_1 = \begin{pmatrix} 470-430 & 340-250 & 430-390 \\ 560-535 & 350-350 & 345-245 \\ 325-280 & 125-245 & 202-182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 90 & 40 \\ 25 & 0 & 100 \\ 45 & -120 & 20 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $D_{пд}$ показывают изменение доходов в указанный период. Так третье предприятие получило прибыль в 45 у. е. в первом регионе $(d_{пд\,31} = 45)$ и оказалось в убытке в количестве 120 у. е., во втором регионе $(d_{пд\,32} = -120)$. Второе предприятие во втором регионе не имело дохода $(d_{пд\,22} = 0)$.

Находим матрицу средних доходов прироста предприятий за указанный период. В период с 2007 по 2012 годы входит 5 лет (2007, 2008, 2009, 2010 и 2011 годы), то есть $k = 5$. Тогда матрица средних доходов предприятий за указанный период равна: $\bar{D} = \frac{1}{k}\left(D_2 - D_1\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 40 & 90 & 40 \\ 25 & 0 & 100 \\ 45 & -120 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 8 \\ 5 & 0 & 20 \\ 9 & -24 & 4 \end{pmatrix}$.

1.2.3 Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 4+5\cdot 2+3\cdot 7 & 2\cdot 6+5\cdot 1+3\cdot 3 \\ 4\cdot 4+8\cdot 2+2\cdot 7 & 4\cdot 6+8\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 46 & 38 \end{pmatrix}.$$

1.2.4 Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot 4+5\cdot 5\cdot 2+1\cdot 11\cdot 1-1\cdot 8\cdot 2-5\cdot 1\cdot 4-5\cdot 11\cdot 1=2.$$

1.2.5 Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ путём разложения по второй строке.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$

$$+2\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot(-29)+2\cdot(-54)-2\cdot 1+4\cdot 21=61.$$

1.2.6 Найти обратную матрицу к матрице, заданной в примере 1.2.3.

Решение. Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ найден в примере 1.2.3, и равен $|A|=2$. Найдём алгебраические дополнения.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -23, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3.$$

Находим обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -23 & 9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11{,}5 & 4{,}5 & 8{,}5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2{,}5 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

1.2.7 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим ранг матрицы методом окаймляющих миноров. Находим окаймляющие миноры:

$$M_1^1 = 3 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 6 = 0,\ M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 2\cdot 6 = 9 \neq 0,$$

$$M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 2 + 2\cdot 6\cdot 3 + 6\cdot 5\cdot 4 - 4\cdot 7\cdot 3 - 6\cdot 2\cdot 2 - 6\cdot 5\cdot 3 = 0,$$

$$M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 6\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 7\cdot 3 - 2\cdot 6\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = 0.$$

Ранг матрицы равен $rangA = 2$, а базисным минором является минор $M_{12}^{13} = 9$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти линейную комбинацию $4A - 5B$, если матрицы A и B имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

1.3.2 Даны матрицы о доходах D_1 и D_2 трёх предприятий в трёх регионах за 2009 и 2012 годы в у. е. Найти матрицу $D_{пд}$ приростов доходов за рассматриваемый период. Выяснить экономический смысл элементов полученной матрицы доходов. Найти средние размеры прироста за указанный период.

$$D_1=\begin{pmatrix}540 & 324 & 459\\ 783 & 564 & 380\end{pmatrix} \text{ и } D_1=\begin{pmatrix}210 & 420 & 372\\ 810 & 564 & 270\end{pmatrix}.$$

1.3.3 Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если матрицы A и B имеют вид: $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 6\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -3 & 4 & 2\\ 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

1.3.4 Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если матрицы A и B имеют вид: $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -9 & 3\\ 0 & -5 & 3 & 7\\ 2 & 1 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 0 & -2\\ 6 & 2 & 3\\ 5 & -7 & 8\end{pmatrix}$.

1.3.5 Решить уравнение: а) $\begin{vmatrix}x-1 & x-5\\ 1 & x+3\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}\cos 9x & \sin 9x\\ \sin 3x & \cos 3x\end{vmatrix}=0$.

1.3.6 С помощью правила треугольников вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}4 & 6 & 3\\ 1 & 5 & 9\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 7\\ 7 & 8 & 15\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

1.3.7 Задан определитель $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2\end{vmatrix}$. Найти миноры элементов a_{21} и a_{44}, а также алгебраические дополнения элементов a_{32} и a_{12}. Вычислить определитель: а) разложив его по элементам второй строки; б) разложив его по элементам третьего столбца; в) получив предварительно нули во втором столбце; г) получив предварительно нули в третьей строке.

1.3.8 Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

1.3.9 Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1 & 4 & 3\\ 8 & 10 & 2 & 9 & 1\\ 24 & 2 & 3 & 25 & 13\end{pmatrix}$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Даны две матрицы A и B. Найти: а) $\det A$ (по правилу треугольников, разложением по второй строке, разложением по третьему столбцу и получением нулей в произвольном столбце или в строке); б) $A \cdot B$; в) $B \cdot A$; г) B^{-1}; д) $B \cdot B^{-1}$; е) $B^{-1} \cdot B$.

1.4.1.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4.1.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.4 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

1.4.1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.1.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.8 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.1.9 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.10 $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.1.11 $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.1.12 $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.1.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.1.14 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.1.15 $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.1.16 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.17 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.1.18 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

1.4.1.19 $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.1.20 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.4.1.21 $A=\begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.4.1.22 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

1.4.1.23 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.1.24 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

1.4.1.25 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.1.26 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

1.4.1.27 $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.1.28 $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4.1.29 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.1.30 $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$

2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (практическое занятие № 2)

Содержание: совместность системы, решение систем методом Крамера, решение систем матричным методом, решение систем методом Гаусса, решение произвольных систем, решение однородных систем уравнений.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Общий вид *системы линейных уравнений*: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$

Матричный вид систем линейных алгебраических уравнений: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *матрица-столбец свободных членов*; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *матрица-столбец неизвестных*;

$$A^* = A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – *расширенная матрица* системы.

Если столбец свободных членов ненулевой, то система называется неоднородной. Если столбец свободных членов нулевой, то система называется *однородной* и в матричной форме записи имеет вид: $AX = O$.

Матрица $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \ldots & x_n^0 \end{pmatrix}^T$ называется решением системы линейных алгебраических уравнений, если при подстановке значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ все уравнения системы обращаются в тождества. Решить систему означает найти все её решения.

Определение 2.1.1 Система линейных алгебраических уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера – Капелли. Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы и ранг расширенной матрицы этой системы были равны, то есть $rangA = rang\, A|B$.

Рассмотрим решение систем с невырожденной основной матрицей системы.

Теорема 2.1.1 Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля$\left(\det A \neq 0\right)$, то система имеет единственное решение.

Это решение можно найти различными методами.

1. **Матричный метод.** Пусть система линейных алгебраических уравнений записана в матричном виде $AX = B$. Из данного матричного уравнения получаем решение системы в виде: $X = A^{-1}B$.

2. **Метод Крамера:** $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$,

где Δ – определитель основной матрицы системы, Δ_j – определитель, полученный путём замены *j*-го столбца столбцом свободных членов.

3. **Метод Гаусса.** Суть данного метода состоит в приведении расширенной матрицы системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы. После этой операции от полученной новой расширенной матрицы переходим к системе уравнений. Из последнего n-го уравнения находим значение переменной x_n и подставляем его в $(n-1)$-е уравнение, из которого определяем x_{n-1}. Продолжая аналогичный процесс из первого уравнения, находим x_1.

Рассмотрим решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

1. $rangA \neq rang\, A|B$, система несовместна, то есть не имеет решения.

2. $rangA = rang\, A|B = n \leq m$, где n – число неизвестных, а m – число уравнений в системе. Система совместна и имеет единственное решение. Для её решения определяем базисный минор. На основании теоремы о базисном миноре строки коэффициенты при неизвестных не входят в базисный минор можно вычеркнуть. В результате приходим к равносильной системе, которая содержит n неизвестных и n уравнений, причём определитель основной матрицы этой системы отличен от нуля, как базисный минор, а такая система имеет единственное решение. Полученную систему можно решить матричным методом, по формулам Крамера или методом Гаусса.

3. $rangA = rang\, A|B = r < n$, система совместна и имеет бесконечное множество решений. Для решения системы определяем базисный минор. В системе оставляем только те уравнения, коэффициенты при неизвестных в которых входят в базисный минор. Слагаемые с переменными в полученной системе, коэффициенты при неизвестных, при которых не входят в базисный минор, в каждом из уравнений переносим в правую часть. В результате приходим к системе с определителем основной матрицы, отличным от нуля. Полученную си-

стему можно решить матричным методом, по формулам Крамера или методом Гаусса. Решение системы будет зависеть от переменных, коэффициенты при которых не входили в базисный минор, а они могут принимать произвольные значения. Поэтому система будет иметь бесконечное множество решений.

Рассмотрим решение однородных систем линейных алгебраических уравнений $AX = O$. Однородная система всегда совместна, так как она имеет, по крайней мере, нулевое решение.

Теорема 2.1.2 Если определитель матрицы однородной системы отличен от нуля, то система имеет единственное нулевое решение.

Теорема 2.1.3 Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то ранг матрицы r будет меньше числа неизвестных n. Решение проводим аналогично третьему случаю решения произвольных систем. Переменные, коэффициенты перед которыми входят в базисный минор, называются базисными переменными, а остальные $(n-r)$ переменные называются свободными. Придав свободным переменным $(n-r)$ раз произвольные значения, будем получать различные системы, решения которых линейно независимы. Наиболее часто одной свободной переменной поочерёдно придают значение, равное 1, а все остальные приравнивают к 0. В результате получим $(n-r)$ линейно независимые решения $E_1, E_2, ..., E_{n-r}$.

Определение 2.1.2 Любая совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений называется фундаментальной системой решений.

Теорема 2.1.4 Общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений, то есть $X_{o.o} = c_1E_1 + c_2E_2 + ... + c_{n-r}E_{n-r}$, где $c_1, ..., c_{n-r} \in R$.

Теорема 2.1.5 Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы: $X_{o.н} = X_{o.o} + X_{ч.н}$.

Рассмотрим применение **систем линейных алгебраических уравнений в экономике**.

Пусть даны матрицы: A – *матрица коэффициентов прямых затрат*, X – *матрица-столбец валового выпуска продукции*, Y – *матрица-столбец конечного продукта*. Математическую *модель межотраслевого баланса* или *модель Леонтьева* записывается в виде матричного уравнения: $A \cdot X + Y = X$. Матрица $S = (E-A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат. Решением матричного уравнения является матрица-столбец $X = (E-A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y$.

Если дана *матрица* R *норм расхода сырья* для выпуска продукции различных типов и *матрица* Z *запасов сырья*, то *матрица* V *ежедневного объёма* *выпуска продукции* каждого типа при условии, что сырьё используется полностью, определяется из решения матричного уравнения: $R \cdot V = Z$.

Предположим, что задана *матрица T текучести покупателей*. Тогда *матрица Π рыночной доли продуктов* в стационарном (инвариантном по времени) распределении рынка представляет собой нетривиальное решение однородной системы уравнений $\left(T^T - E\right) \cdot \Pi = 0$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить её по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.

$$M_1^1 = 2 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 3$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, а более высокого порядка минор не существует, то ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Следовательно, $rangA|B = rangA = 3 = n$, то есть система совместна и имеет единственное решение. Решим систему по формулам Крамара: $\Delta = M_{123}^{123} = 4$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 12 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{4} = 3$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{20}{4} = 5$.

2.2.2 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{array}\right)$. Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,\ M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 2$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но при этом существует минор $M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, то ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Так как $rangA|B \neq rangA$, то система несовместна, то есть не имеет решения.

2.2.3 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 \qquad = 12. \end{cases}$$

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{I})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[-6\cdot(\mathrm{I})+(\mathrm{III})]{-4\cdot(\mathrm{I})+(\mathrm{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & -15 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{4\cdot(\mathrm{II})+(\mathrm{III})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -43 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{43}\cdot(\mathrm{III})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{2}\cdot(\mathrm{III})+(\mathrm{I})]{7\cdot(\mathrm{III})+(\mathrm{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}\cdot(\mathrm{II})+(\mathrm{I})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

На основании метода элементарных преобразований получаем равенство рангов основной и расширенной матрицы системы: $rangA = rangA|B = 3 = n$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. От преобразованной расширенной матрицы системы переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 2, \\ \quad x_2 \qquad = 0, \\ \qquad\quad x_3 = -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем решение системы $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

2.2.4 Найти вектор валового выпуска X, который обеспечивает данный вектор потребления Y, если задана матрица межотраслевого баланса A. Решение системы балансовых соотношений провести в матричном виде.

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём матрицу коэффициентов полных затрат $S = (E - A)^{-1}$. Матрица $E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы равен $|E - A| = 0,41$. Находим алгебраические дополнения.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,59, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,4, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,7 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,22,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -0,1 & -0,2 \\ -0,1 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,11, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,1 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,18,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -0,1 & 0,7 \\ -0,1 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,09, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,52.$$

Матрица коэффициентов полных затрат $S = \dfrac{1}{0,41}\begin{pmatrix} 0,59 & 0,4 & 0,22 \\ 0,11 & 0,7 & 0,18 \\ 0,09 & 0,2 & 0,52 \end{pmatrix}$. Тогда вектор валового выпуска $X = S \cdot Y = \dfrac{1}{0,41}\begin{pmatrix} 0,59 & 0,4 & 0,22 \\ 0,11 & 0,7 & 0,18 \\ 0,09 & 0,2 & 0,52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2.2.5 Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 + 15x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 15 & 2 \\ 3 & -6 & 12 & -1 \end{array}\right)$. Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.

$$M_1^1 = 1 \neq 0,\ M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0,\ M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 3.$$

Ранг основной матрицы A равен $rangA = 2$. Для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но существует ещё один минор $M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 2 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 0$, следовательно, ранг расширенной матрицы равен $rangA|B = 3$. Таким образом, $rangA|B = rangA = 2 < n = 3$, то есть система совместна и имеет бесконечное множество решений. Переменные x_1, x_3 являются базисными переменными, а переменная $x_2 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 + 2c, \\ 4x_1 + 15x_3 = 2 + 8c, \end{cases} \quad \Delta = 3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3+2c & 3 \\ 2+8c & 15 \end{vmatrix} = 39 + 24c,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3+2c \\ 4 & 2+8c \end{vmatrix} = -10,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 13 + 8c,\ x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{10}{3},\ X_{о.н} = \begin{pmatrix} 13+8c & c & -\dfrac{10}{3} \end{pmatrix}^T, \text{ где } c \in \mathrm{R}.$$

2.2.6 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -273 \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2.2.7 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 5c, \\ 2x_1 + 9x_3 = -5c, \end{cases} \Delta = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5c & 4 \\ -5c & 9 \end{vmatrix} = 65c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5c \\ 2 & -5c \end{vmatrix} = -15c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 65c,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -15c,\ X_{o.н} = \begin{pmatrix} 65c & -15c & c \end{pmatrix}^T, \text{ где } c \in \mathrm{R}.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

2.3.2 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -15, \\ 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 26, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

2.3.3 Найти вектор валового выпуска X, который обеспечивает данный вектор потребления Y, если задана матрица межотраслевого баланса A. Решение системы балансовых соотношений провести в матричном виде.

