МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения

Часть 1.

ВИТЕБСК
2003

УДК 51 (075)
Высшая математика. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Часть 1.
Витебск: Министерство образования Республики Беларусь,
УО “ВГТУ”, 2003.

Составители: доц., к. ф.-м. н. Денисов В.С., ст. преп. Коваленко А.В.,
асс. Дмитриев А.П., асс. Завацкий Ю.А.

Работа содержит контрольные задания по следующим разделам курса высшей математики: “Линейная алгебра”, “Векторная и аналитическая геометрия”, “Начала математического анализа”, “Дифференциальное исчисление функции одной переменной”. содержит вопросы к экзамену или зачёту, а также основные требования к выполнению контрольных работ. В данных методических указаниях рассмотрено достаточное количество разобранных типовых задач с указанием примерного оформления их решения.

Методические указания предназначены для выполнения студентами-заочниками всех специальностей контрольных работ, а также могут быть использованы на практических занятиях по высшей математике.

Одобрено кафедрой ТиПМ УО “ВГТУ”
20 февраля 2003 г., протокол № 6

Рецензент: д.ф.-м. н, профессор Трубников Ю.В.

Редактор: к.ф.-м. н, доцент Садовников Е.Г.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "__20__" ___марта 2003___ г., протокол №___6___

Ответственный за выпуск: Ярыго О.Д.
Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати 21.04.03 Формат __1/16__ Уч. изд. лист _4,0___
Офсетная печать. Тираж _813__экз. Заказ №__200_ Цена ___860 р________

Отпечатано на ризографе Учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”. Лицензия ЛП №89 от 26 января 2001 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов заочной формы обучения и являются руководством для изучения дисциплины “Высшая математика”. Они содержат в себе основные рекомендации студентам-заочникам при выполнении контрольных работ, а также методические указания по изучению первых разделов данной дисциплины, с решениями типичных примеров. В разобранных задачах приведено примерное их оформление с пояснениями и ссылками на основные формулы и рекомендуемую литературу. Методические указания также содержат перечень вопросов к экзамену по высшей математике.

В материалах приведены контрольные задания для десяти вариантов, которые разбиты на четыре раздела.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИ РАБОТЕ НАД КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТОЙ

1. В процессе изучения дисциплин студент-заочник должен выполнить контрольные работы по различным разделам высшей математики, которые рецензируются преподавателем. Рецензия на выполненную работу позволяет студенту судить о степени усвоения им материала курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление его дальнейшей работы и помогает сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточное количество задач по изучаемому материалу.

3.Каждая контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможность преподавателю – рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к сдаче зачета или экзамена.

4. Контрольная работа должна быть прислана в срок (до сессии). Невыполнение этого требования не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допущенные им ошибки и удлиняет срок рецензирования работы.

5. При выполнении и оформлении контрольной работы студент должен строго придерживаться следующих правил:

а) варианты решаемых задач соответствуют последней цифре зачетной студенческой книжки;

б) контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради с оставлением полей для замечаний преподавателя-рецензента;

в) на обложке тетради в заголовке указывается

— контрольная работа по высшей математике и её номер,

— фамилия и инициалы студента, номер зачетной книжки,

— факультет, курс и группа,

— дата отсылки работы в высшее учебное заведение и обратный адрес студента;

г) решение задач следует располагать в порядке следования их номеров;

д) перед началом самого решения задачи необходимо полностью записать ее условие, заменив, если необходимо, буквенные обозначения числовыми данными, соответствующими своему варианту;

е) все основные этапы решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями;

ж) в конце контрольной работы указывается используемая литература.

6. После получения прорецензированной контрольной работы студент должен исправить отмеченные ошибки и предоставить ее на повторное рецензирование.

7. Без предъявления соответствующей прорецензированной и зачтенной контрольной работы студент не допускается к экзамену по предмету “Высшая математика”.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ЧАСТЬ 1.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Матрицы. Операции сложения матриц и умножения на число. Умножение матриц.
2. Определители второго и третьего порядков. Определитель n - ого порядка.
3. Свойства и способы вычисления определителей.
4. Миноры k - ого порядка. Дополнительные миноры. Миноры и алгебраические дополнения элемента квадратной матрицы.
5. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы.
6. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы: 1) с помощью элементарных преобразований; 2) с помощью окаймляющих миноров. Теорема о базисном миноре.
7. Решение систем n - линейных уравнений с n неизвестными: 1) по формулам Крамера; 2) матричным методом.
8. Системы m - линейных уравнений с n неизвестными. Совместность системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
9. Решение систем m - линейных уравнений с n неизвестными: 1) с использованием базисного минора; 2) методом Гаусса.

10. Геометрическая интерпретация решений систем линейных уравнений и неравенств.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Векторы на плоскости и в трехмерном пространстве. Линейные операции над векторами и их свойства.

2. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора на плоскости и в трехмерном пространстве по базису. Системы координат.

3. Прямоугольная декартовая система координат. Проекция вектора на ось. Длина вектора, его направляющие косинусы. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

4. Скалярное произведение векторов и его свойства. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе.

5. Угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.

6. Ориентация векторов. Векторное произведение векторов и его свойства. Вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе. Условие коллинеарности векторов.

7. Смешанное произведение векторов и его свойства. Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Условие компланарности трех векторов. Теорема о равенстве смешанного произведения, с точностью до знака, объему параллелепипеда.

8. Приложения элементов векторной алгебры к геометрии: расстояние между двумя точками; деление отрезка в данном отношении λ; вычисление площади треугольника; вычисление объема параллелепипеда и треугольной пирамиды.

9. Линейные пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$. Размерность и базис линейного пространства.

10. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

11. Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Матрица линейного оператора. Сложение, умножение на число, произведение линейных операторов и соответствующих матриц.

12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

13. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Уравнение линии и поверхности.

2. Полярная система координат. Примеры уравнений линий в полярной системе координат.

3. Уравнение прямой на плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через заданную точку. Общее уравнение прямой и его исследование.

4. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через заданную точку.

5. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнения прямой в пространстве.

6. Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через заданную точку. Общее уравнение плоскости и его исследование.

7. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках.

8. Угол между прямыми на плоскости и в пространстве. Условия перпендикулярности и параллельности прямых.

9. Угол между плоскостями в пространстве. Условия перпендикулярности и параллельности плоскостей.

10. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости в пространстве.

11. Кривые второго порядка. Эллипс и его характеристики.

12. Кривые второго порядка. Гипербола и ее характеристики.

13. Кривые второго порядка. Парабола и его характеристики.

14. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

15. Цилиндрические и канонические уравнения поверхностей.

16. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Исследование формы поверхностей второго порядка методом параллельных сечений.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Множество вещественных (действительных) чисел. Модуль действительного числа и его свойства.

2. Числовая последовательность. Способы задания. Монотонные и ограниченные числовые последовательности.

3. Предел числовой последовательности и его свойства.

4. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности и их свойства.

5. Теорема о связи бесконечно малой числовой последовательности и сходящейся.

6. Правила предельного перехода для числовых последовательностей. Предельный переход в равенствах и неравенствах.

7. Существование предела монотонной и ограниченной числовой последовательности. Число e. Натуральные логарифмы.

8. Предел функции в точке. Основные свойства функций, имеющих предел.

9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.

10. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение к вычислению пределов.

11. Правила предельного перехода для функций.

12. Первый и второй замечательные пределы.

13. Непрерывность функции в точке и на множестве (различные определения непрерывности, их эквивалентность).

14. Непрерывность элементарных функций.

15. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация.

16. Свойства непрерывных функций на отрезке.

17. Комплексные числа в алгебраической форме записи. Операции сложения, умножения, деления комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

18. Тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа. Операции над ними. Формула Муавра.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная функции в точке, ее геометрический, механический и экономический смысл.

2. Вычисление производных простейших элементарных функций: $y = C$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$. Таблица производных.

3. Теорема о связи дифференцируемой функцией в точке и непрерывностью функции в этой же точке.

4. Теорема о дифференцировании суммы функций.

5. Теорема о дифференцировании произведения функций и следствия из нее.

6. Теорема о дифференцировании частного функций. Производная функций $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$.

7. Дифференцирование обратной функции. Производная обратно тригонометрических функций и логарифмической функции.

8. Дифференцирование сложной функции.

9. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

10. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций заданных неявно.

11. Производные высшего порядка. Механический смысл производной второго порядка.

12. Дифференцируемость функций. Дифференциал и его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала функции первого порядка. Дифференциал суммы, произведения и частного.

13. Приложение дифференциала функции в приближенных вычислениях.

14. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши.

15. Раскрытие неопределенностей, при вычислении пределов функции, по правилу Лопиталя – Бернулли.

16. Формула Тейлора с дополнительным (остаточным) членом в форме Лагранжа и Пеано.

17. Представление функций $y=(1+x)^m$, $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\ln(1+x)$ по формуле Тейлора.

18. Монотонные функции. Необходимые и достаточные условия монотонности функции.

19. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума функции. Достаточные условия существования экстремума функции.

20. Глобальный экстремум функции на отрезке.

21. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости, вогнутости функции на интервале.

22.Точки перегиба графика функции. Необходимые и достаточные условия существования у функции точек перегиба.

23. Асимптоты графика функции. Нахождение вертикальных и наклонных асимптот.

24. Примерная схема исследования и построения графика функции.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Жевняк Р. М.,Карпук А. А. Высшая математика: В 5 ч. Ч. 1. – Мн.: Выш. Шк. 1984. – 224с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980. – 176с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1988. – 432с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2-х т. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 456с.

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980. – 336с.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3 ч. Ч. 1. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Мн.: Выш. Шк., 1990. – 270 с.

7. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. Пособие. В 2 ч. Ч. 1. /Е. И. Гурский, В. П. Домашов, В. К. Кравцов, А. П. Сильванович.. – Мн.: Выш. Шк., 1989. – 349 с.

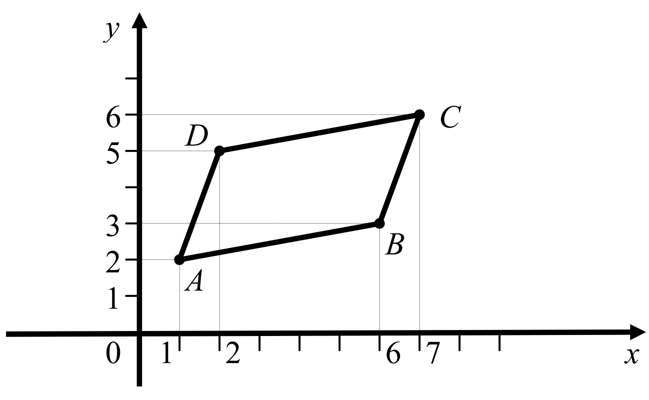
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В данном разделе методических указаний приведены примеры решения типовых задач контрольных заданий. Решение задач приведено по темам, которые студент должен изучить в процессе выполнения контрольной работы. Решенные задачи содержат формулы и пояснения, которые могут быть использованы студентом, при выполнении заданий своего варианта. В то же время, тех теоретических сведений, которые приведены в задачах, недостаточно для сдачи экзамена или зачета по курсу «Высшая математика», они могут быть использованы лишь при решении практических задач и выполнении контрольной работы.

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРИМЕР 1. Даны координаты вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;2)$, $B(6;3)$, $C(7;6)$, $D(2;5)$. Найти: 1) каноническое уравнение прямой AB, параметрическое уравнение прямой AC, нормальное уравнение прямой AD; 2) общее уравнение прямой перпендикулярной стороне AB и проходящей через точку С; 3) вычислить длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины C на сторону AB; 4) угол φ между стороной AB и отрезком, соединяющим точку A с серединой стороны BC; 5) площадь параллелограмма, используя понятие определителя. Сделать чертёж.

Решение. Сделаем чертеж



1. Запишем каноническое уравнение прямой AB, для чего воспользуемся каноническим уравнением прямой, с заданным направляющим вектором $\vec{s}(m;n)$ и проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$, а в качестве точки M_0 выберем точку А. Координаты произвольного вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, с заданными координатами начала $M_0(x_0;y_0)$ и конца $M_1(x_1;y_1)$, определяются по формуле $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;y_1-y_0)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(6-1;3-2)$ или $\overrightarrow{AB}(5;1)$, а, следовательно, каноническое уравнение прямой AB: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}$.

Найдем уравнение прямой AC, используя параметрическое уравнение $\begin{cases} x=x_0+m\cdot t, \\ y=y_0+n\cdot t, \end{cases}$ где t - некоторый параметр. В качестве направляющего вектора прямой возьмем вектор $\overrightarrow{AC}=(6;4)$, так как он параллелен искомой прямой AC, а точнее лежит на ней. Тогда уравнение прямой AC: $\begin{cases} x=1+6\cdot t, \\ y=2+4\cdot t. \end{cases}$

Определим нормальное уравнение прямой AD. Нормальное уравнение прямой имеет вид: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, где $-p\le 0$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, α - угол между нормальным единичным вектором прямой и осью Ox, p - расстояние от начала координат до прямой. Для записи нормального уравнения воспользуемся уравнением прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(a;b)$ и проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, которое можно преобразовать в общее уравнение прямой $ax+by+c=0$, путем элементарных преобразований. Для перехода к нормальному уравнению умножаем общее уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $\mu\cdot c<0$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две произвольные точки $M_0(x_0;y_0)$ и $M_1(x_1;y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Тогда, уравнение прямой AD: $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{5-2}$ или общее уравнение прямой $3x-y-1=0$. Нормальный вектор $\vec{n}(3;-1)$ имеет длину $|\vec{n}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$. Нормальный единичный вектор $\overrightarrow{n_0}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}};\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$, нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, а нормальное уравнение прямой AD: $\dfrac{3}{\sqrt{10}}x-\dfrac{1}{\sqrt{10}}y-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=0$.

2. Воспользуемся уравнением прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(a;b)$ и проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. В качестве нормального вектора можно взять направляющий вектор $\vec{s}(5;1)$ прямой AB, так как он перпендикулярен искомой прямой. Таким образом, уравнение прямой перпендикулярной стороне AB и проходящей через точку С: $5(x-7)+(y-6)=0$. Общее уравнение этой прямой: $5x+y-41=0$.

3. Длина высоты равна расстоянию от точки C до прямой AB. Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой l, которая имеет уравнение $ax+by+c=0$, можно определить по формуле $\rho(M_0,l)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. В первом пункте найдено каноническое уравнение прямой AB, которое путем элементарных преобразований приводится к общему уравнению: $x-5y+9=0$. Тогда, длина высоты параллелограмма, опущенной из вершины C на сторону AB:

$$\rho(C,AB)=\frac{|1\cdot 7-5\cdot 6+9|}{\sqrt{1+25}}=\frac{|-14|}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{98}{13}}.$$

4. Угол φ между стороной AB и отрезком, соединяющим точку A с серединой стороны BC, определим как угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и вектором $\overrightarrow{AK}$, где точка K является серединой стороны BC.

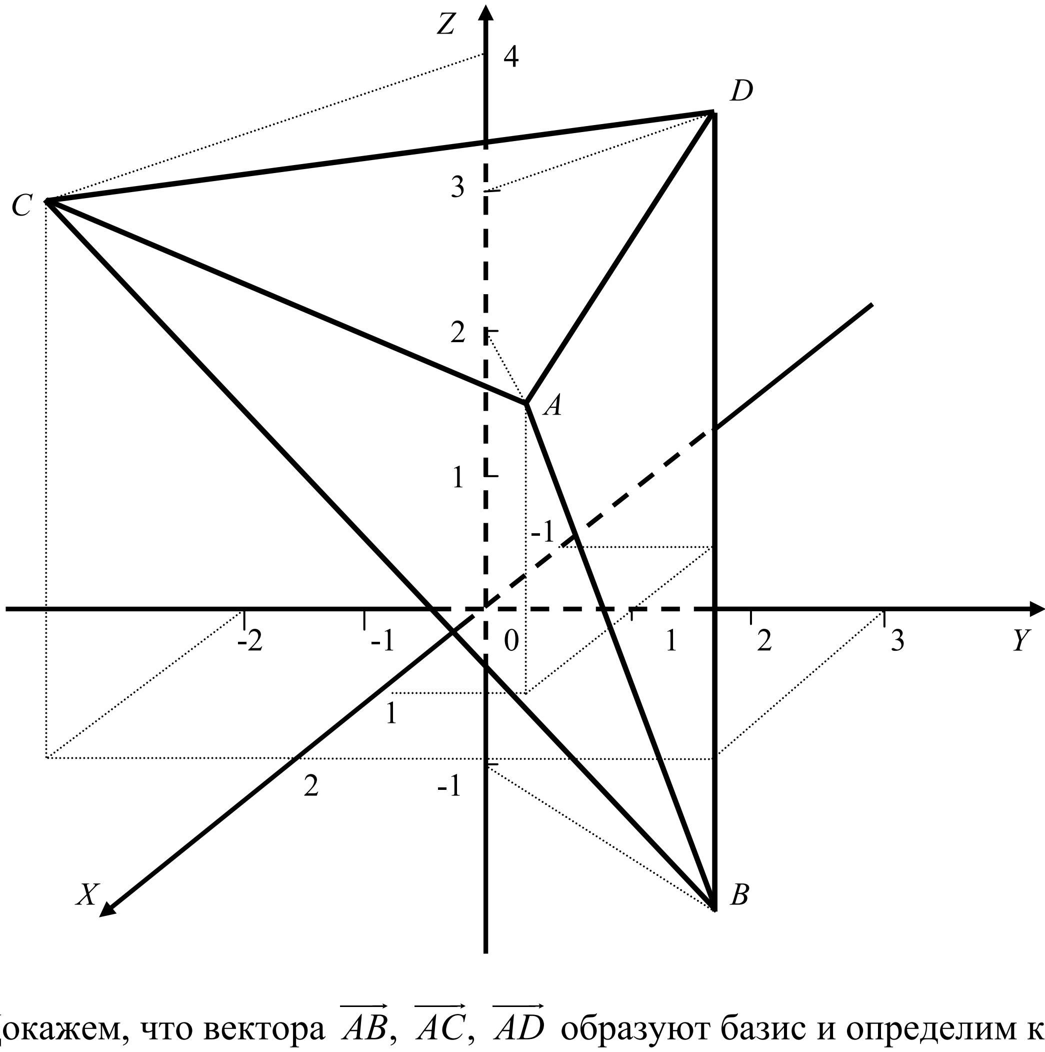
Найдем координаты точки K: $x_K=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{6+7}{2}=\dfrac{13}{2}$, $y_K=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{3+6}{2}=\dfrac{9}{2}$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}(5;1)$, $\overrightarrow{AK}\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. Используя, свойство скалярного произведения, находим косинус угла между векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AK}|}$. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ определяется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot\frac{11}{2}+1\cdot\frac{5}{2}}{\sqrt{5^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}}=\frac{60}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{146}}=\frac{15}{\sqrt{949}} \text{ и } \varphi=\arccos\frac{15}{\sqrt{949}}.$$