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности найти решение систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -5, \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 12. \end{cases}$

2.3.5 Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 9x_1+8x_2+7x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-5x_4=-5, \\ 2x_1+6x_2+7x_3+8x_4=12, \\ x_1+3x_2+5x_3+13x_4=17. \end{cases}$

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность. В случае совместности решить её: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса. Найти решение системы, если заменить столбец свободных членов нулевым столбцом.

2.4.1.1 $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=1, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2. \end{cases}$ **2.4.1.2** $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=3, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-1. \end{cases}$

2.4.1.3 $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=5. \end{cases}$ **2.4.1.4** $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-3, \\ 5x_2+4x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=5. \end{cases}$

2.4.1.5 $\begin{cases} 4x_1-x_2=7, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=8, \\ x_1-3x_2+4x_3=-1. \end{cases}$ **2.4.1.6** $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=7. \end{cases}$

2.4.1.7 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$ **2.4.1.8** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=10, \\ x_1+5x_2+x_3=7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3. \end{cases}$

2.4.1.9 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=8, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 7x_1+4x_2-x_3=10. \end{cases}$ **2.4.1.10** $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=4, \\ 4x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_3=2. \end{cases}$

2.4.1.11 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0, \\ 8=2x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$ **2.4.1.12** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=-1, \\ 7x_1-5x_2+x_3=12, \\ 4x_1+x_3=4. \end{cases}$

2.4.1.13 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$ **2.4.1.14** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=3. \end{cases}$

2.4.1.15 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ \quad 3x_2 - 7x_3 = -10, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

2.4.1.16 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

2.4.1.17 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.4.1.18 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -11, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

2.4.1.19 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2.4.1.20 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 16. \end{cases}$

2.4.1.21 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$

2.4.1.22 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.4.1.23 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = -6. \end{cases}$

2.4.1.24 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

2.4.1.25 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 8. \end{cases}$

2.4.1.26 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.4.1.27. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

2.4.1.28 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

2.4.1.29 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = -5. \end{cases}$

2.4.1.30 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

3 ВЕКТОРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ
(практическое занятие № 3)

Содержание: векторы, операции над векторами, линейная зависимость и линейная независимость системы векторов, базис, координаты вектора, проекция вектора на ось, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов, смешанное произведение векторов.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Вектор является математической моделью векторной величины. Существуют различные подходы к понятию вектора: вектор – направленный отрезок; вектор – упорядоченная тройка чисел, которая определённым образом преобразуется при переходе от одной системы координат к другой; вектор – определённое преобразование пространства. *Геометрический вектор* – это направленный отрезок. Исходя из определения геометрический вектор характеризуется длиной и направлением. Для геометрического вектора вводятся понятия равенства, сложения и умножения на число.

Вектор, например $\overrightarrow{AB}$, изображается направленным отрезком со стрелкой, где точка A – начало вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка приложения вектора), а точка B – конец этого вектора. Векторы могут обозначаться малыми буквами латинского алфавита: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и т. д. Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной вектора* или модулем вектора и обозначается, например, для вектора $\overrightarrow{AB}$ – $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* и обозначаются $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, если они имеют одно и то же направление. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ называются противоположно направленными и обозначаются $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$, если они имеют противоположные направления.

Два вектора называются *равными,* если они имеют одинаковые длины и направления.

$$\vec{a}=\vec{b}\leftrightarrow|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|\wedge\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}.$$

Следовательно, векторы можно переносить в пространстве параллельно себе, поэтому векторы являются свободными. Свободный вектор – это множество всех направленных отрезков, равных между собой. *Нулевым вектором* $\vec{o}$ называется вектор, начало и конец которого совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю. Направления нулевой вектор не имеет. Вектор называется единичным или ортом, если длина его равна единице.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Рассмотрим линейные операции над векторами.

Сложение векторов. Правило треугольника: *суммой двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, который соединяет начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$, причём начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$.

Правило параллелограмма: *суммой двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, который является диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах и имеющего с ними общее начало.

<u>Умножение вектора на число.</u> *Произведением действительного числа* α *на ненулевой вектор* $\vec{a}$ называется вектор $\overrightarrow{\alpha a}$, который удовлетворяет следующим условиям: 1) $\left|\overrightarrow{\alpha a}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\overrightarrow{\alpha a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$; 3) $\overrightarrow{\alpha a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$; 4) $\overrightarrow{\alpha a} = \vec{o}$, если $\alpha = 0$.

Вектор $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$ называется вектор, *противоположный* вектору $\vec{a}$. Эти векторы имеют равные длины и противоположные направления. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} - \vec{b}$, равный сумме $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Рассмотрим систему векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ линейного пространства L. Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ называется выражение вида: $\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{x_n}$, где $\alpha_i \in R$ и $i = \overline{1,n}$, или с учетом знака суммирования $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$.

Определение 3.1.1 Система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ линейного пространства L называется *линейно-зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 \neq 0\right)$, что линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \vec{o}$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах $\left(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0\right)$, то система векторов $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ называется *линейно-независимой*.

Теорема 3.1.1 Два ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 3.1.2 Три ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они компланарные.

Теорема 3.1.3 Любые четыре геометрических вектора трехмерного пространства являются линейно-зависимыми векторами.

Любой геометрический вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам.

Определение 3.1.2 *Базисом* линейного пространства L, размерности n называется любая упорядоченная совокупность n линейно-независимых векторов этого пространства.

Базисом линейного пространства V^3 является любая совокупность трех некомпланарных векторов. Наиболее часто используют ортонормированный базис. Ортонормированный базис $B = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ состоит из трех взаимно ортогональных единичных векторов: $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ и $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Координаты вектора представляют проекцию вектора на соответствующие базисные векторы. Для того чтобы сложить два вектора, необходимо сложить соответствующие координаты. Умножение вектора на число означает умножение каждой координаты на это число.

Базисом линейного пространства V^2 является любая совокупность двух неколлинеарных векторов. Наиболее часто используется ортонормированный базис $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$, состоит из двух взаимно ортогональных единичных векторов: $\vec{i}\perp\vec{j}$ и $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i},\vec{j}$: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$, где a_x, a_y – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Сложение и умножение вектора на скаляр вводится аналогично, как и для линейного пространства V^3.

Определение 3.1.3 *Скалярной проекцией* или просто *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, определенное равенством

$$np_l\ \overrightarrow{AB}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если}\ \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e}^{\,0},\\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если}\ \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\vec{e}^{\,0},\end{cases}$$

где точки A_1 и B_1 – ортогональные проекции точек A и B на ось l, соответственно. Вектор $\vec{e}^{\,0}$ задает направление оси l.

Проекция вектора вычисляется по формуле: $np_l\ \vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{e}^{\,0}})$.

Скалярное произведение векторов.

Определение 3.1.4 *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0 \leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$;

3) $(\alpha\,\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\alpha\,\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$; 4) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 6) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Рассмотрим ортонормированный базис $B=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Предположим, что в этом базисе заданы векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ и $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$. Тогда скалярное произведение определяем по формуле: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

Длина вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Косинус угла между векторами: $\cos\phi=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

Проекция вектора на другой вектор: $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$.

Определение 3.1.5 *Направляющими косинусами* вектора называются координаты единичного вектора по направлению заданного вектора.

Найдем координаты единичного вектора $\vec{a}^{\,0}$ для вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

$$\vec{a}^{\,0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(a_1;a_2;a_3)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right).$$

Следовательно, направляющие косинусы равны

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

где α,β,γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с базисными векторами $\vec{i},\ \vec{j},\vec{k}$, соответственно.

Замечание. Все указанные выше формулы приведены для трехмерного пространства. На плоскости указанные формулы также справедливы. Отличие состоит в отсутствии третьей координаты.

Определение 3.1.6 Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, начало которых совмещены, называется *правой*, если смотреть с конца последнего вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$, осуществляется против часовой стрелки. Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется *левой*.

Определение 3.1.7 *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Рассмотрим свойства векторного произведения векторов.

1) Два ненулевых вектора коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, то есть $\vec{a}\,||\,\vec{b}\leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2) Длина векторного произведения двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то есть $S_{пар-ма}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

3) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

4) $[\alpha\,\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\alpha\,\vec{b}]=\alpha\cdot[\vec{a},\vec{b}]$.

5) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\quad \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.$

Определение 3.1.8 *Смешенным произведением* векторов называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению, векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на вектор $\vec{c}$.

Рассмотрим свойства смешанного произведения векторов.

1) Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти три вектора компланарны.

2) Смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, если тройка векторов правая, и объему параллелепипеда, взятому со знаком минус, если тройка векторов левая.

3) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 4) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$.

Рассмотрим ортонормированный базис $B=\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Предположим, что в базисе заданы векторы $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\ \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},\ \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$.

Тогда векторное и смешанное произведение векторов определяем по формулам:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},\qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Векторное пространство с экономической точки зрения можно рассматривать как *пространство товаров*. Предположим, что потребитель приобрёл конечное число товаров n различных наименований. Этот набор можно охарактеризовать вектором $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$, где b_i – количество i-ого товара, приобретенного потребителем. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров $B=\left\{(b_1,b_2,...,b_n)\middle|\, b_i\ge 0\wedge i=\overline{1;n}\right\}$.

Рассмотрим, по крайней мере, одно из приложений **операций над векторами в экономике**. Пусть даны векторы: $\vec{a}$ – вектор ассортимента (количество изделий), $\vec{r}$ – вектор расхода сырья, $\vec{t}$ – вектор затрат рабочего времени, $\vec{z}$ – ценовой вектор. Используя понятие скалярного произведения, определяем *затраты рабочего времени* $T=\vec{a}\cdot\vec{t}$, *расход сырья* $R=\vec{a}\cdot\vec{r}$ и *стоимость выпускаемой продукции* $Z=\vec{a}\cdot\vec{z}$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Даны длины векторов $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, и угол между ними равен 60^0. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=4\cdot 6\cdot\cos 60^0=12$, $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{12}{6}=2$.

3.2.2 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(-1;2;4)$, $B(-4;2;0)$ и $C(3;2;1)$.

Решение. Определим координаты и длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB}=\left(-4-(-1);2-2;0-4\right)=\left(-3;0;-4\right)$, $\qquad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+0^2+\left(-4\right)^2}=5$;

$\overrightarrow{AC}=\left(3-(-1);2-2;1-4\right)=\left(4;0;-3\right)$, $\qquad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+\left(-3\right)^2}=5$;

$\overrightarrow{BC}=\left(3-(-4);2-2;1-0\right)=\left(7;0;1\right)$, $\qquad \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{7^2+0^2+1^2}=5\sqrt{2}$.

Находим углы треугольника: $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-3\cdot4+0\cdot0-4\cdot(-3)}{5\cdot5}=0$,

тогда $\angle A=90^0$. Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$, то треугольник является равнобедренным,

а, следовательно, $\angle B=\angle C=\dfrac{180^0-\angle A}{2}=45^0$.

3.2.3 Предприятие выпускает четыре типа изделий, основные производственно-экономические показатели которых представлены в виде четырёх векторов, характеризующих весь производственный цикл: $\vec{a}\left(10;40;20;30\right)$ – вектор ассортимента, $\vec{r}\left(4;5;2;3\right)$ – вектор расхода сырья, $\vec{t}\left(2;3;4;2\right)$ – вектор затрат рабочего времени и $\vec{z}\left(20;10;25;15\right)$ – ценовой вектор (единицы измерения элементов векторов, соответственно, равны количествам единиц, килограммам, часам и условным единицам). Найти ежесуточные показатели: расход сырья R, затраты рабочего времени T и стоимость Z выпускаемой продукции предприятия.

Решение. Расход сырья для выпуска продукции $R=\vec{a}\cdot\vec{r}=10\cdot4+40\cdot5+20\cdot2+30\cdot3=370\,\textit{кг}$. Затраты рабочего времени $T=\vec{a}\cdot\vec{t}=10\cdot2+40\cdot3+20\cdot4+30\cdot2=280\,\textit{ч}$. Стоимость выпускаемой продукции $Z=\vec{a}\cdot\vec{z}=10\cdot20+40\cdot10+20\cdot25+30\cdot15=1550\,\textit{усл. ед.}$

3.2.4 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}-4\vec{q}$, если $\left|\vec{p}\right|=4$, $\left|\vec{q}\right|=5$, $\angle(\vec{p};\vec{q})=30^0$.

Решение. $S_{\textit{параллелограма}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(2\vec{p}+3\vec{q}\right)\times\left(3\vec{p}-4\vec{q}\right)\right|=$

$$=\left|6\vec{p}\times\vec{p}-8\vec{p}\times\vec{q}+9\vec{q}\times\vec{p}-12\vec{q}\times\vec{q}\right|=\left|\vec{o}-8\vec{p}\times\vec{q}-9\vec{p}\times\vec{q}-\vec{o}\right|=$$

$$=\left|-17\vec{p}\times\vec{q}\right|=17\cdot\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=17\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)=17\cdot4\cdot5\cdot\sin30^0=170\,(\textit{кв. ед.}).$$

3.2.5 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$, $C(4;2;6)$ и $D(5;2;3)$. Вычислить площадь треугольника ABC и найти объём пирамиды.

Решение. Для вычисления площади и объёма найдём координаты необходимых для этого векторов: $\overrightarrow{AB}(1;3;2)$, $\overrightarrow{AC}(3;2;3)$ и $\overrightarrow{AD}(4;2;0)$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(5\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-7)^2}=\frac{\sqrt{83}}{2}\ (кв.\,ед.).$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}V_{параллелепипеда}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left(0+36+12-16-0-6\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\ (куб.\,ед.).$$

3.2.6 Доказать, что векторы $\vec{e}_1=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{e}_2=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ в этом базисе.

Решение. Векторы образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. Вычисляем смешанное произведение векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4-5+9+6-3-10=1\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, и вектор $\vec{a}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{e}_1+\beta\cdot\vec{e}_2+\gamma\cdot\vec{e}_3$, или в координатной форме получаем систему линейных уравнений, которую решим по формулам Крамера.

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma=6,\\ \alpha+2\beta-\gamma=2,\\ -3\alpha-5\beta+\gamma=-7.\end{cases}$$

$$\Delta=\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}6 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -7 & -5 & 1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -7 & 1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 2\\ -3 & -5 & -7\end{vmatrix}=1.$$

$\alpha=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1,\ \beta=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1,\ \gamma=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{1}{1}=1.$ Следовательно, $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить их линейные комбинации: а) $3\vec{a}-2\vec{b}$; б) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

3.3.2 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FA}$ и $\overrightarrow{AE}$.

3.3.3 Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а O – произвольная точка пространства, не лежащая в плоскости треугольника. Найти координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{DE}$ в базисе $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, где D и E – середины векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, соответственно.

3.3.4 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$.

3.3.5 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(4;-2;1)$ и $C(-3;1;2)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

3.3.6 Предприятие выпускает три вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых представлены в виде четырёх векторов, характеризующих весь производственный цикл: $\vec{a}\left(12;38;25\right)$ – вектор ассортимента, $\vec{r}\left(6;3;1\right)$ – вектор расхода сырья, $\vec{t}\left(5;4;2\right)$ – вектор затрат рабочего времени и $\vec{z}\left(30;20;40\right)$ – ценовой вектор (единицы измерения элементов векторов, соответственно, равны количествам единиц, килограммам, часам и условным единицам). Найти ежесуточные показатели: расход сырья R, затраты рабочего времени T и стоимость Z выпускаемой продукции предприятия.

3.3.7 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=6\vec{p}+7\vec{q}$, если $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=3$, $\angle(\vec{p};\vec{q})=60^0$.

3.3.8 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ и $D(3;4;-3)$. Вычислить высоту $h=\left|\overrightarrow{DT}\right|$.

3.3.9 Доказать, что векторы $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}=6\vec{i}+9\vec{j}+14\vec{k}$ в этом базисе.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$. Требуется:

а) найти длины сторон и углы в треугольнике ABC;

б) вычислить площадь треугольника ABC;

в) вычислить объём пирамиды $ABCD$.

3.4.1.1 $A(5;2;6)$, $B(5;7;4)$, $C(4;10;9)$, $D(1;8;2)$.

3.4.1.2 $A(-5;7;-7)$, $B(5;-3;1)$, $C(2;3;7)$, $D(7;2;2)$.

3.4.1.3 $A(6;5;8)$, $B(3;5;8)$, $C(8;4;1)$, $D(1;-1;3)$.

3.4.1.4 $A(1;2;0)$, $B(3;5;7)$, $C(2;-3;5)$, $D(4;2;10)$.

3.4.1.5 $A(-2;3;5)$, $B(4;2;10)$, $C(1;2;7)$, $D(5;3;7)$.

3.4.1.6 $A(4;0;6)$, $B(2;6;5)$, $C(6;4;-1)$, $D(3;2;5)$.

3.4.1.7 $A(3;3;6)$, $B(2;-3;9)$, $C(1;2;5)$, $D(2;1;7)$.

3.4.1.8 $A(3;-2;1)$, $B(4;5;6)$, $C(3;3;2)$, $D(0;4;5)$.
3.4.1.9 $A(-1;0;1)$, $B(1;7;3)$, $C(8;5;8)$, $D(3;-1;2)$.
3.4.1.10 $A(1;1;5)$, $B(4;9;3)$, $C(3;6;7)$, $D(2;4;3)$.
3.4.1.11 $A(2;-1;5)$, $B(1;6;3)$, $C(3;-9;8)$, $D(0;7;1)$.
3.4.1.12 $A(4;6;6)$, $B(4;2;0)$, $C(1;2;6)$, $D(6;1;1)$.
3.4.1.13 $A(5;4;7)$, $B(2;4;7)$, $C(7;3;7)$, $D(6;8;2)$.
3.4.1.14 $A(7;10;2)$, $B(2;8;4)$, $C(9;6;9)$, $D(4;4;10)$.
3.4.1.15 $A(8;7;4)$, $B(5;10;4)$, $C(4;7;8)$, $D(3;5;4)$.
3.4.1.16 $A(4;9;5)$, $B(4;6;11)$, $C(6;9;3)$, $D(6;6;5)$.
3.4.1.17 $A(10;5;-5)$, $B(5;6;-8)$, $C(8;10;7)$, $D(8;-6;4)$.
3.4.1.18 $A(4;2;10)$, $B(2;3;5)$, $C(5;3;7)$, $D(1;-2;7)$.
3.4.1.19 $A(5;3;-7)$, $B(1;2;7)$, $C(4;2;0)$, $D(2;3;5)$..
3.4.1.20 $A(1;9;7)$, $B(0;2;0)$, $C(5;3;10)$, $D(4;3;5)$.
3.4.1.21 $A(1;4;9)$, $B(2;-5;8)$, $C(5;4;2)$, $D(2;1;6)$.
3.4.1.22 $A(6;3;1)$, $B(3;2;8)$, $C(2;-3;7)$, $D(2;-1;7)$.
3.4.1.23 $A(-1;6;1)$, $B(-1;1;6)$, $C(0;4;-1)$, $D(3;1;4)$.
3.4.1.24 $A(5;8;3)$, $B(1;2;-2)$, $C(-1;0;2)$, $D(3;5;4)$.
3.4.1.25 $A(-3;7;1)$, $B(5;7;8)$, $C(6;9;2)$, $D(9;5;5)$.
3.4.1.26 $A(1;-1;4)$, $B(3;5;1)$, $C(5;8;-1)$, $D(5;5;4)$.
3.4.1.27 $A(9;4;4)$, $B(4;5;7)$, $C(7;9;6)$, $D(7;5;3)$.
3.4.1.28 $A(0;7;1)$, $B(0;2;7)$, $C(1;5;0)$, $D(4;2;5)$.
3.4.1.29 $A(6;9;4)$, $B(2;10;10)$, $C(7;5;9)$, $D(4;6;5)$.
3.4.1.30 $A(2;8;2)$, $B(9;8;9)$, $C(7;10;3)$, $D(10;9;6)$.

4 СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ (практическое занятие № 4)

Содержание: собственные векторы и собственные значения матрицы, различные уравнения прямой на плоскости, расстояние от точки до прямой, взаимное расположение прямых на плоскости.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* матрицы A, если выполняется равенство $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, при этом число λ называется *собственным значением* матрицы A.

Для определения собственных значений матрицы необходимо решить характеристическое уравнение $\left|A-\lambda E\right|=0$. Для каждого полученного собственного значения определяем собственные векторы из решения однородной системы линейных алгебраических уравнений $\left(A-\lambda E\right)\vec{x}=0$.

Собственные векторы и собственные значения матрицы используются в экономических расчётах взаимных закупок товаров. Предположим, что бюджеты n стран $x_1, x_2, ..., x_n$ расходуются на покупку товаров. Рассмотрим линейную модель обмена или модель международной торговли. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – доля бюджета страны x_j, которую она тратит на закупку товаров в i-ой стране $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1\right)$. Тогда вектор $\vec{x} = \left(x_1\ x_2\ ...\ x_n\right)^T$ характеризует бюджет каждой страны. Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли: для каждой страны её бюджет должен быть не выше выручки от торговли, то есть $A\vec{x} = \vec{x}$. Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий её собственному числу $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли.

Рассмотрим различные уравнения прямых на плоскости. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой на плоскости, рассматривают различные уравнения прямой на плоскости:

1) *уравнение прямой с заданным нормальным вектором и проходящей через точку* (*нормальный вектор* $\vec{n}(A; B)$ – любой вектор, перпендикулярный прямой; $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ – заданная и произвольная точка на этой прямой):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0; \qquad (4.1.1)$$

2) *общее уравнение прямой* (при условии $A^2 + B^2 > 0$):

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0; \qquad (4.1.2)$$

3) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (*направляющий вектор* $\vec{s}(m; n)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0; y_0)$, $M(x, y)$ – заданная и произвольная точка прямой, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t \in R$ – параметр):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}; \qquad (4.1.3)$$

4) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n; \end{cases} \qquad (4.1.4)$$

5) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \qquad (4.1.5)$$

6) *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_i(x_i; y_i), i = 1; 2$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \qquad (4.1.6)$$

7) *уравнение прямой в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси ординат, то есть прямая проходит через точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \tag{4.1.7}$$

8) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку* (прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и задан угловой коэффициент прямой $k=\mathrm{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси абсцисс):

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0); \tag{4.1.8}$$

9) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом* (для прямой задан угловой коэффициент k, и прямая проходит через точку $B(0;b)$):

$$y=k\cdot x+b; \tag{4.1.9}$$

10) *нормальное уравнение прямой* ($\vec{n}^0(\cos\alpha;\sin\alpha)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к прямой; p – расстояние от начала координат до прямой):

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \tag{4.1.10}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ *до прямой* $l: A\cdot x+B\cdot y+C=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0;l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4.1.11}$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямых на плоскости.

1. Угол φ между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находится из формулы $\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $A_1A_2+B_1B_2=0$.

2. Угол φ между прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ находится из формулы $\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2+n_1n_2=0$.

3. Угол φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ находится из формулы $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Условие параллельности прямых: $k_2=k_1$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1\cdot k_2=-1$.

Рассмотрим некоторые **линейные модели на плоскости в экономике**.

Из экономического анализа известно, что предложение товара растёт с ростом его цены. При сильном упрощении действительности можно говорить о линейном тренде (тенденции) цены p от предложения r: $p = a \cdot r + b$, где a и b – некоторые постоянные величины, которые определяются эмпирически, а график называется кривой предложения. Функция является возрастающей, то есть $a > 0$. В первом приближении зависимость цены товара p от спроса s выражается линейной функцией $p = c \cdot s + d$, где c и d – некоторые постоянные величины, которые определяются эмпирически, а график называется кривой спроса. С экономической точки зрения, если цена p на какой-либо товар уменьшается, то количество проданного товара увеличивается, то есть кривая спроса является убывающей функцией и $c < 0$. Если спрос равен предложению $r = s = x$ (весь произведённый товар реализуется, и все желающие купить этот товар могут это сделать), то при пересечении прямых $p = a \cdot x + b$ и $p = c \cdot x + d$ получаем *точку равновесия* $M_0(x_0; p_0)$.

Рассмотрим функцию дохода $D = v \cdot p$ и функцию затрат на производство и реализацию $Z = k \cdot v + l$, где p, k и l являются постоянными величинами. Точка пересечения прямых называется *точкой безубыточности.*

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Структурная матрица торговли трёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы матрицы торговли. Определить бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что общая сумма бюджетов этих стран равна $x_1 + x_2 + x_3 = 1025$ у. д. е.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6-\lambda & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^3 - 1,6\lambda^2 + 0,61\lambda - 0,01 = 0$. В результате решения уравнения находим собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 0,3 \pm \sqrt{0,8}$.

Для определения бюджетов стран, удовлетворяющих сбалансированной бездефицитной торговле, необходимо найти собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$ заданной структурной матрицы A, то есть решить уравнение $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$, которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & -0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку определитель матрицы системы равен нулю, то одна из переменных является свободной, а остальные выражаются через неё. Решая систему по формулам Крамера, находим координаты собственного вектора:

$$x_1 = \frac{7}{23}c,\ x_2 = \frac{11}{23}c,\ x_3 = c,\ где\ c \in \mathrm{R}\ и\ c \neq 0.$$

Подставляя найденные значения в заданную сумму бюджетов, находим величину $c = 575$. Следовательно, искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле (в условных денежных единицах) равны $x_1 = 175,\ x_2 = 275,\ x_3 = 575$.

4.2.2 Записать уравнение прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(6;8)$ и проходящей через точку $M_0(-1;-3)$. Привести общее уравнение прямой к общему виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением (4.1.1): $6\cdot(x+1)+8\cdot(y+3)=0$. Общее уравнение прямой имеет вид: $3x+4y+15=0$. Для записи нормального уравнения прямой умножим общее уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{1}{5}$. Тогда нормальное уравнение имеет вид: $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$. Расстояние от начала координат до прямой равно $p = 3$.

4.2.3 Составить уравнение прямой l_1, которая перпендикулярна прямой $l: 3x-7y+4=0$ и проходит через точку $M_0(2;-5)$. Найти расстояние от точки M_0 до прямой l.

Решение. По условию прямые l_1 и l перпендикулярны. Следовательно, в качестве направляющего вектора $\vec{s}_1$ прямой l_1 можно выбрать нормальный вектор $\vec{n}(3;-7)$ прямой l, так как он параллелен этой прямой. Для составления уравнения прямой l_1 воспользуемся каноническим уравнением прямой (4.1.5): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-7}$. Общее уравнение прямой l_1 имеет вид: $7x+3y+1=0$.

Расстояние от точки M_0 до прямой l находим по формуле (4.1.11): $\rho(M_0; l) = \frac{|3\cdot 2 - 7\cdot(-5)+4|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}} = \frac{45}{\sqrt{58}} = \frac{45\cdot\sqrt{58}}{58}$.

4.2.4 Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(7;1)$. Указать направляющий и нормальный вектор прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (4.1.6): $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y+3}{1+3}$. Каноническое уравнение прямой имеет вид $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}$ с направляющим вектором $\vec{s}(5;4)$. Общее уравнение прямой имеет вид $4x-5y-23=0$ с нормальным вектором $\vec{n}(4;-5)$.

4.2.5 Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $l:3x+8y-24=0$ и координатными осями.

Решение. Уравнение прямой l в отрезках (4.1.7) имеет вид: $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$, где $a=8$ и $b=3$ – отрезки, отсекаемые прямой от осей координат Ox и Oy, соответственно. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник с катетами длиною 8 и 3 (единицы длины). Площадь треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12\,(кв.\,ед.)$.

4.2.6 Записать уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(1;2)$ и образует угол 45^0 с прямой $y=2x+3$.

Решение. Воспользуемся формулой $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, где $\varphi=45^0$ – угол между искомой и заданной прямой, $k_1=2$ – угловой коэффициент заданной прямой, k_2 – угловой коэффициент искомой прямой. Находим угловой коэффициент k_2 искомой прямой из уравнения $\left|\frac{k_2-2}{1+2k_2}\right|=\operatorname{tg}45^0$ или $\left|\frac{k_2-2}{1+2k_2}\right|=1$, которое равносильно двум уравнениям $\frac{k_2-2}{1+2k_2}=1$ и $\frac{k_2-2}{1+2k_2}=-1$. Решая полученные уравнения, находим два возможных угловых коэффициента $k_2=-3$ и $k_1=\frac{1}{3}$. Используя уравнение $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку (4.1.8), находим уравнения искомых прямых, удовлетворяющих условию задачи: $y=-3x+5$ или $y=x/3+5/3$.

4.2.7 Найти угол между прямой $l_1:3x-4y-2=0$ и прямой $l_2:5x+12y-22=0$. Определить координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Решение. Угол φ между прямыми найдём как угол между нормальными векторами прямых l_1 и l_2, то есть между векторами $\vec{n}_1(3;-4)$ и $\vec{n}_1(5;12)$, соответственно.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{3\cdot5+(-4)\cdot12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{5^2+12^2}}=-\frac{33}{65},\ \varphi=\arccos\left(-\frac{33}{65}\right)=\pi-\arccos\frac{33}{65}.$$

Для определения точки пересечения прямых решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x-4y-2=0, \\ 5x+12y-22=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x-4y=2, \\ 5x+12y=22. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 56,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 22 & 12 \end{vmatrix} = 112,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} = 56.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{56} = 1.$$

Точка пересечения прямых l_1 и l_2 имеет координаты $(2;1)$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Структурная матрица торговли трёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы матрицы торговли. Определить бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что общая сумма бюджетов этих стран равна 1392 у. д. е.

4.3.2 В задачах 4.3.2.1 – 4.3.2.3 требуется:

а) записать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

б) привести общее уравнение прямой к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

4.3.2.1 Прямая l задана точкой $M_0(3;-2)$ и нормальным вектором $\vec{n}(3;-4)$.

4.3.2.2 Прямая l задана точкой $M_0(1;2)$ и направляющим вектором $\vec{s}(12;-5)$.

4.3.2.3 Прямая l задана двумя своими точками $M_1(5;8)$ и $M_2(13;14)$.

4.3.3 Из точки $M_0(3;1)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 3$ к оси Ox и отражается от неё. Написать уравнения падающего и отражённого лучей.

4.3.4 Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(4;1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 8.

4.3.5 Задана прямая $l: -3x+4y-1=0$ и точка $M_0(5;3)$. Требуется:

а) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l;

б) написать уравнение прямой l_1, проходящей через точку M_0 параллельно прямой l;

в) написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой l.

4.3.6 Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(3;4)$, $B(7;7)$ и $A(8;16)$. Требуется:

а) написать уравнение стороны AB;

б) написать уравнение высоты CD и вычислить ее длину $h=\left|\overrightarrow{CD}\right|$;

в) найти угол φ между высотой CD и медианой BM;

г) написать уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_3)$. Требуется:

а) записать общее уравнение прямой AB;

б) найти каноническое уравнение прямой BC;

в) найти уравнение высоты CD;

г) найти уравнение медианы AM;

д) найти точку пересечения медианы AM и высоты CD, а также угол между высотой и медианой;

е) вычислить расстояние от точки C до прямой AB.