5. Площадь параллелограмма найдем, используя формулу площади треугольника: $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$, где $(x_i;y_i)$ - координаты вершин треугольника $(i=\overline{1;3})$. Тогда $S_{ABCD}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1-7 & 2-6 \\ 6-7 & 3-6 \end{vmatrix}=14$.

ПРИМЕР 2. Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;1;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;1;3)$. Доказать, что вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образуют базис и определить координаты вектора $\overrightarrow{BD}$ в этом базисе. Найти: 1) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D; 2) координаты точки пересечения медиан треугольника ABC; 3) координаты точки симметричной точке D относительно плоскости ABC; 4) угол φ между прямой AD и плоскостью ABC; 5) уравнения прямых AB и AC, и угол между ними; 6) работу равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{F_2} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{F_3} = \overrightarrow{AD}$, приложенных к материальной точке, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки A в точку пересечения медиан треугольника ABC. Сделать чертеж.

Решение. Сделаем чертеж



Докажем, что вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образуют базис и определим координаты вектора $\overrightarrow{BD}$ в этом базисе. Вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образуют базис, если они линейно независимы, то есть их смешанное произведение отлично от нуля. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где первая строка определителя координаты первого вектора $\vec{a}$, вторая – вектора $\vec{b}$, третья – вектора $\vec{c}$. По данным точкам находим координаты векторов, по формуле $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2; y_2; z_2)$. Таким образом, координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(1;2;-3)$, $\overrightarrow{AC}(1;-3;2)$, $\overrightarrow{AD}(-2;0;1)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 18 = 5 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов отлично от нуля, то есть вектора линейно независимы, а, следовательно, образуют базис. Тогда вектор $\overrightarrow{BD}$ выражается через базисные вектора: $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} + \gamma \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, или в координатной форме, данное векторное равенство можно записать в виде:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \alpha + \beta - 2\gamma \\ 2\alpha - 3\beta \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = -3; \\ 2\alpha - 3\beta = -2; \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma = 4. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера. Определитель системы линейных уравнений $\Delta = 5$.

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0, \quad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Тогда $\overrightarrow{BD} = (-1;0;1) = -\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

1. Высоту h пирамиды определяем по формуле $h = \frac{3 \cdot V}{S}$, где V - объем тетраэдра, S - площадь основания.

$V = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \mathrm{mod}(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} \mathrm{mod}\, 5 = \frac{5}{6}$.

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} \mathrm{mod}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) =$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}(-5\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k})=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+(-5)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Для определения координат точки пересечения медиан треугольника ABC находим координаты точки N, как середины стороны BC, а затем используем свойство медиан треугольника: медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

$$x_N=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+2}{2}=2;\ \ y_N=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2};\ \ z_N=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}.$$

Тогда $N(2;\frac{1}{2};\frac{3}{2})$. Найдем координаты точки P пересечения медиан треугольника, используя формулу деления отрезка в данном отношении. Имеем $\lambda=2,\ \ \vec{r}_P=\dfrac{\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_N}{1+\lambda}$.

$$x_P=\frac{x_A+2x_N}{3}=\frac{1+5}{3}=2;\ \ y_P=\frac{y_A+2y_N}{3}=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3};\ \ z_P=\frac{z_A+2z_N}{3}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}.$$

Следовательно, точка $P(2;\frac{2}{3};\frac{5}{3})$.

3. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1,\ M_2,\ M_3$ с координатами $(x_i;y_i;z_i)$, соответственно $(i=\overline{1;3})$.

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

Подставляя координаты заданных точек, получим уравнение плоскости ABC:

$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-2\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=0$ или $(x-1)\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=0$. Тогда уравнение плоскости ABC: $x+y+z-4=0$. Найдем уравнение прямой перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку D. Воспользуемся каноническим уравнением прямой: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - точка через которую проходит прямая, $\vec{s}(m;n;p)$ - направляющий вектор прямой. В качестве направляющего вектора возьмем нормальный вектор $\vec{n}(1;1;1)$ плоскости ABC, так как, он параллелен прямой. Тогда уравнение прямой:

$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}=t$. Запишем уравнение этой прямой в параметрическом виде и, решив систему линейных уравнений, определим координаты точки K, пересечения прямой и плоскости.