4.4.1.1	$A(1;-1), B(4;2), C(3;-5)$.	**4.4.1.2**	$A(6;-4), B(4;10), C(-4;2)$.
4.4.1.3	$A(-7;4), B(5;-5), C(-7;-2)$.	**4.4.1.4**	$A(4;-5), B(-3;1), C(10;-2)$.
4.4.1.5	$A(-3;5), B(4;0), C(-2;-6)$.	**4.4.1.6**	$A(-7;-4), B(3;2), C(0;2)$.
4.4.1.7	$A(0;7), B(-2;4), C(1;-3)$.	**4.4.1.8**	$A(-3;1), B(0;4), C(2;5)$.
4.4.1.9	$A(14;4), B(6;8), C(-3;-2)$.	**4.4.1.10**	$A(-1;4), B(9;5), C(1;0)$.
4.4.1.11	$A(1;6), B(6;1), C(-2;-3)$.	**4.4.1.12**	$A(7;3), B(1;10), C(4;-3)$.
4.4.1.13	$A(2;5), B(-3;-4), C(7;6)$.	**4.4.1.14**	$A(5;11), B(4;-1), C(3;8)$.
4.4.1.15	$A(6;-5), B(-8;-1), C(3;5)$.	**4.4.1.16**	$A(5;2), B(7;3), C(4;-3)$.
4.4.1.17	$A(4;7), B(5;-5), C(4;8)$.	**4.4.1.18**	$A(6;-3), B(-7;1), C(-4;5)$.
4.4.1.19	$A(1;-2), B(4;7), C(3;-8)$.	**4.4.1.20**	$A(3;-5), B(-5;4), C(2;-6)$.
4.4.1.21	$A(9;-5), B(3;-1), C(-6;4)$.	**4.4.1.22**	$A(6;-5), B(1;1), C(3;0)$.
4.4.1.23	$A(8;), B(0;-1), C(3;7)$.	**4.4.1.24**	$A(2;-1), B(3;1), C(4;-4)$.
4.4.1.25	$A(1;-6), B(-3;-1), C(1;5)$.	**4.4.1.26**	$A(8;-10), B(-5;7), C(-3;8)$.
4.4.1.27	$A(9;11), B(10;12), C(12;9)$.	**4.4.1.28**	$A(4;-5), B(-5;6), C(6;-4)$.
4.4.1.29	$A(10;2), B(12;5), C(3;-4)$.	**4.4.1.30**	$A(5;-6), B(-3;2), C(4;1)$.

5 ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ (практическое занятие № 5)

Содержание: различные уравнения прямой и плоскости в пространстве, расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение прямых в пространстве, взаимное расположение плоскостей в пространстве, взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим различные уравнения плоскостей в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение плоскости в пространстве, рассматривают различные уравнения плоскостей:

1) *уравнение плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через точку* (*нормальный вектор* $\vec{n}(A;B;C)$ – любой вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка на этой плоскости):

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0; \qquad (5.1.1)$$

2) *общее уравнение плоскости* (при условии $A^2+B^2+C^2>0$):

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0; \qquad (5.1.2)$$

3) *векторно-параметрическое уравнение плоскости* (*направляющие векторы* $\vec{p}(p_1;p_2;p_3)$, $\vec{q}(q_1;q_2;q_3)$ – любые два неколлинеарных вектора, параллельные плоскости; $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка плоскости, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $\alpha\in R,\ \beta\in R$ – параметры):

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\alpha\cdot\vec{p}+\beta\cdot\vec{q}; \qquad (5.1.3)$$

4) *параметрические уравнения плоскости*:

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot p_1+\beta\cdot q_1,\\ y=y_0+\alpha\cdot p_2+\beta\cdot q_2,\\ z=z_0+\alpha\cdot p_3+\beta\cdot q_3; \end{cases} \qquad (5.1.4)$$

5) *уравнение плоскости, проходящей через три точки* $M_i(x_i;y_i;z_i),\ i=1;2;3$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad (5.1.5)$$

6) *уравнение плоскости в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси ординат, значение c равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси аппликат, то есть плоскость проходит через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1; \qquad (5.1.6)$$

7) *нормальное уравнение плоскости* (вектор $\vec{n}^0(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к плоскости; p – расстояние от начала координат до плоскости):

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (5.1.7)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до плоскости* $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0;\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.1.8)$$

Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ находится из формулы $\cos\phi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Рассмотрим различные уравнения прямых в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой в пространстве, рассматривают различные уравнения прямой:

1) *общее уравнение прямой в пространстве*:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases} \qquad (5.1.9)$$

2) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (*направляющий вектор* $\vec{s}(m;n;p)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ – заданная и произвольная точка прямой, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t\in R$ – параметр):

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}; \qquad (5.1.10)$$

3) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot m, \\ y=y_0+t\cdot n, \\ z=z_0+t\cdot p; \end{cases} \qquad (5.1.11)$$

4) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}; \qquad (5.1.12)$$

5) *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_i(x_i;y_i;z_i),\ i=1;2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (5.1.13)$$

Угол φ между прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ находится из формулы $\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Угол Θ между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0;$ находится по формуле $\sin\Theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Условие параллельности прямой и плоскости: $mA+nB+pC=0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$.

Рассмотрим одну из **линейных пространственных моделей в экономике**. Если x – частные инвестиции, y – потребление, z – национальный доход, а $ОЗ$ – общественные затраты, то справедливо уравнение: $x+y-z+ОЗ=0$, то есть национальный доход складывается из потребления, частных инвестиций и общественных затрат.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Написать уравнение плоскости π_1, проходящей через точку $M_0(2;1;3)$ параллельно плоскости $\pi: 2x-6y+3z+1=0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

Решение. Так как плоскости параллельны, то нормальные векторы являются коллинеарными. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости π_1 выбираем нормальный вектор плоскости π, то есть нормальный вектор плоскости π_1 имеет координаты: $\vec{n}_1(2;-6;3)$. Воспользуемся уравнением плоскости (5.1.1): $2\cdot(x-2)-6\cdot(y-1)+3\cdot(z-3)=0$ или $2x-6y+3z-7=0$.

Расстояние между плоскостями найдём как расстояние от точки $M_0(2;1;3)$ до плоскости $\pi: 2x-6y+3z+1=0$ по формуле (5.1.8):

$$\rho(\pi_1;\pi)=\rho(M_0;\pi)==\frac{|2\cdot2-6\cdot1+3\cdot3+1|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{8}{7}.$$

5.2.2 Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;4;5)$, $M_2(5;7;9)$ и $M_3(6;8;6)$. Определить угол между полученной плоскостью и плоскостью π, заданной в задаче 5.2.1.

Решение. Находим уравнение плоскости $M_1M_2M_3$, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки (5.1.5):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 13x-10y-z-4=0.$$

Определим угол между плоскостью $13x-10y-z-4=0$ и плоскостью $2x-6y+3\cdot z-7=0$. Угол между плоскостями находим как угол между нормальными векторами плоскостей. Косинус угла между плоскостями равен: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{M_1M_2M_3}}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right|\cdot\left|\vec{n}_{M_1M_2M_3}\right|}\dfrac{13\cdot 2+(-10)\cdot(-6)+(-1)\cdot 3}{\sqrt{13^2+(-10)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \dfrac{83}{21\sqrt{30}}$. Тогда угол между плоскостями равен значению $\varphi = \arccos\dfrac{83}{21\sqrt{30}}$.

5.2.3 Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(5;-1;7)$ на плоскость $4x+7y-9z+3=0$.

Решение. Так как уравнение прямой является перпендикулярной заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора прямой выбираем нормальный вектор плоскости: $\vec{n}(4;7;-9)=\vec{s}$. Используя каноническое уравнение прямой (5.1.12), получаем искомое уравнение прямой: $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-7}{-9}$.

5.2.4 Найти точку пересечения прямой l и плоскости π, записав уравнение прямой l в каноническом виде, если заданы уравнения прямой и плоскости.

$$l:\begin{cases} 3x+4y-6z-11=0; \\ 2x-3y+9z+4=0, \end{cases} \qquad \pi: x+4y-z-4=0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой l в каноническом виде. Для определения точки, которая принадлежит прямой, предположим, что одна из переменных равна нулю. Например, пусть $z=0$. В результате приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x+4y=11, \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$$

Решение системы $x=1$, $y=2$. Таким образом, точка $M_0(1;2;0)$ принадлежит прямой l. В качестве направляющего вектора прямой l возьмём вектор векторного произведения нормальных векторов плоскостей, которые задают прямую l.

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 18\vec{i}-39\vec{j}-17\vec{k}.$$

Тогда уравнение прямой l в каноническом виде: $\frac{x-1}{18}=\frac{y-2}{-39}=\frac{z}{-17}$. Для определения точки пересечения прямой и плоскости запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=1+18t, \\ y=2-39t, \\ z=-17t. \end{cases}$$

Подставляя переменные x, y и z в уравнение плоскости π, находим значение параметра t: $\pi: 1+18t+4\cdot(2-39t)+17t-4=0$, $t=\frac{5}{121}$. Подставляя значение параметра t в последнюю систему, определяем координаты точки пересечения прямой l с плоскостью π: $M_0\left({}^{211}\!/_{121}; {}^{47}\!/_{121}; {}^{-85}\!/_{121}\right)$.

5.2.5 Найти угол между прямыми $l_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-8}{-1}$ и $l_2: \frac{x-7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z+8}{0}$.

Решение. Угол между прямыми найдём как угол между направляющими векторами прямых: $\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{3\cdot5+2\cdot(-2)-1\cdot0}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-2)^2+0^2}}=\frac{11}{\sqrt{406}}$, $\varphi=\angle(l_1;l_2)=\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{406}}\right)$.

5.2.6 Найти угол между прямой $l: \frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-9}{3}$ и плоскостью $\pi: 4\cdot x+7\cdot y+z-12=0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью найдём по формуле $\sin\Theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $\vec{n}(A;B;C)$ и $\vec{s}(m;n;p)$ – нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой, соответственно. Находим синус угла между заданной прямой l и плоскостью π: $\sin\Theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|1\cdot4+2\cdot7+3\cdot1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+7^2+1^2}}=\frac{21}{2\sqrt{231}}$. Тогда угол между прямой l и плоскостью π равен: $\Theta=\angle(l;\pi)=\arcsin\left(\frac{21}{2\sqrt{231}}\right)$.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Написать уравнение плоскости π_1, проходящей через точку $M_0(4;2;5)$ параллельно плоскости $\pi: 12x-3y+4z-13=0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

5.3.2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(0;1;2)$ и $\vec{a}_2(-1;0;1)$.

5.3.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;1)$ и $M_3(2;1;1)$. Определить угол между полученной плоскостью и плоскостью π, заданной в задаче 5.3.2.

5.3.4 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a}(0;3;2)$; б) оси Oz; в) прямой $x=4+3t$, $y=2-t$, $z=7t$;

г) прямой $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+6}{5}$; д) прямой $\begin{cases} 2x-3y-4z+5=0, \\ 3x+4y+2z-9=0. \end{cases}$

5.3.5 Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3;0;2)$ и $M_2(3;5;-2)$.

5.3.6 Задана прямая $l: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$ и точка $M_0(3;1;4)$. Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку $M_0(3;1;4)$;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;1;4)$ перпендикулярно прямой l;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(3;1;4)$ на прямую l;

г) вычислить расстояние от точки $M_0(3;1;4)$ до прямой l.

5.3.7 Задана плоскость $\pi: 2x-6y+3z-17=0$ и прямая $l: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{12}$. Требуется:

а) проверить, принадлежит ли прямая заданной плоскости;

б) найти координаты точки пересечения прямой и плоскости;

в) вычислить синус угла между прямой и плоскостью;

г) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно к плоскости π.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$ (координаты точек заданы в задаче 3.4.1). Требуется:

а) найти уравнение плоскости ABC;

б) найти уравнение плоскости, которая параллельна векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, и проходит через точку D;

в) найти уравнение прямой AB;

г) найти уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC;

д) найти уравнение прямой DN, параллельной прямой AB;

е) найти уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно к прямой AB;

ж) вычислить расстояние от точки D до плоскости ABC;

з) вычислить угол между прямой AD и плоскостью ABC;

и) вычислить угол между прямыми AB и AD.

6 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(практическое занятие № 6)

Содержание: окружность, эллипс, гипербола, парабола, числовая последовательность и её свойства, предел числовой последовательности.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 6.1.1 *Линией второго порядка* в декартовой системе координат называется множество точек плоскости, удовлетворяющих следующему уравнению $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, где $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$.

Рассмотрим основные линии второго порядка.

1. *Окружность*.

Окружность (рисунок 6.1.1) с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом R задаётся уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (6.1.1)$$

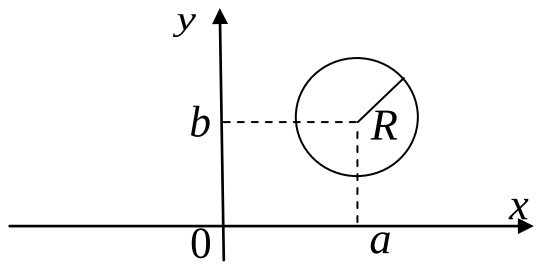


Рисунок 6.1.1 – Окружность

2. *Эллипс.*

Определение 6.1.2 *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, которые называются фокусами, есть величина постоянная: $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=Const$.

Эллипс (рисунок 6.1.2) с полуосями a и b $(a \ge b > 0)$, центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.1.2)$$

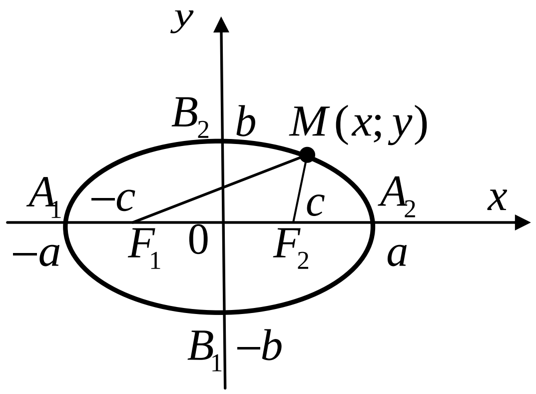


Рисунок 6.1.2 – Эллипс

Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – главными осями, а центр симметрии O – центром эллипса. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \ge 0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – фокальными радиусами точки $M(x;y)$, принадлежащей эллипсу. В частном случае, если $a = b$, то фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, то есть описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} < 1$ называется эксцентриситетом эллипса и показывает степень вытянутости вдоль большей оси (при значении $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью). Прямые $D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами эллипса.

3. *Гипербола.*

Определение 6.1.3 *Гиперболой* называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, которые называются фокусами, есть величина постоянная: $\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right| = Const$.

Гипербола (рисунок 6.1.3) с действительной полуосью a и мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.1.3}$$

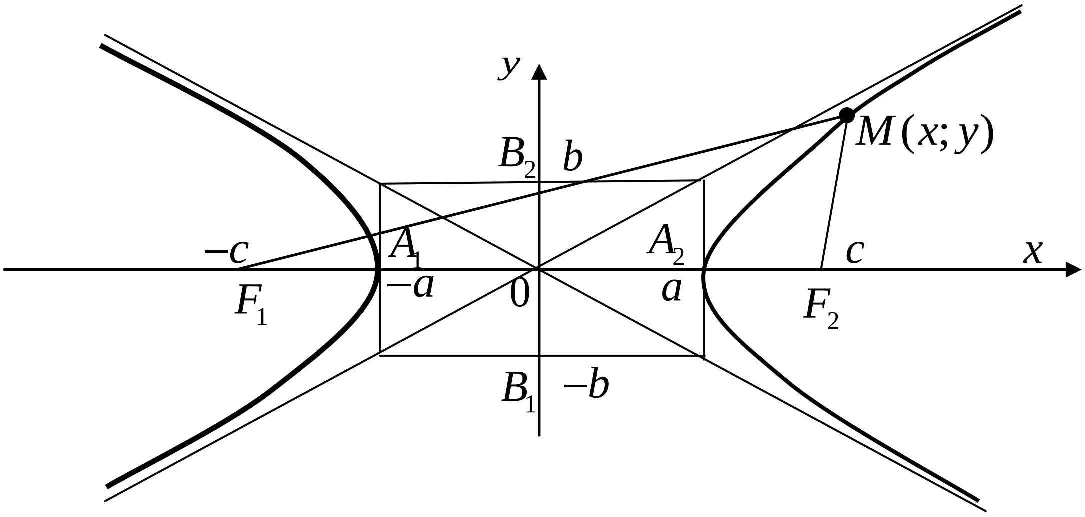


Рисунок 6.1.3 – Гипербола

Параметры a и b называются полуосями гиперболы (действительной и мнимой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – действительной и мнимой осями, а центр симметрии O – центром гиперболы. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – фокальными радиусами точки $M(x;y)$, принадлежащей гиперболе.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы и показывает степень вытянутости вдоль действительной оси. Прямые $D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами гиперболы. Прямые $C_1 : y = -\dfrac{b}{a}x$ и $C_2 : y = \dfrac{b}{a}x$, к которым неограниченно близко приближаются ветви гиперболы на бесконечности, называются асимптотами гиперболы. Гипербола, уравнение которой имеет вид $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, называется сопряжённой к гиперболе вида (6.1.3).

4. *Парабола.*

Определение 6.1.4 *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от фиксированной точки F, которая называется фокусом и некоторой данной прямой, которая называется директрисой: $\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\overrightarrow{NM}\right|$.

Парабола (рисунок 6.1.4) с вершиной в начале координат и симметричная относительно оси Ox, при условии $p > 0$, задаётся каноническим уравнением

$$y^2 = 2px. \qquad (6.1.4)$$

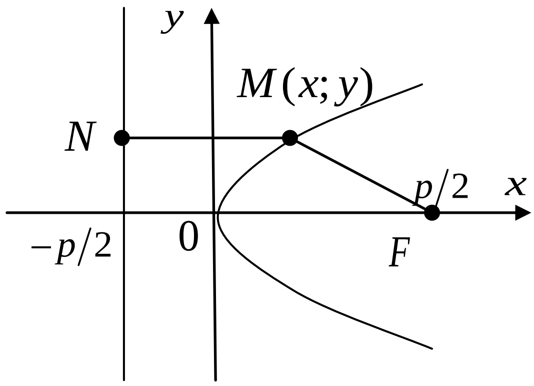


Рисунок 6.1.4 – Парабола

Число p называется параметром параболы, начало координат – её вершиной, а ось абсцисс – осью параболы. Точка $F(p/2;0)$ называется фокусом параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ – фокальным радиус-вектором, а число $r = \left|\overrightarrow{FM}\right|$ – фокальным радиусом точки M параболы. Прямая $D: x = -p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется её директрисой. Эксцентриситет параболы равен единице.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо, имеет вид: $y^2 = -2px$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вверх, имеет вид: $x^2 = 2py$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вниз, имеет вид: $x^2 = -2py$.

С экономической точки зрения кривые спроса и предложения во втором приближении представляют собой линии второго порядка.

Одной из важных областей курса «Высшая математика» является раздел «Введение в математический анализ», на основе которого в основном будут строиться все остальные разделы математики. Изучение этого раздела начнём с темы «Предел числовой последовательности».

Определение 6.1.5 *Числовой последовательностью* называется функция $f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, множеством значений – некоторое подмножество действительных чисел.

Число $f(n)$ называется n-м членом последовательности и обозначается символом x_n, а формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности (x_n).

Определение 6.1.6 Число a называется пределом числовой последовательности (x_n), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число n_0, зависящие от ε, что для всех натуральных чисел n больших n_0 все члены последовательности будут попадать в ε-окрестность точки a.

Используя символы математической логики, определение предела числовой последовательности записывается в виде:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathrm{N}), (\forall n > n_0) \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (6.1.5)$$

Определение 6.1.7 Числовая последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Определение 6.1.8 *Суммой, разностью, произведением и частным последовательностей* (x_n) и (y_n) называются последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, (x_n / y_n) соответственно (при частном предполагается, что все члены последовательности (y_n) отличны от нуля). *Произведением последовательности* (x_n) *на число* α называется числовая последовательность $(\alpha \cdot x_n)$, полученная путём умножения на α каждого члена последовательности (x_n).

Теорема 6.1.1 Если числовые последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot a$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left[\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right] = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$.

В теореме 6.1.1 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}), (0^0), (∞^0). Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, где $e = 2{,}71828182845...$

Рассмотрим одно из применений **предела числовой последовательности в экономических задачах**.

Формула сложных процентов имеет вид $Q = Q_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^k$, где Q_0 – первоначальная сумма вклада, p – процент начисления за определённый период времени, k – количество периодов времени хранения вклада, Q – сумма вклада по истечении k периодов. Если $p = 100r$ – процент начисления по вкладам и год разбит на k периодов, то через t лет сумма дохода достигнет значения $Q_k = Q_0 \cdot \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = Q_0 \cdot \left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right)^{rt}$. Если полагать, что проценты начисляются непрерывно и $\frac{k}{r} = m$, причём при значении $k \to \infty$, значение $m \to \infty$, то справедлива формула вычисления по непрерывным процентам:

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = Q_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{kt} = Q_0 \cdot e^{kt}.$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен 0,6.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6$. Следовательно, $c = 3$ и $a = 5$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6.2.2 Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 8, а расстояние между директрисами равно 18.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c = 8$, а расстояние между директрисами $|D_1D_2| = 2\frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{8}$. Учитывая, что эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получаем значения параметров: $c = 4$ и $a = 1/2$.

Находим параметр b из соотношения $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{255}}{4}$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{255}=1$.

6.2.3 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M_0\left(-2;-4\right)$.

Решение. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M_0\left(-2;-4\right)$, то каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2=-2px$. Так как точка $M_0\left(-2;-4\right)$ принадлежит параболе, то справедливо равенство: $\left(-4\right)^2=-2\cdot p\cdot\left(-2\right)$. Следовательно, значение параметра $p=4$. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2=-8x$.

6.2.4 Вычислить предел числовой последовательности $x_n=\frac{4n^3+5n+1}{7n^3+n^2-2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+5n+1}{7n^3+n^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель и}\\ \text{знаменатель на их старшую}\\ \text{степень переменной } n\end{array}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{7+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\frac{4+0+0}{7+0-0}=\frac{4}{7}.$$

6.2.5 Вычислить предел числовой последовательности $y_n=\frac{5n^4-3n^2+3}{8n^7+n^3+9}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^4-3n^2+3}{8n^7+n^3+9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n^3}-\frac{3}{n^5}+\frac{3}{n^7}}{8+\frac{1}{n^4}+\frac{9}{n^7}}=\frac{0}{8}=0$.

6.2.6 Вычислить предел числовой последовательности $z_n=\frac{2-3n^4-4n^3}{6n^2+5}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n^4-4n^3}{6n^2+5}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^4}-3-\frac{4}{n}}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n^4}}=\left(\frac{-3}{0}\right)=-\infty$.

6.2.7 Вычислить предел числовой последовательности $a_n=\sqrt{n^2+9n}-n$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-n\right)=\left[\begin{array}{l}\text{домнажаем и делим на выраже-}\\ \text{ние, сопряженное данному}\end{array}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+9n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+9n}+n\right)}{\sqrt{n^2+9n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{\sqrt{n^2+9n}+n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+1}=\frac{9}{2}.$$

6.2.8 Вычислить предел числовой последовательности $b_n=\left(\frac{3n-5}{3n-9}\right)^{6n+3}$.

Решение. Для нахождения предела числовой последовательности воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{3n-9}\right)^{6n+3}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-5}{3n-9}-1\right)^{6n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{3n-9}\right)^{6n+3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n-9}{4}}\right)^{\frac{3n-9}{4}}\right)^{\frac{4\cdot(6n+3)}{3n-9}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{24n+12}{3n-9}}=e^{\frac{24}{3}}=e^{8}.$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Написать каноническое уравнение эллипса и построить его, если:

а) малая полуось равна 3 и большая полуось равна 5;

б) большая полуось равна 13 и расстояние между фокусами равно 24;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 3/5;

г) малая полуось равна 5 и эксцентриситет равен 12/13;

д) расстояние между фокусами равно 4 и расстояние между директрисами равно 5;

е) эксцентриситет равен 3/5 и расстояние между директрисами равно 32.

6.3.2 Написать каноническое уравнение гиперболы и построить её, если:

а) мнимая полуось равна 3 и действительная полуось равна 2;

б) мнимая полуось равна 4 и расстояние между фокусами равно 10;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 3/2;

г) действительная полуось равна 8 и эксцентриситет равен 5/4;

д) расстояние между фокусами равно 20 и уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;

е) эксцентриситет равен 3/2 и расстояние между директрисами равно 8/3.

6.3.3 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и построить её, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p=1/2$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $A(4;-8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0;-3)$.

6.3.4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n+3}{2n^3+n^2-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n-3n^3}{6n^3+2n^2-4}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{5n^4-3n^2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+3n^3+1}{5n^3-3n-8}$.

6.3.5 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+8}-2n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)$.

6.3.6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+4}{2n-3}\right)^{5n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2-1}{6n^2+5}\right)^{2n+3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-2}\right)^{4n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+7}{4n-8}\right)^{n-1}$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Вычислить предел числовой последовательности.

6.4.1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{9n^2+1}-3n\right)$. **6.4.1.2** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+n}-3n\right)$.

6.4.1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}3n\left(\sqrt{16n^2+5}-4n\right)$. **6.4.1.4** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2+2n}-4n\right)$.

6.4.1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)\left(\sqrt{36n^2+8}-6n\right)$. **6.4.1.6** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25n^2+3n}-5n\right)$.

6.4.1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}(5n-3)\left(\sqrt{49n^2+2}-7n\right)$. **6.4.1.8** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{36n^2+n}-6n\right)$.

6.4.1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(\sqrt{64n^2-3}-8n\right)$. **6.4.1.10** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)$.

6.4.1.11 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)\left(\sqrt{81n^2+3}-9n\right)$. **6.4.1.12** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{81n^2+n}-9n\right)$.

6.4.1.13 $\lim\limits_{n\to\infty}(5n-2)\left(\sqrt{n^2-4}-n\right)$. **6.4.1.14** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{81n^2-5n}-9n\right)$.

6.4.1.15 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\left(\sqrt{4n^2+16}-2n\right)$. **6.4.1.16** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-2}-n\right)$.

6.4.1.17 $\lim\limits_{n\to\infty}(7n-2)\left(\sqrt{9n^2+3}-3n\right)$. **6.4.1.18** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-7n}-3n\right)$.

6.4.1.19 $\lim\limits_{n\to\infty}(9n+2)\left(\sqrt{16n^2-1}-4n\right)$. **6.4.1.20** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2}n\right)$.

6.4.1.21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-1\right)\left(\sqrt{25n^2+1}-5n\right)$. **6.4.1.22** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25n^2+3n}-5n\right)$.

6.4.1.23 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{9n^2+3}-3n\right)$. **6.4.1.24** $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{81n^3+3n}-9\sqrt{n^3}\right)$.

6.4.1.25 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+12)\left(\sqrt{5n^2+3}-\sqrt{5}n\right)$. **6.4.1.26** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{15n^2+3n}-\sqrt{15}n\right)$.

6.4.1.27 $\lim\limits_{n\to\infty}(4n-9)\left(\sqrt{64n^2+1}-8n\right)$. **6.4.1.28** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{32n^2+3n}-4\sqrt{2}n\right)$.

6.4.1.29 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{2n}\left(\sqrt{81n^2+1}-9n\right)$. **6.4.1.30** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{51n^2+5n}-\sqrt{51}n\right)$.

7 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ (практическое занятие № 7)

Содержание: элементарные функции и их свойства, предел функции в точке и на бесконечности, замечательные пределы, непрерывность функции в точке и на множестве, односторонние пределы, классификация точек разрыва.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой проколотой δ-окрестности точки x_0, то есть на множестве $\overset{o}{U}_\delta(x_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$. В точке x_0 значение функции $y=f(x)$ может быть не определено. Дадим определения Коши и Гейне предела функции в точке.

Определение 7.1.1 Число a называется *пределом функции* $y=f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ, зависящие от ε, что для всех чисел x из проколотой δ-окрестности точки x_0, все значения функции будут попадать в ε-окрестность точки a.

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Коши записывается в виде:

$$a=\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{def}{\leftrightarrow}(\forall\varepsilon>0),(\exists\delta(\varepsilon)>0),\left(\forall x:0<|x-x_0|<\delta\right)\to|f(x)-a|<\varepsilon. \tag{7.1.1}$$

Определение 7.1.2 Число a называется *пределом функции* $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)$, сходящейся к точке x_0, последовательность соответствующих значений функций $f(x_n)$ сходится к точке a.

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Гейне записывается в виде:

$$a=\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{def}{\leftrightarrow}\forall x_n:\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\to\lim_{n\to\infty}f(x_n)=a. \tag{7.1.2}$$

Если в бесконечно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $x<x_0$, то предел функции называется левосторонним $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, если же выполняется неравенство $x>x_0$, то правосторонним

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Если $x_0\to\infty$, то имеем предел функции на бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Теорема 7.1.1 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\pm b$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\cdot b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha\cdot f(x)\right)=\alpha\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha\cdot a$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)=\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x)}=\dfrac{a}{b}$.

В теореме 7.1.1 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(0^{0}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$. Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Определение 7.1.3 Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Определение 7.1.4 Функция $y=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 называются эквивалентными бесконечно малыми функциями: $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Например, в точке $x=0$ эквивалентными будут функции: $\sin cx\sim cx$, $\mathrm{tg}\,cx\sim cx$, $\arcsin cx\sim cx$, $\mathrm{arctg}\,cx\sim cx$, $1-\cos x\sim x^2/2$, $e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$, $\ln(1+x)\sim x$, $\ln(x+\sqrt{x^2+1})\sim x$, $(1+x)^{ax}\sim ax+1$, $\mathrm{sh}x\sim x$, $\mathrm{ch}x-1\sim x^2/2$.

Теорема 7.1.2 Предел отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке равен пределу отношения им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$, то есть справедливы предельные равенства:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha*(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \qquad (7.1.3)$$

Определение 7.1.5 Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняется три условия:

1) существует значение функции в этой точке $f(x_0)$;
2) существует предел функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Определение 7.1.6 Точка x_0 называется *точкой разрыва* для функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из условий непрерывности функции в этой точке нарушается.

Определение 7.1.7 Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если малые приращения функции вызывают малые приращения аргумента, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$.