$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=1+t, \\ z=3+t, \\ x+y+z-4=0. \end{cases}$ Тогда $t=\frac{1}{3}$, $x_K=-\frac{2}{3}$, $y_K=\frac{4}{3}$, $z_K=\frac{10}{3}$. Пусть точка $D'(x';y';z')$ симметрична точке D, относительно плоскости ABC. Следовательно, $x_K=\frac{x_D+x'}{2}$; $y_K=\frac{y_D+y'}{2}$; $z_K=\frac{z_D+z'}{2}$. Или $x'=2x_K-x_D=-\frac{1}{3}$, $y'=2y_K-y_D=\frac{5}{3}$, $z'=2z_K-z_D=\frac{11}{3}$, то есть $D'\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$.

4. Синус угла φ между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, с направляющим вектором $\vec{s}(m;n;p)$, и плоскостью $ax+by+cz+d=0$, с нормальным вектором $\vec{n}(a;b;c)$ определяется по формуле $\sin\varphi=\frac{|a\cdot m+b\cdot n+c\cdot p|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$. Координаты нормального вектора $\vec{n}(1;1;1)$ плоскости ABC были найдены в предыдущем пункте. В качестве направляющего вектора прямой AD возьмем вектор $\overrightarrow{AD}(-2;0;1)$. Тогда

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot(-2)+1\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\text{, и угол } \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

5. Косинус угла θ между двумя прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, с направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1;n_1;p_1)$ и $\vec{s}(m_2;n_2;p_2)$, определяется по формуле:

$$\cos\theta=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_1|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Уравнения прямых AB и AC запишем используя уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

AB: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-2}{-1-2}$ или $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-3}$, причем $\vec{s}_1(1;2;-3)$.

AC: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{-2-1}=\frac{z-2}{4-2}$ или $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{2}$, причем $\vec{s}_1(1;-3;2)$.

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot(-3) - 3\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^1+(-3)^2+2^2}} = -\frac{11}{14};\ \theta = \arccos\left(-\frac{11}{14}\right) \text{ или}$$

$$\theta = \pi - \arccos\frac{11}{14}.$$

6. Координаты равнодействующей силы, приложенной к точке A: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1;2;-3) + (1;-3;2) + (-2;0;1) = (0;-1;0)$. Точку пересечения медиан была определена во втором пункте: $P(2;\frac{2}{3};\frac{5}{3})$. Тогда $\overrightarrow{AP}\left(1;-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Работа равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC},\ \vec{F}_3 = \overrightarrow{AD}$, приложенных к материальной точке, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки A в точку пересечения медиан треугольника ABC:

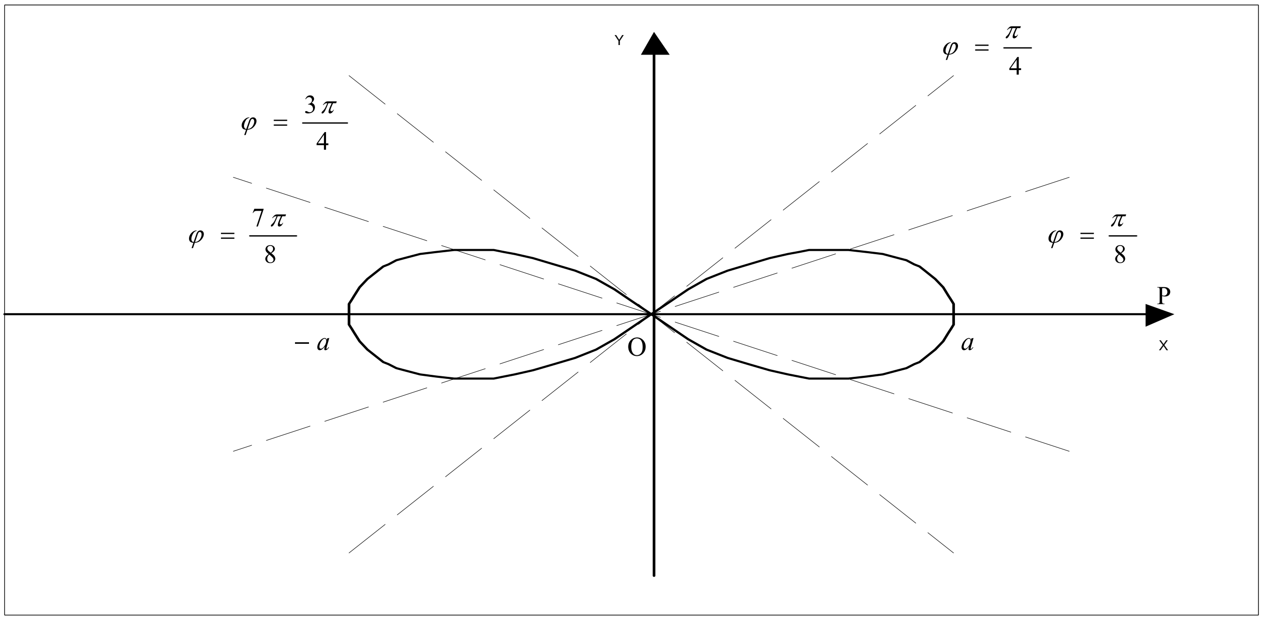
$A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AP} = 0\cdot 1 + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 3. Построить по точкам кривую, которая заданна уравнением $r = a\cos 2\varphi$ в полярной системе координат, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая углу φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$. Записать уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат, полагая, что начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная ось абсцисс – с полярной осью. Определить какая это линия.

Решение. Полярному углу φ будем придавать значения от угла $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\varphi = \frac{\pi}{8}$ и вычисляем соответствующие значения полярного радиуса r. Полярный радиус $r \ge 0$, тогда $\cos 2\varphi \ge 0$, и угол φ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Найденные значения запишем в виде таблицы:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
2φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π
$r = a\cos 2\varphi$	a	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	a	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	a

Построим заданную кривую. При построении кривой линии, принимаем произвольный отрезок за единицу масштаба. Полюс полярной системы координат помещаем в центр декартовой прямоугольной системы, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Полученная кривая называется двухлепестковой розой.