Определение 7.1.8 Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема 7.1.3 Элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Определение 7.1.9 Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Проведём классификацию точек разрыва:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 – *точка разрыва первого рода*;
2) если хотя бы один из пределов левосторонний или правосторонний в точке x_0 не существует, то x_0 – *точка разрыва второго рода*;
3) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, а значение функции в этой точке не существует, то точка x_0 – *точка устранимого разрыва*.

Рассмотрим понятие **непрерывности в экономике**.

В основном функции, которые используются в экономике, являются непрерывными функциями или кусочно-непрерывными.

1. Если дан годовой доход *Дг*, то график налоговой ставки *Нс* примерно имеет такой график, как на рисунке 7.1.1.

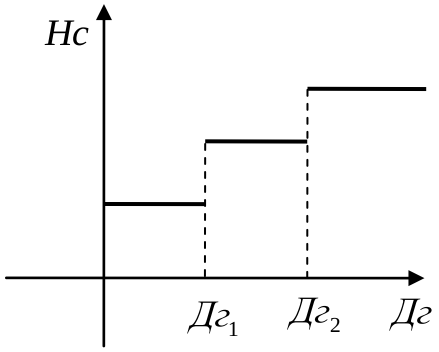


Рисунок 7.1.1 – Зависимость налоговой ставки от годового дохода

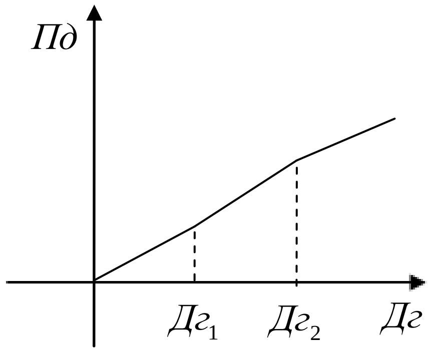


Рисунок 7.1.2 – Зависимость подоходного налога от годового дохода

На концах промежутков функция годового дохода от налоговой ставки имеет разрыв первого рода.

2. Величина подоходного налога *Пд* представляет собой непрерывную функцию годового дохода *Дг* (рисунок 7.1.2).

3. Рыночная цена облигации определяется по формуле: $S=\dfrac{N\cdot p\cdot(100+r)}{100\cdot r}$, где N – номинал облигации, p – ставка процента, r – темп инфляции. Таким образом, рыночная цена облигации S представляет собой элементарную функцию от ставки процента, а, следовательно, непрерывно зависит от неё. Поэтому при малом изменении ставки процента рыночная цена облигации изменится также минимально.

4. Функции спроса $s(p)$ и предложения $r(p)$ непрерывно зависят от цены товара p. Следовательно, при малых изменениях цен спрос и предложения также изменяются незначительно. В действительности, спрос может меняться скачкообразно. Так, например, цена может возрастать, а спрос уменьшается незначительно. Цена товара останавливается на какой-либо отметке, а затем незначительно превышает её. При этом может произойти скачкообразное уменьшение спроса. Такого рода процесс можно отметить на валютных и финансовых рынках.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Вычислить предел функции $f(x)=\dfrac{2x-5}{7x+1}$ в точке $x_0=3$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-5}{7x+1}=\dfrac{2\cdot 3-5}{7\cdot 3+1}=\dfrac{1}{22}$.

7.2.2 Вычислить предел функции $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$ в точке $x_0=2$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{раскладываем}\\ \text{числитель и знаменатель}\\ \text{на множители}\end{array}\right] =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x^2+2x+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

7.2.3 Вычислить предел функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{3x^2-10x+3}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{3x^2-10x+3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(3x-1)\cdot(x-3)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{5x+1-16}{(3x-1)\cdot(x-3)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5\cdot(x-3)}{(3x-1)\cdot(x-3)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{5}{(3x-1)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)} = \frac{5}{8\cdot 8} = \frac{5}{64}.$$

7.2.4 Вычислить предел функции $f(x) = x^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{x^5+4}-\sqrt{x^5-4}\right)$ при значении $x\to\infty$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{x^5+4}-\sqrt{x^5-4}\right)\right) = (\infty-\infty) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\sqrt{x^5+4}-\sqrt{x^5-4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^5+4}+\sqrt{x^5-4}\right)}{\left(\sqrt{x^5+4}+\sqrt{x^5-4}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{8\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+4}+\sqrt{x^5-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^5}}+\sqrt{1-\dfrac{4}{x^5}}} = \frac{8}{1+1} = 4.$$

7.2.5 Вычислить предел функции $f(x) = \dfrac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. При нахождении предела функции воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 14 - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x \sin 11x}{x^2} =$$

$$= -2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\cdot\frac{\sin 11x}{11x}\cdot 11\right) = -2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 11 = -66.$$

7.2.6 Вычислить предел функции $f(x)=\left(\cos 4x\right)^{\frac{1}{x^2}}$ в точке $x_0=0$.

Решение. Для определения предела функции воспользуемся первым и вторым замечательными пределами.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\cos 4x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos 4x-1\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\cos 4x-1\right)^{\frac{1}{\cos 4x-1}}\right)^{\frac{\cos 4x-1}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{x^2}}=e^{-2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4}=e^{-2\cdot 1^2\cdot 4}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}.$$

7.2.7 Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\le 1, \\ x^2, \text{ если } 1\le x\le 4, \\ x+3, \text{ если } x>4, \end{cases}$ на непрерывность.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;1)$, $(1;4)$ и $(4;+\infty)$, так как на этих интервалах она задана элементарными непрерывными функциями. Следовательно, если и существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках перехода от одной элементарной функции к другой, то есть в точках $x_1=1$ и $x_2=4$.

В точке $x=1$ значение функции равно $f(1)=x\big|_{x=1}=1$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1^2=1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(0)=1$, то функция $f(x)$ в точке $x=1$ является непрерывной.

В точке $x=4$ значение функции равно $f(4)=x^2\big|_{x=4}=16$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4} x^2=16,\ \lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4}\left(x+3\right)=4+3=7.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 4+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x=4$ имеет разрыв первого рода.

7.2.8 Исследовать функцию $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x=0$ и $x=1$.

Решение. В точке $x=0$ значение функции равно $f(0)=2^{\frac{1}{1-0}}=2$. Предел функции в этой точке $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{1-x}}=2$. Следовательно, справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$. По определению непрерывности функции в точке, в точке $x=0$ функция является непрерывной.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x=1$. В этой точке значение функции не определено. Следовательно, данная точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}}=\left(2^{\frac{1}{+0}}\right)=\left(2^{+\infty}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}}=\left(2^{\frac{1}{-0}}\right)=\left(2^{-\infty}\right)=0.$$

Так как левосторонний предел функции в точке $x=1$ равен бесконечности, то в данной точке функция $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$ терпит разрыв второго рода.

7.2.9 Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Решение. Область определения функции: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. В точке $x=0$ значение функции не определено. Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

Так как предел функции в точке $x=0$ существует, а значение функции в этой точке не существует, то точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию «по непрерывности»»

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & \textit{если } x\neq 0,\\ 2, & \textit{если } x=0.\end{cases}$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x+4}{x^3+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{2x^2+5x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x^2+2}{2x^3-x-12}$.

7.3.2 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$.

7.3.3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-100}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+22}-5}{x^2-3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{64+x}-\sqrt{64-x}}{\sqrt[3]{64+x}-\sqrt[3]{64-x}}$.

7.3.4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 2x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(7x-14)}{2x^2-5x+2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

7.3.5 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x-5)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 3x\right)^{1/x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{2/x}$.

7.3.6 Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}1-x, \text{ если } x\le 0,\\ x^3, \text{ если } 0\le x\le 2,\\ x+4, \text{ если } x>2,\end{cases}$ на непрерывность.

7.3.7 Найти точки разрыва функции $f(x)=3^{\frac{1}{4-x^2}}+\dfrac{2x-6}{x-3}$ и исследовать их характер. В случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности».

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Найти указанные пределы.

7.4.1.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+12}{5x^2+6x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x-12}{3x^2-3x-18}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x+6}-1}{x^2-4x-45}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{4x}$.

7.4.1.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+13}{5x^3+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2+2x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x^2+2x-35}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot \mathrm{tg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$.

7.4.1.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+9}{3x^3-7x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+2x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{6x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{8x}$.

7.4.1.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+10}{2x^2-2x-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+2x-35}{2x^2-3x-35}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{2x^2-7x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+2}\right)^{x+3}$.

7.4.1.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+3}{4x^2-3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-7x-30}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x^2+2x-48}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{5x^2}$;д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+7}{10x-22}\right)^{3x+3}$.

7.4.1.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+1}{5x^2+2x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x+2x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-2x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin10x-\sin x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^x$.

7.4.1.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-6x^2-x}{-5x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2-3x-7}{2x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x}{8\cdot x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{3x}$.

7.4.1.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{3x^3-5x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-2x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x^2+20}-6}{2x^2+2x-24}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x}{\sin6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-1}$.

7.4.1.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{3x^3-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-x-14}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x^2-3x-40}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^x$.

7.4.1.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+9}{2x^2-4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-27}{-x^2-x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2+24}-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg8x}{tg3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x-1}$.

7.4.1.11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+10}{2x^2-2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2-2x+35}{2x^2+3x-65}$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{-x^2+3x+28}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^2x}{3x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+2}\right)^{x+6}$.

7.4.1.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+13}{3x^3+3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos5x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{3x}$.

7.4.1.13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x+1}{4x^2-2x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x+3x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x^2-2x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{7x}$.

7.4.1.14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{2x^3+5x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2-2x+8}{2x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+24}-5}{3x^2-2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{x-4}$.

7.4.1.15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2-9}{-x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3x^2+27}{x^2+x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x^2-7}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\arcsin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+1}$.

7.4.1.16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{6x^2+2x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x+x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x}$.

7.4.1.17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^3+2x^2+3}{x^3-3x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x^2+x+3}{4x^2+x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+12}}{-x^2+x+12}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+3}\right)^{5x+1}$.

7.4.1.18 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{6x^3+5x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{3x^2-3x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+20}-6}{x^2-2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{3x-4}$.

7.4.1.19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+3x^2-1}{3x^2-6x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2-4x-4}{2x^2+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{-x^2+4x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+5}\right)^{x-7}$.

7.4.1.20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+9}{3x^2-4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{-x^2+x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2+24}-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$.

7.4.1.21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+3x+9}{-5x^3+7x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-5x^2+3x+2}{-x^2+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{-2x^2+3x+9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+5}\right)^{3x+1}$.

7.4.1.22 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x^2+13}{2x^3-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+9}{4x+3}\right)^{6x-1}$.

7.4.1.23 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+3x-4}$;б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-x^2+7x+30}{2x^2+x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{x+9}-2}{x^2-x-30}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+3}\right)^{3x}$.

7.4.1.24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+11}{2x^2-6x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-4x-16}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x^2+4x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-3}{6x+9}\right)^{5x-7}$.

7.4.1.25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+8x^2-x}{-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-x^2+4x+5}{4x^2-3x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin 3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+3}\right)^{x-7}$.

7.4.1.26 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+9}{5x^3+7x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-2x-3}{3x^2+x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{2x^2-3x-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{4x+1}$.

7.4.1.27 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3}{2x^3-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-2x^2+5x-2}{3x^2+2x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{4-\sqrt{x^2-9}}{-x^2-3x+40}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{2x}$.

7.4.1.28 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+3x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{tg2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+3}\right)^{x}$.

7.4.1.29 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{x^2-8x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2+3x+10}{x^2-x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{-x^2+2x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{7x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x+3}$.

7.4.1.30 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-8x^2+x}{-2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-4x-6}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cdot x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{3x-7}$.

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (практическое занятие № 8)

Содержание: производная функции, основные правила дифференцирования, таблица производных элементарных функции, производная сложной функции, производная функции, заданной неявно, логарифмическое дифференцирование, производные высшего порядка, производные функций в случае зависимости переменных от параметра, дифференциалы функции первого и высшего порядков.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если фиксированное значение аргумента x получит приращение $\triangle x$, то функция также получит приращение $\triangle y=\triangle f(x)=f(x+\triangle x)-f(x)$.

Определение 8.1.1 *Производной* функции $y=f(x)$ в произвольно фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции $\triangle f(x)$ к приращению аргумента $\triangle x$ при стремлении приращения аргумента к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$y'=y'_x=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}. \qquad (8.1.1)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ являются дифференцируемыми функциями в точке x, то есть существует производная функций в этой точке.

Основные правила дифференцирования

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;
3) $(C\cdot v)'=C\cdot u'$,
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}, v\neq0.$

Таблица производных основных элементарных функций

1) $C'=0,\ где\ C=Const$;
2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\ где\ n\in\mathrm{R}$;
3) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\ где\ a>0,\ a\neq1$;
4) $(e^x)'=e^x,\ где\ x\in\mathrm{R}$;
5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a},\ где\ a>0,\ a\neq1,\ x>0$;
6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ где\ x>0$;

7) $(\sin x)' = \cos x$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

8) $(\cos x)' = \sin x$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, *где* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$;

10) $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, *где* $x \neq \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *где* $|x| < 1$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *где* $|x| < 1$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, *где* $x \in \mathrm{R}$;

18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, *где* $x \neq 0$.

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Исходя из геометрического смысла производной и уравнения прямой (4.1.8) получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Уравнение нормали (прямой, перпендикулярной касательной, проведённой в точке касания) имеет вид: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

Механический смысл производной: производная пути по времени есть скорость в данный момент времени, то есть $v_{мгн} = \dfrac{ds}{dt}$.

Экономический смысл производной: издержки производства TC будем рассматривать как функцию от количества выпускаемой продукции Q, тогда предельные издержки производства равны производной издержек производства по количеству выпускаемой продукции, то есть $MC = \dfrac{dTC}{dQ} = \dfrac{d(FC+VC)}{dQ} = \dfrac{dVC}{dQ}$, где FC – постоянные издержки производства, а VC – переменные издержки производства. Используя понятие производной, можно найти производительность труда, как производную объёма выпускаемой продукции по времени, средний доход, скорость прироста, эластичность и т. д.

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная обратной функции: если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = \eta(y)$, производная которой отлична от нуля, то $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Логарифмическое дифференцирование: логарифмическое дифференцирование применяется при нахождении производной показательно-степенной и дробно-рациональной функции; логарифмической производной функции

$y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, то есть $\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'_x=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Определение 8.1.2 *Производной* k-го *порядка* называется производная от производной $(k-1)$-го порядка, то есть $y^{(k)}=\dfrac{d^k y}{dx^k}=\left(y^{(k-1)}\right)'=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right)$.

С механической точки зрения вторая производная пути по времени равна ускорению материальной точки в данный момент времени: $a=\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)=\dfrac{dv}{dt}$.

С экономической точки зрения темп изменения выручки $Тв$ от реализации товара равен второй производной выручки B от реализации товара по цене продукции P: $Тв=\dfrac{d^2B}{dP^2}=\dfrac{d}{dP}\left(\dfrac{dB}{dP}\right)$.

Если зависимость переменных задана в *параметрическом* виде уравнениями $y=y(t), x=x(t)$, то производные первого и второго порядков вычисляются по формулам: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx}=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

Определение 8.1.3 Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется главная линейная часть $A\cdot\vartriangle x=f'(x)\cdot\vartriangle x$ приращения функции $\vartriangle y=f'(x)\cdot\vartriangle x+o(\vartriangle x)$, где $o(\vartriangle x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости чем $\vartriangle x$.

Дифференциал функции в произвольной точке x вычисляется по формуле: $dy=y'dx$. Дифференциал функции применяется при приближённых вычислениях: $f(x_0+\vartriangle x)\approx f(x_0)+df(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\vartriangle x$. Для дифференциала функции справедливы следующие правила вычисления дифференциала:

1) $d(u\pm v)=du\pm dv$;
2) $d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$;
3) $d(C\cdot v)=C\cdot du$,
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}, v\neq 0.$

Определение 8.1.4 *Дифференциалом* k-го *порядка* называется дифференциал от дифференциала $(k-1)$-го порядка, то есть $d^k y=d\left(d^{k-1}y\right)=y^{(k)}dx$.

Рассмотрим понятие **эластичности функции**, как одно из основных приложений производной в экономике.

Определение 8.1.5 *Эластичностью функции* называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.

$$E_x(y)=\lim_{\vartriangle x\to 0}\left(\frac{\vartriangle y}{y}:\frac{\vartriangle x}{x}\right)=\lim_{\vartriangle x\to 0}\left(\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}\cdot\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\cdot\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{x}{y}\cdot y'.$$

Экономический смысл эластичности. Эластичность функции означает приближённый процентный прирост значения функции при приращении аргумента на один процент.

Рассмотрим свойства эластичности:

1) эластичность является безразмерной величиной, то есть её значение не зависит от единиц измерения аргумента и функции;

2) эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций;

3) эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций;

4) эластичности взаимно обратных функций являются взаимообратными функциями.

Рассмотрим **эластичность спроса и предложения** относительно цены.

Эластичность предложения $r = r(p)$ *относительно цены* p. Функция $E_r(p) = \frac{p}{r} \cdot r'$ показывает, как изменяется предложение на данный товар, если цена на товар изменится на один процент.

Эластичность спроса $s = s(p)$ *относительно цены* p. Функция $E_s(p) = \frac{p}{s} \cdot s'$ показывает, как изменяется спрос на данный товар, если цена на товар изменится на один процент. Так как обычно $s'(p) < 0$, то есть с увеличением цены спрос уменьшается, то эластичность $E_s(p)$ берут со знаком минус, то есть $E_s(p) = -\frac{p}{s} \cdot s'$. Если $|E_s(p)| > 1$, то спрос эластичен; если $|E_s(p)| < 1$, то спрос неэластичен; если $|E_s(p)| = 1$, то спрос нейтрален.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти производные указанных функций:

а) $y = 7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x$; б) $y = \mathrm{tg}x \cdot 5^x$; в) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

Решение:

а) $y' = \left(7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x\right)' = 35x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + 4\cos x$;

б) $y' = \left(\mathrm{tg}x \cdot 5^x\right)' = \left(\mathrm{tg}\,x\right)' \cdot 5^x + \left(5^x\right)' \cdot \mathrm{tg}\,x = \frac{5^x}{\cos^2 x} + 5^x \cdot \ln 5 \cdot \mathrm{tg}x$;

в) $y' = \left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - \left(e^x\right)' \cdot \cos x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-\sin x \cdot e^x - e^x \cdot \cos x}{e^{2x}} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

8.2.2 Найти производные указанных функций:

а) $y=e^{\sin^5 7x}$; б) $y=\cos^4 9x\cdot 5^{x^2}$; в) $y=\dfrac{\sin^3 8x}{\left(x^2+4\right)^3}$.

Решение:

а) $y'=\left(e^{\sin^5 7x}\right)'=e^{\sin^5 7x}\cdot\left(\sin^5 7x\right)'=e^{\sin^5 7x}\cdot 5\cdot\sin^4 7x\cdot\cos 7x\cdot\left(7x\right)'=$

$=e^{\sin^5 7x}\cdot 5\cdot\sin^4 7x\cdot\cos 7x\cdot 7=35\cdot e^{\sin^5 7x}\cdot\sin^4 7x\cdot\cos 7x$;

б) $y'=\left(\cos^4 9x\cdot 5^{x^2}\right)'=\left(\cos^4 9x\right)'\cdot 5^{x^2}+\left(5^{x^2}\right)'\cdot\cos^4 9x=$

$=4\cos^3 9x\left(\cos 9x\right)' 5^{x^2}+5^{x^2}\ln 5\left(x^2\right)'\cos^4 9x=5^{x^2}\cos^3 9x\left(-36\sin 9x+2x\ln 5\cos 9x\right)$;

в) $y'=\left(\dfrac{\sin^3 8x}{\left(x^2+4\right)^3}\right)'=\dfrac{\left(\sin^3 8x\right)'\cdot\left(x^2+4\right)^3-\left(\left(x^2+4\right)^3\right)'\cdot\sin^3 8x}{\left(\left(x^2+4\right)^3\right)^2}=$

$=\dfrac{3\sin^2 8x\cos 8x\,8\left(x^2+4\right)^3-3\left(x^2+4\right)^2 2x\sin^3 8x}{\left(\left(x^2+4\right)^3\right)^2}=\dfrac{6\sin^2 8x\left(4\cos 8x\left(x^2+4\right)-x\sin^3 8x\right)}{\left(x^2+4\right)^4}$.

8.2.3 Функция полных затрат на производство имеет вид: $TC=41\cdot\ln(1+4Q)$, где Q – объём продукции. Определить функцию предельных затрат MC и найти предельные затраты при объёме продукции, равном 10 у. е.

Решение. Предельные затраты определяются по формуле: $MC=\dfrac{dTC}{dQ}$.

Следовательно, функция предельных затрат принимает вид: $MC=\dfrac{164}{1+4Q}$. Тогда

$MC\left(10\right)=\dfrac{164}{1+4\cdot 10}=4$ у. е.

8.2.4 Найти эластичность спроса s относительно цены p, если $s(p)=4+8p-2p^2$, при значении $p=1$ и $p=3$ у. е.

Решение. Находим производную $s'(p)=\left(4+8p-2p^2\right)'=8-4p$. Тогда

эластичность спроса относительно цены равна $E_s(p)=\dfrac{p}{s}\cdot s'=\dfrac{8p-4p^2}{4+8p-2p^2}$.

При значении $p=1$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p)=0,4$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 1,01 у. е., то спрос увеличится на 0,4 %.

При значении $p=3$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p)=-1,2$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 3,01 у. е., то спрос уменьшится на 1,2 %.

8.2.5 Найти производную функции $y=x^{\sin 2x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y=\sin 2x\ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x: $(\ln y)'=(\sin 2x)'\ln x+\sin 2x(\ln x)'$ или $\frac{y'}{y}=\cos 2x\ln x+\sin 2x\frac{1}{x}$. Окончательно имеем: $y'=y\cdot\left(\cos 2x\ln x+\frac{\sin 2x}{x}\right)=x^{\sin 2x}\cdot\left(\cos 2x\ln x+\frac{\sin 2x}{x}\right)$.

8.2.6 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядка для функции $y=\sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$. Тогда дифференциал первого порядка равен $dy=y'dx=\sin 2xdx$. Находим производную второго порядка $y''=(\sin 2x)'=2\cos 2x$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2y=y''dx^2=2\cos 2xdx^2$.

8.2.7 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение квадратного корня из 8,88 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$ и вычислим её значение в точке $x=8{,}88$, то есть найдём значение функции $f(8{,}88)=\sqrt{8{,}88}$. Воспользуемся формулой $f(x_0+\triangle x)\approx f(x_0)+df(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\triangle x$, где $x_0+\triangle x=x$. Положим, что $x_0=9$, тогда $\triangle x=x-x_0=8{,}88-9=-0{,}12$. Значение функции в точке $x_0=9$ равно $f(9)=\sqrt{9}=3$. Значение производной $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x_0=9$ равно $f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$. Следовательно, $\sqrt{8{,}88}\approx 3+\frac{1}{6}\cdot(-0{,}12)=2{,}98$.

8.2.8 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v)=1{,}77v^2-0{,}59v+6$, которая зависит от объёма продаж v. Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 500 условных единиц товара до 525.

Решение. При достаточно малых изменениях объёмов продаж товара изменение затрат предприятия равно $\Delta C(v_0)\approx dC(v_0)=C'(v_0)dv=C'(v_0)\Delta v$. Изменение объёмов продаж составляет $\Delta v=525-500=25$ условных единиц товара. Так как $C'(v)=3{,}54v-0{,}59$, то $C'(500)=1769{,}41$. Тогда изменение затрат предприятия, при увеличении объёма продаж на 25 единиц, равно $\Delta C\approx 1769{,}41\cdot 25=44235{,}25$.

Вывод: при увеличении объёма продукции на 25 условных единиц товара затраты предприятия увеличатся на $44235,25$ условные денежные единицы.

8.2.9 Найти производные y'_x и y''_{xx} для функции, заданной уравнениями: $y=e^{10t}$, $x=e^{2t}$.

Решение. Используя формулы нахождения производных функций, заданных параметрическим образом, имеем:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(e^{10t}\right)'_t}{\left(e^{2t}\right)'_t}=\frac{10e^{10t}}{2e^{2t}}=5e^{8t},\ y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(5e^{8t}\right)'_t}{\left(e^{2t}\right)'_t}=\frac{40e^{8t}}{2e^{2t}}=20e^{6t}.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Найти производные указанных функций:

а) $y=4x^3+5\sqrt{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^7}}+4\ln x-2^x$; б) $y=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arctg}x$; в) $y=\dfrac{\sin x}{3^x}$.

8.3.2 Найти эластичность спроса s относительно цены p, если $s(p)=8+4p-2p^2$, при значении $p=1$ и $p=12$ у. е. Дать экономическую интерпретацию полученных значений эластичности.

8.3.3 Найти производные указанных функций:

а) $y=\sin^3 5x$; б) $y=4^{\cos^3 6x}$; в) $y=\operatorname{tg}^2 9x\cdot e^{x^2+2x+3}$; г) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^5 3x}{\cos^2\sqrt{x}}$.

8.3.4 Функция полных затрат на производство имеет вид: $TC=4\cdot\lg(1+2Q^2)$, где Q – объём продукции. Определить функцию предельных затрат MC.

8.3.5 Найти производные указанных функций:

а) $y=(\cos 2x)^{\sin 3x}$; б) $y=\left(x^2+9\right)^{\operatorname{tg}5x}$; в) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{ctg}2x}$.

8.3.6 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядков для указанных функций:

а) $y=\operatorname{arctg}2x$; б) $y=e^{x^2}$; в) $y=\cos^2 5x$.

8.3.7 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение $\cos 62^0$ с точностью до двух знаков после запятой.

8.3.8 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v)=3v^2+v-15$, которая зависит от объёма продаж v. Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 100 условных единиц товара до 105.

8.3.9 Найти производные первого и второго порядка для указанных функций:

а) $\begin{cases} y=\sin^3 2t, \\ x=\cos^3 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\operatorname{arctg}t, \\ x=\ln(1+t^2). \end{cases}$

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Продифференцировать заданные функции.

8.4.1.1 а) $y = x^2 \cdot \ln x - \dfrac{5}{\cos x}$; б) $y = \sin 2x \cdot \ln 8x$.

8.4.1.2 а) $y = x^2 \cdot \sin x + \dfrac{5x}{\ln x}$; б) $y = \sin^2 2x \cdot \cos 8x$.

8.4.1.3 а) $y = x \cdot \ln x + \dfrac{4}{tgx}$; б) $y = \sin 3x \cdot \cos^2 3x$.

8.4.1.4 а) $y = x^2 \cdot \cos x - \dfrac{x}{6+x}$; б) $y = \dfrac{\sin 2x}{\ln 8x}$.

8.4.1.5 а) $y = x \cdot \arccos x + \dfrac{x^2}{x+1}$; б) $y = \dfrac{e^{3x}}{\sin 2x}$.

8.4.1.6 а) $y = x \cdot arcctgx + \dfrac{1}{x + \sin x}$; б) $y = \dfrac{(2x+1)^3}{e^{3x}}$.

8.4.1.7 а) $y = x \cdot \sin x - \dfrac{8x}{3x-1}$; б) $y = \cos 2x \cdot tg^2 x$.

8.4.1.8 а) $y = e^x \cdot \cos x + \dfrac{x^3}{2-x}$; б) $y = \sin^2 2x \cdot (3x-1)^2$.

8.4.1.9 а) $y = e^x \cdot \cos x + \dfrac{7}{2x-1}$; б) $y = \dfrac{(2x+4)^3}{\ln^2 x}$.

8.4.1.10 а) $y = x^2 \cdot e^x - \dfrac{\cos x}{x}$; б) $y = \dfrac{\cos 2x}{tg 6x}$.

8.4.1.11 а) $y = x \cdot \sin x - \dfrac{4x}{\cos x}$; б) $y = \sin^2 3x \cdot \cos 8x$.

8.4.1.12 а) $y = x \cdot \ln x - \dfrac{4-x}{\cos x}$; б) $y = \dfrac{\ln 8x}{\sin 2x}$.

8.4.1.13 а) $y = x \cdot \ln x + \dfrac{5}{x - \sin x}$; б) $y = (3x-1)^3 \cdot \sin 2x$.

8.4.1.14 а) $y = x \cdot \cos x - \dfrac{6x}{4-x}$; б) $y = \dfrac{e^{3x}}{\cos 4x}$.

8.4.1.15 а) $y = x \cdot tgx + \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; б) $y = e^{4x} \cdot tg 6x$.

8.4.1.16 а) $y = x \cdot arcctgx + \dfrac{x}{arcctgx}$; б) $y = (e^{2x} - x)\sin 3x$.

8.4.1.17 а) $y = x \cdot \sin x - \dfrac{2x}{4x+3}$; б) $y = \dfrac{ctg 3x}{(4-2x)^2}$.

8.4.1.18 а) $y = e^x \cdot \cos x + \dfrac{x}{2 - x^2}$; б) $y = x^2 arctg 2x$.

8.4.1.19 а) $y = e^x \cdot \sin x - \dfrac{3}{1 - 4x}$; б) $y = \sin 2x \cdot e^{5x}$.

8.4.1.20 а) $y = \dfrac{1}{2} x \cdot e^x - \dfrac{\cos x}{x}$; б) $y = \dfrac{(2x-1)^3}{5tg 2x}$.

8.4.1.21 а) $y = x^2 \cdot tgx + \dfrac{2x}{\sin x}$; б) $y = \cos 2x \cdot tg^3 x$.

8.4.1.22 а) $y = x^3 \cdot \ln x + \dfrac{8}{\sin x}$; б) $y = \dfrac{\sin^2 3x}{2x}$.

8.4.1.23 а) $y = x \cdot \ln x + \dfrac{4}{ctgx}$; б) $y = \sin^2 5x \cdot \ln 3x$.

8.4.1.24 а) $y = x \cdot \cos x - \dfrac{x^2}{6 - x}$; б) $y = \cos 4x \cdot \ln^2 x$.

8.4.1.25 а) $y = x^2 \cdot \cos x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$; б) $y = tg^2 2x \cdot \ln 3x$.

8.4.1.26 а) $y = x \cdot arctgx + \dfrac{1}{2x + \cos x}$; б) $y = \dfrac{e^{4x}}{(2x-4)^2}$.

8.4.1.27 а) $y = x \cdot \sin x - \dfrac{6x}{2x - 4}$; б) $y = e^{3x} \cdot \cos 4x$.

8.4.1.28 а) $y = e^x \cdot \sin x + \dfrac{x^2 - 4}{2 - x}$; б) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x$.

8.4.1.29 а) $y = e^x \cdot \cos x + \dfrac{7}{2x^2 - 1}$; б) $y = \dfrac{(3x-1)^2}{\sin 3x}$.