Найдем уравнение двухлепестковой розы в декартовой системе координат, используя формулы перехода от полярных координат $(\varphi; r)$ к декартовым координатам $(x; y)$:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение двухлепестковой розы в декартовой системе координат имеет вид:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right),$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Умножая, обе части уравнения на множитель $x^2 + y^2$ получаем уравнение вида:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2 \right) = a \cdot \left(x^2 - y^2 \right).$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем окончательно уравнение двухлепестковой розы:

$$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)^2.$$

ПРИМЕР 4. Составить канонические уравнения: а) эллипса, если сумма полуосей $a+b=12$, а расстояние между фокусами $2c=8\sqrt{3}$; б) гиперболы, с вершиной в точке $A(2;0)$ и проходящей через точку $B(4;3\sqrt{3})$; в) параболы, зная, что её вершина находится в начале координат, расстояние от фокуса до вершины равно 4, осью симметрии служит ось Ox и она проходит через точку $C(-1;4)$.

Решение: а) каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где a – малая полуось; b – большая полуось. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. Для определения уравнения эллипса необходимо найти неизвестные параметры a и b. По свойствам уравнения эллипса формула, которая связывает его параметры, имеет вид: $a^2-b^2=c^2$. По условию $c=4\sqrt{3}$. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2-b^2=48 \\ a-b=4 \end{cases}.$$

Решая полученную систему, находим, что $a=8,\ \ b=4$. Следовательно, каноническое уравнение искомого эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

б) каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где a – действительная полуось; b – мнимая полуось. Гипербола проходит через две известные точки A и B,а, следовательно, координаты этих точек удовлетворяют искомому уравнению гиперболы, то есть при подстановке координат точек получаем верные равенства. В результате имеем систему из двух уравнений, с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{0^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{4^2}{a^2}-\dfrac{\left(3\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1 \end{cases},$$

решив которую, находим, что действительная полуось a=2, мнимая полуось b=3. Следовательно, каноническое уравнение искомой гиперболы имеет вид: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

в) так как осью симметрии параболы служит ось Ох, а вершиной – начало координат, то уравнение параболы может быть определено одним из канонических уравнений $y^2 = 2px$ или $y^2 = -2px$, где p – расстояние от директрисы $x = -\frac{p}{2}$ до начала координат. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра p. Следовательно, $\frac{p}{2} = 4$ и $p = 8$. Подставляя это значение p в каждое из приведённых выше уравнений, получаем уравнения парабол: $y^2 = 16x$ или $y^2 = -16x$. Учитывая, что искомая парабола проходит через точку $C(-1;4)$, получаем, что уравнение искомой параболы $y^2 = -16x$.

ТЕМА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ПРИМЕР 5. Доказать совместность системы линейных уравнений, используя теорему Кронекера - Капелли. Решить её двумя способами: 1) методом Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Проверим на совместность систему линейных уравнений, используя теорему Кронекера – Капелли, согласно которой система совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы. Основная матрица системы - это матрица, составленная из коэффициентов стоящих перед неизвестными. Расширенная матрица системы линейных уравнений - это матрица, составленная из коэффициентов стоящих перед неизвестными и столбца свободных членов. Рангом матрицы называется наивысший порядок минора отличного от нуля. Определим ранг основной и расширенной матрицы системы линейных уравнений.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ - основная матрица системы.

$M_1^1 = 1 \neq 0$, $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5 \neq 0$,

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 4 =$$

$$= 44 \neq 0$$

Следовательно, ранг $rangA$ основной матрицы равен 3.

Расширенная матрица системы имеет вид: $A\,|\,B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$. Ранг расширенной матрицы равен 3, т.к. минор $4^{го}$ порядка, окаймляющий минор M_{123}^{123} составить нельзя. Таким образом, т.к. ранг основной матрицы системы равен числу неизвестных в системе линейных уравнений и равен рангу расширенной матрицы, то система имеет единственное решение.

а) решим систему методом Крамера, согласно которому $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}(j = \overline{1;3})$.

Определитель Δ - определитель основной матрицы системы, а Δ_j - определитель, полученный из определителя системы заменой j - го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta = M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 8 + 9\cdot 4\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 8 - 2\cdot 9\cdot(-1) -$$
$$-14\cdot 3\cdot 4 = 44,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 9\cdot(-1) + 14\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 8\cdot 3 - 3\cdot 9\cdot 3 - 14\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot 8 = 88,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 4\cdot 14 - 3\cdot(-1)\cdot 14 - 2\cdot 2\cdot 8 - 1\cdot 9\cdot 4 = 132.$$

Тогда по формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{44}{44} = 1,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{88}{44} = 2,\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{132}{44} = 3.$$

Таким образом, решение системы $x = (1;2;3)^T$.

б) решим систему средствами матричного исчисления: $X = A^{-1}\cdot B$, где $B = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - обратная матрица, алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} - минор, полученный вычеркиванием i - ой строки и j - го столбца в основной матрице системы, $|A|=44$ - определитель основной матрицы системы. Найдем алгебраические дополнения и обратную матрицу для основной матрицы системы линейных уравнений.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-11;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=14;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=11;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5.$$

Тогда обратная матрица для основной матрицы системы имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{44}\cdot\begin{pmatrix}-11 & 14 & 9\\ 11 & -10 & 3\\ 11 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

Решение исходной системы линейных уравнений:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{44}\cdot\begin{pmatrix}-11 & 14 & 9\\ 11 & -10 & 3\\ 11 & 2 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\ 9\\ 8\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{44}\cdot\begin{pmatrix}-11\cdot 14+14\cdot 9+9\cdot 8\\ 11\cdot 14-10\cdot 9+3\cdot 8\\ 11\cdot 14+2\cdot 9-5\cdot 8\end{pmatrix}=\frac{1}{44}\cdot\begin{pmatrix}44\\ 88\\ 132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.$

ПРИМЕР 6. Исследовать на совместность, используя теорему Кронекера – Капелли и решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\ 2x_1-x_2+5x_3-2x_4=7,\\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-6,\\ 4x_1-4x_2+x_3-x_4=-5.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы и приведем её к трапециидальному виду. Расширенная матрица имеет вид:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\2&-1&5&-2&7\\3&1&-1&-2&-6\\4&-4&1&-1&-5\end{array}\right).$$