8.4.1.30 а) $y = \dfrac{1}{6} x^3 \cdot e^x - \dfrac{\cos x}{x}$; б) $y = \dfrac{e^{5x}}{3x + 5x^2}$.

8.4.2 С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины с точностью до четырех знаков после запятой.

8.4.2.1	$\sin 28^0$.	**8.4.2.2**	$\cos 57^0$.	**8.4.2.3**	$\mathrm{tg} 43^0$.
8.4.2.4	$\mathrm{ctg} 46^0$.	**8.4.2.5**	$\arcsin 0{,}43$.	**8.4.2.6**	$\arccos 0{,}62$.
8.4.2.7	$\mathrm{arctg} 0{,}91$.	**8.4.2.8**	$\mathrm{arcctg} 1{,}22$.	**8.4.2.9**	$\ln(e^3 + 0{,}15)$.
8.4.2.10	$\sqrt{15{,}94}$.	**8.4.2.11**	$\sqrt[3]{8{,}15}$.	**8.4.2.12**	$\sqrt[5]{31{,}95}$.
8.4.2.13	$5^{2{,}01}$.	**8.4.2.14**	$\sqrt[4]{80{,}78}$.	**8.4.2.15**	$\lg 100{,}02$.
8.4.2.16	$\sqrt{\sin 33^0}$.	**8.4.2.17**	$\cos^3 62^0$.	**8.4.2.18**	$\mathrm{tg}^2 48^0$.
8.4.2.19	$\sqrt[3]{\mathrm{ctg} 44^0}$.	**8.4.2.20**	$\arcsin^2 0{,}54$.	**8.4.2.21**	$\arccos^3 0{,}57$.

8.4.2.22	$\operatorname{arctg}^2 1{,}05$.	**8.4.2.23**	$\operatorname{arcctg}^3 0{,}93$.	**8.4.2.24**	$\ln(e^4-0{,}25)$.
8.4.2.25	$\sqrt{(8{,}97)^3}$.	**8.4.2.26**	$\sqrt[3]{(26{,}75)^2}$.	**8.4.2.27**	$\sqrt[10]{(1023{,}99)^9}$.
8.4.2.28	$e^{3{,}91}$.	**8.4.2.29**	$\sqrt[4]{(624{,}87)^5}$.	**8.4.2.30**	$\lg^2 999{,}92$.

9 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (практическое занятие № 9)

Содержание: теоремы о среднем, правило Лопиталя, монотонность функций, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, выпуклость и вогнутость функций, точки перегиба, асимптоты графика функции, схема полного исследования функций.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Изучение производной функции даёт возможность судить о характерных особенностях в поведении этой функции. В основе исследований функций лежат теоремы, которые объединены общим названием – теоремами о среднем.

Теорема 9.1.1 (Ферма) Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 функция достигает наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю.

Теорема 9.1.2 (Ролля) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причём $f(a)=f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a;b)$, такая, что $f'(c)=0$.

Теорема 9.1.3 (Лагранжа) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a;b)$, такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Теорема 9.1.4 (Коши) Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причём $\varphi(x)\neq 0$ на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a;b)$, такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

При раскрытии неопределённостей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ используют правило Лопиталя-Бернулли.

Теорема 9.1.5 (Лопиталя-Бернулли) Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, а в точке

$x_0 \in (a;b)$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности и при этом существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

При выполнении условия теоремы правило Лопиталя можно применять неоднократно.

Одной из важных прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих методов исследования функции $y = f(x)$:

Определение 9.1.1 Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале I, если для каждой точки $x_1 > x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$. Если последние неравенства нестрогие, то функция называется *неубывающей* (*невозрастающей*).

Теорема 9.1.6 Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на интервале I возрастает (убывает), то на этом интервале I производная функции $y = f(x)$ является неотрицательной (неположительной), то есть для производной функции $y = f(x)$ выполняются неравенства $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$.

Определение 9.1.2 Интервалы, на которых функция убывает или возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Интервалы, на которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами строгой монотонности функции.*

Определение 9.1.3 Точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Точки области определения, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками*.

Определение 9.1.4 Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*), если для любой точки x из проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются *точкам локального экстремума*, а значения функции в них – *локальным экстремумом* функции в данных точках.

Теорема 9.1.7 (необходимый признак локального экстремума дифференцируемой функции). Если в точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ существует локальный экстремум, то в этой точке значение производной равно нулю или не существует $f(x_0) = 0$ или $f(x_0)$ не существует.

Теорема 9.1.8 (первый достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности критической точки x_0 и при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет свой знак, то точка x_0 является точкой экстремума.

При этом, если производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального максимума, если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой локального минимума.

Теорема 9.1.9 (второй достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0 и $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный максимум, а если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный минимум.

Следствие 9.1.1 Пусть функция $y = f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;
2) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;
3) если n – нечётное, то x_0 – не является точкой локального экстремума.

Замечание 9.1.1 Функция $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a;b]$ своего наибольшего $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и наименьшего $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ значения либо в критических точках, принадлежащих отрезку $[a;b]$, либо на концах этого отрезка $[a;b]$.

Определение 9.1.5 Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале I, если дуга кривой на этом интервале расположена не выше (не ниже) любой касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Определение 9.1.6 Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 9.1.10 Если функция $y = f(x)$ на интервале I дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на этом интервале выпуклый (вогнутый).

Теорема 9.1.11 Если вторая производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через эту точку вторая производная меняет свой знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Определение 9.1.7 Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Определение 9.1.8 Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* (если $k = 0$ – *горизонтальной*) асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 9.1.12 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = b$.

Общая схема исследования функции:

1) находим область определения функции;
2) определяем точки разрыва функции, вертикальные и горизонтальные асимптоты;
3) исследуем функцию на наличие свойств чётности или нечётности, периодичности;
4) определяем интервалы монотонности функции и точки экстремума;
5) находим интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;
6) находим точки пересечения графика функции с осями координат;
7) указываем множество значений функции;
8) строим график функции.

Рассмотрим применение **экстремума функции в экономике**.

Пусть даны функции спроса $s = s(p)$ и издержек обращения товара $C = C(p)$. Тогда прибыль от реализации товаров объёма v вычисляется по формуле: $\Pi(p) = s(p) \cdot p - C(p)$. Максимальную прибыль от реализации товаров достигаем при цене товара p_0, которая является решением уравнения $\Pi'(p) = 0$ и условии $\Pi''(p_0) < 0$.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{5x}{\ln x} - \dfrac{5}{\ln x} \right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x\to 3} \frac{\left(e^{4x-12} - 1\right)'}{\left(\sin(2x-6)\right)'} = \lim_{x\to 3} \frac{4e^{4x-12}}{2\cos(2x-6)} = \frac{4\cdot 1}{2\cdot 1} = 2;$$

б) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{5x}{\ln x}-\frac{5}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-5}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(5x-5)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{1/x}=\lim\limits_{x\to 1}5x=5$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=(0)^0=A$, тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}x\ln(\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\cos x)'}{(\sin x)'}=$$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{\cos x}=-\frac{0}{1}=0$, следовательно, $A=\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=e^0=1$.

9.2.2 Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-6x+8\right)^2}$. Определить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x\in\mathrm{R}$. Находим производную функции: $f'(x)=\frac{2\cdot(2x-6)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-6x+8}}$. Критическими точками функции будут $x=3$, в которой $f'(x)=0$, и $x=2$, $x=4$, в которых $f'(x)$ не существует. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	–	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

Функция возрастает на каждом из интервалов: $[2;3]$ и $[4;+\infty)$. Функция убывает на каждом из интервалов: $(-\infty;2]$ и $[3;4]$. Точки экстремума: $y_{\max}=y(3)=1$, $y_{\min}=y(2)=y(4)=0$.

9.2.3 Задана эмпирическая функция спроса $s(p)=450-3p$ и эмпирическая функция издержек обращения товара для предприятия $C(s)=4s^2+s+50$. Определить цену товара и его количество, при котором прибыль предприятия будет наибольшей. Найти прогнозируемую прибыль предприятия в этом случае.

Решение. Прибыль предприятия от реализации товаров находим по формуле: $\varPi(p)=s(p)\cdot p-C(p)=(450-3p)\cdot p-4(450-3p)^2-(450-3p)-50=$ $=-39p^2+11253p-810500$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума. Так как $\varPi'(p)=-78p+11253$, то стационарную точку находим из уравнения $-78p+11253=0$, откуда $p_0=144,7$. Вторая производная $\Pi''(p)=-78<0$, следовательно, при значении $p_0=144,7$ предприятие получит максимальную прибыль.

Если оптимальная цена равна 144,7 условных денежных единиц, то объём товара составит $s_0=450-3\cdot 144,7=15,9$ условных единиц товара, а максимальная прибыль равна 1223,59 у. д. е.

9.2.4 Задана функция $f(x)=x^4-12x^3+30x^2+48$. Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции. Определить точки перегиба.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x\in \mathrm{R}$. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x)=4x^3-36x^2+60x$, $f''(x)=12x^2-72x+60$. Решая уравнение $f''(x)=0$, находим $x=1$ и $x=5$. Точек, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, нет. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых вторая производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	67	$\cap$	-77	$\cup$

Функция является выпуклой на интервале $(1;5)$. Функция является вогнутой на каждом из интервалов: $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$. Точки перегиба: $M_1(1;67)$, $M_2(5;-77)$.

9.2.5 Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x=2$. В точке $x=2$ односторонние пределы равны бесконечности ($\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2}{x-2}=+\infty$), то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой. Найдём наклонные асимптоты

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2}=1,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Таким образом, у данной кривой существует единственная наклонная асимптота, уравнение которой $y=x+2$.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$.

9.3.2 Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 48x + 6$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$; в) $y = xe^{-x^2/2}$.

9.3.3 Задана эмпирическая функция спроса $s(p) = 300 - 2p$ и эмпирическая функция издержек обращения товара для предприятия $C(s) = 2s^2 + 5$. Определить цену товара и его количество, при котором прибыль предприятия будет наибольшей. Найти прогнозируемую прибыль предприятия в этом случае.

9.3.4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}$ на отрезке $[0;4]$.

9.3.5 Для указанных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

а) $y = x^3 - 6x^2 + x + 6$; б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; в) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

9.3.6 Найти асимптоты графиков указанных функций:

а) $y = \dfrac{2x}{3x - 3}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$; в) $y = xe^{1/x}$.

9.3.7 Провести полное исследование и построить графики указанных функций:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 60x + 3$; б) $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$; в) $y = e^{2x - x^2}$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

9.4.1.1 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x}$. **9.4.1.2** $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. **9.4.1.3** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln\sin x\right)^{x^2}$.

9.4.1.4 $\lim\limits_{x\to 1} \left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\pi x}$. **9.4.1.5** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$. **9.4.1.6** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2x}\right)^{\sin 2x}$.

9.4.1.7 $\lim\limits_{x\to 2} \left(2-x\right)^{x^3-5x+2}$. **9.4.1.8** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\lg(10+x)\right)^{1/x}$. **9.4.1.9** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\operatorname{tg} 3x\right)^{\operatorname{ctg} 3x}$.

9.4.1.10 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{x^2-4}$. **9.4.1.11** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} 3x)^{1/tg\,2x}$. **9.4.1.12** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin 7x}$.

9.4.1.13 $\lim\limits_{x\to 4} \left(\ln(5-x)\right)^{\operatorname{sh}(4-x)}$. **9.4.1.14** $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-3)^{1/\ln(3-x)}$. **9.4.1.15** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$.

9.4.1.16 $\lim\limits_{x\to 8} \left(tg\,\dfrac{\pi x}{8}\right)^{\sin \pi x}$. **9.4.1.17** $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{1/\operatorname{ctg}(x)}$. **9.4.1.18** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2\right)^{2/\ln x}$.

9.4.1.19 $\lim\limits_{x\to o}\left(\text{th}3x\right)^{x^3}$. **9.4.1.20** $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\text{tg}x)^{1/(4x-\pi)}$. **9.4.1.21** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg 7x\right)^{1/x}$.

9.4.1.22 $\lim\limits_{x\to 0}\left(shx\right)^{\ln x^2}$. **9.4.1.23** $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\sin x)^{\text{ctg}5x}$. **9.4.1.24** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{\ln x}$.

9.4.1.25 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\text{ctg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\cos(\pi x/4)}$. **9.4.1.26** $\lim\limits_{x\to 0}(\text{c}h6x)^{1/\text{sh}6x}$. **9.4.1.27** $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{1}{x-9}\right)^{2x-18}$.

9.4.1.28 $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x\right)^{x-1}$. **9.4.1.29** $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\text{ctg}x)^{\frac{1}{8x-2\pi}}$. **9.4.1.30** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\text{tg}3x\right)^{ctg3x}$.

9.4.2 Провести полное исследование функций и построить их графики.

9.4.2.1 а) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$; б) $f(x)=(3-x)\cdot e^{x-2}$.

9.4.2.2 а) $f(x)=\dfrac{x^3+4}{(x+1)^3}$; б) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

9.4.2.3 а) $f(x)=\dfrac{8x^3+8x}{(2x-1)^3}$; б) $f(x)=(4-x)\cdot e^{x-3}$.

9.4.2.4 а) $f(x)=\dfrac{8x^3+8x}{(2x+1)^3}$; б) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

9.4.2.5 а) $f(x)=\dfrac{x^4-8}{(x+1)^4}$; б) $f(x)=(-1-x)\cdot e^{x+2}$.

9.4.2.6 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $f(x)=x^2\ln x$.

9.4.2.7 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+1}$; б) $f(x)=(4+x)\cdot e^{-x-3}$.

9.4.2.8 а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

9.4.2.9 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; б) $f(x)=(3+2x)\cdot e^{-2x-2}$.

9.4.2.10 а) $f(x)=\dfrac{x}{2-x^3}$; б) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

9.4.2.11 а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $f(x)=(x-2)\cdot e^{3-x}$.

9.4.2.12 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $f(x)=x^2\cdot\ln^2 x$.

9.4.2.13 а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $f(x)=(5+2x)\cdot e^{-2x-4}$.

9.4.2.14 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

9.4.2.15 а) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-4}$; б) $f(x)=(2x-1)\cdot e^{2/x}$.

9.4.2.16 а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$.

9.4.2.17 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$.

9.4.2.18 а) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2+4x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$.

9.4.2.19 а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-1/x^2}}{x}$.

9.4.2.20 а) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$; б) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+2}+2$.

9.4.2.21 а) $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{5x-5}}{5x-5}$.

9.4.2.22 а) $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; б) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x-3}-3$.

9.4.2.23 а) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{7-x}}{7-x}$.

9.4.2.24 а) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$; б) $f(x)=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

9.4.2.25 а) $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$; б) $f(x)=-\dfrac{e^{-3-x}}{3+x}$.

9.4.2.26 а) $f(x)=\dfrac{8x-8}{x^2+2x+1}$; б) $f(x)=3\cdot\ln\dfrac{x}{x+3}-7$.

9.4.2.27 а) $f(x)=\dfrac{x^3-32}{x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{9+x}}{9+x}$.

9.4.2.28 а) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}$; б) $f(x)=e^{2x-x^2}$.

9.4.2.29 а) $f(x)=\dfrac{x^5}{x^4-1}$; б) $f(x)=\ln(x^2-5x+6)$.

9.4.2.30 а) $f(x)=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$; б) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 254 с.

2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.

3. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск. : Новое знание, 2008. – 263 с.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.

6. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск. : Выш. шк., 1989. – 400 с.

7. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

СОДЕРЖАНИЕ