Умножаем первую строку на (-2) и складываем со второй строкой. Аналогично, первую строку умножим на (-3) и складываем с третьей строкой, а так же умножим её на (-4) и сложим с четвертой строкой. В результате получаем матрицу равносильную данной расширенной матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-3&7&-4&-1\\0&-2&2&-5&-18\\0&-8&5&-5&-21\end{array}\right).$$

Умножим третью строчку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, вторую и четвертую на (-1) и поменяем местами вторую и третью строчки местами. В результате получаем матрицу равносильную предыдущей матрице, а, следовательно, и данной расширенной матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&1&-1&5/2&9\\0&3&-7&4&1\\0&8&-5&5&21\end{array}\right).$$

Умножим вторую строчку на (-3) и складываем с третьей строкой, вторую строку умножаем на число (-8) и складываем с четвертой. В результате получаем матрицу равносильную данной расширенной матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&1&-1&5/2&9\\0&0&-4&-7/2&-26\\0&0&3&-15&-51\end{array}\right).$$

Разделим элементы четвертой строки на 3 и поменяем местами третью и четвертую строки местами. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&1&-1&5/2&9\\0&0&1&-5&-17\\0&0&-4&-7/2&-26\end{array}\right).$$

Умножаем элементы третьей строки на 4 и складываем с соответствующими элементами четвертой строки. В результате получаем матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \big| & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & \big| & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \big| & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -47/2 & \big| & -94 \end{pmatrix}.$$

Умножим элементы четвертой строки матрицы на число $(-2/47)$. В результате преобразований над строками матрицы получаем матрицу равносильную исходной расширенной матрице системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \big| & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & \big| & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \big| & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \big| & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк. Элементарные преобразования над строками матрицы, не изменяют ее ранга. Таким образом, ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных. То есть $rangA = rangA|B = 4$. Следовательно, по теореме Кронекера – Капелли, система совместна и имеет единственное решение. Найдем его. Полученная матрица соответствует системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + \dfrac{5}{2}x_4 = 9, \\ x_3 - 5x_4 = -17, \\ x_4 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + 4 = -2 + 3 - 4 + 4 = 1, \\ x_2 = x_3 - \dfrac{5}{2}x_4 + 9 = 3 - \dfrac{5}{2}\cdot 4 + 9 = 2, \\ x_3 = 5x_4 - 17 = 5\cdot 4 - 17 = 3, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3, \ x_4 = 4.$

ПРИМЕР 7. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 11x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и определим её ранг.

$$M_1^1 = 1 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $rangA = 2$. При этом переменные x_1 и x_3 - базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{13}, а $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ и $x_5 = c_3$ - свободные неизвестные. При вычислении определителей были использованы свойства:

1) значение определителя не изменится, если строку (столбец) умножить на число и сложить с другой строкой (столбцом);

2) определитель равен нулю, если строки (столбцы) пропорциональны.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2c_1 - 2c_2 + c_3, \\ 2x_1 + 8x_3 = 4c_1 + c_2 - 2c_3. \end{cases}$$

Найдём фундаментальную систему решений. Пусть $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = 2,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответственно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{2} = 2,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{2} = 0$. Тогда первый вектор фундаментальной системы решений будет иметь координаты $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

. Пусть $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0$. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = 2,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -19,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{19}{2}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{2}$. Тогда второй вектор фундаментальной системы решений будет иметь координаты $E_2 = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 0 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

. Пусть $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1$. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = 2,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 14,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{2} = 7$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2$. Тогда третий вектор фундаментальной системы решений будет иметь координаты $E_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Используя фундаментальную систему решений, общее решение однородной системы может быть записано в виде $X = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3$, где $c_1, c_2, c_3 \in R$. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -19/2 \\ 0 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - \frac{19}{2}c_2 + 7c_3 \\ c_1 \\ \frac{5}{2}c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Фундаментальная система решений $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 0 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Общее решение $x_1 = 2c_1 - \frac{19}{2}c_2 + 7c_3$, $x_2 = c_1$, $x_1 = \frac{5}{2}c_2 + 3c_3$, $x_1 = c_2$, $x_1 = c_3$, где $c_1, c_2, c_3 \in R$.

ПРИМЕР 8. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора $\hat{A}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $|A - \lambda \cdot E| = 0$, решения которого являются собственными значениями матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по правилу треугольника:

$$\lambda^2 \cdot (1-\lambda) + 6 - 6 - 2 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda - 9 \cdot (1-\lambda) = 0.$$

Решаем характеристическое уравнение.

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9 \cdot \lambda - 9 = 0,$$
$$-\lambda^2 \cdot (\lambda - 1) + 9 \cdot (\lambda - 1) = 0,$$
$$-(\lambda - 3) \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda - 1) = 0,$$
$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1.$$

Для каждого собственного значения λ находим собственные векторы из системы:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1 = 3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

Таким образом, $rangA = 2$. При этом переменные x_1 и x_3 - базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{13}, а $x_2 = c$ - свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3c, \\ 3x_1 + x_3 = c. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = -6, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответственно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1, \ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{-6} = 0$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_1 = 3$, имеет координаты: $E_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, где $c \in R, \ \ c \neq 0$.

Пусть $\lambda_2 = -3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

Таким образом, $rangA = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 - базисные, так как они входят в базисный минор M_{13}^{12}, а $x_3 = d$ - свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -d, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4d. \end{cases}$$

Пусть $d=1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1+3x_3=-1, \\ -2x_1+2x_3=-4. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{13}^{12}=-12,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=10,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=-14.$$

Соответственно, $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-14}{12}=-\frac{7}{6}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_2=-3$ имеет координаты: $E_2=d\cdot\begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5d/6 \\ -7d/6 \\ d \end{pmatrix}$, где $d\in R,\ \ d\neq 0$.

Пусть $\lambda_3=1$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \text{ или } \begin{cases} -x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ -2x_1+2x_2\quad=0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1=-1\neq 0,\quad M_{12}^{12}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

Таким образом, $rangA=2$. При этом переменные x_1 и x_2 - базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{12}, а $x_3=m$ - свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2=-m, \\ 3x_1-x_2=-m. \end{cases}$$

Пусть $m=1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -x_1+3x_3=-1, \\ 3x_1-x_3=-1. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{12}=-8,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=4,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_3 = 1$ имеет координаты: $E_3 = m \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m/2 \\ m/2 \\ m \end{pmatrix}$, где $m \in R, \ m \neq 0$.

Ответ. Собственные значения матрицы линейного оператора: $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -3, \ \lambda_3 = 1$. Собственные векторы матрицы линейного оператора, которые соответствуют собственным значениям, имеют координаты $\begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5d/6 \\ -7d/6 \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -m/2 \\ m/2 \\ m \end{pmatrix}$ соответственно, при этом $c, d, m \in R$, $c \neq 0, \ d \neq 0, \ m \neq 0$.

ТЕМА 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРИМЕР 9. Найти предел числовой последовательности

$$u_n = \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n^4} + \frac{1}{n} \right).$$

Решение:

Для того чтобы найти указанный предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, требуется преобразовать последовательность u_n к виду явного аналитического задания. Для этого достаточно преобразовать выражение $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Докажем, например, методом математической индукции, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

При $n = 1$ формула верна. Действительно, $1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$.

Предположим, что формула справедлива при $n = k$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$. Докажем, что формула верна для $n = k+1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+1+1)^2}{4}.$$

Учитывая предположение, проводим преобразование левой части последнего равенства:

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$\frac{k^2\cdot(k+1)^2+4\cdot(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot\left(k^2+4k+4\right)}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\cdot\left(k+2\right)^2}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot\left(k+1+1\right)^2}{4},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, по методу математической индукции равенство $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ справедливо при всех натуральных n.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\Big/n^4=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(n^2+2n+1)}{4n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+2n^3+n^2)}{4n^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\left(\frac{1+0+0}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{4}$.

ПРИМЕР 10. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-4x-3}{3x^4-4x^2+5x+1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2-4x-3}{3x^4-4x^2+5x+1}=\begin{bmatrix}\text{"подставим" вместо } x\\ \text{бесконечность}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^4+3x^2-4x-3\right)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^4-4x^2+5x+1\right)=\infty\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{имеем неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}, \text{ которую рас-}\\ \text{кроем делением числителя и знаменателя на } x^4\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}}{3-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}=$$

$$=\left(\frac{2+\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{3-\frac{4}{\infty}+\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}}\right)=\left(\frac{2+0-0-0}{3-0+0+0}\right)=\frac{2}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{2x^3+x^2-3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{2x^3+x^2-3x}=\left[\begin{array}{l}\text{подставим вместо } x\\ \text{его предельное значение равное } 1\end{array}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{получена неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\text{, числитель и знаменатель стремится к}\\ \text{нулю, т.е. } (x\text{-}1)\to 0\text{. Выделим в числителе и знаменателе множители } (x\text{-}1)\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(2x^2+3x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{2x^2+3x}=\frac{5}{5}=1.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{6-x}}{2x^2-3x-2}$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{6-x}}{2x^2-3x-2}=\left[\begin{array}{l}\text{подставим вместо } x\\ \text{его предельное значение равное } 2\end{array}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{получена неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\text{, которую рас-}\\ \text{кроем выделением в знаменателе множитель } (x-2) \text{ и}\\ \text{домножением числителя и знаменателя на сопря-}\\ \text{женный множитель } 2+\sqrt{6-x}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-\sqrt{6-x})(2+\sqrt{6-x})}{(x-2)(2x+1)(2+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{4-6+x}{(x-2)(2x+1)(2+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(2x+1)(2+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(2x+1)(2+\sqrt{6-x})}=\frac{1}{20}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{x^2-3x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{x^2-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 4x-\sin 2x)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{имеем неопределенность вида } \frac{0}{0}\text{, которую рас-}\\ \text{кроем с помощью первого замечательного предела:}\\ \lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 3x}{x(x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\cos 3x}{(x-3)}=1\cdot\frac{2\cdot 1}{-3}=-\frac{2}{3}.$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\big(\ln(x+2)-\ln(x+5)\big)$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\big(\ln(x+2)-\ln(x+5)\big)=\left[\begin{array}{l}\text{имеем неопределенность вида}\\ \infty(\infty\text{-}\infty)\text{, которую преобразуем, ис-}\\ \text{пользуя свойства логарифмической}\\ \text{функции}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{(2x+1)}=\left[\begin{array}{l}\text{получена неопределенность вида}\\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\text{, которая преобразовывается}\\ \text{к неопределенности } (1)^{\infty}\text{ и раскры-}\\ \text{вается с помощью } 2^{\text{го}}\text{ замечательного}\\ \text{предела: } \lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\big(1+\alpha(x)\big)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e\ (e\approx 2.71)\end{array}\right]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{-3}{x+5}\right)^{(2x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{-3}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-3}\cdot\frac{-3}{x+5}(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{-3}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+5}(2x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \ln(e)^{\frac{-3(2x+1)}{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3(2x+1)}{x+5}\ln e =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x+3}{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6+3/x}{1+5/x} = \left(\frac{-6+0}{1+0}\right) = -6.$$

ПРИМЕР 11. Исследовать функцию $f(x) = 12^{\frac{1}{6-x}} + \dfrac{3x-9}{x-3}$ на непрерывность в точках $x_1 = 5,\ x_2 = 6,$ и $x_3 = 3$. В случае устранимого разрыва доопределить функцию по «непрерывности» в данной точке. Сделать схематический чертёж графика исходной функции.

Решение. Для точки $x_1 = 5$ имеем:

$$f(5) = 12^{\frac{1}{6-5}} + \frac{3\cdot 5-9}{5-3} = 15,$$

$$\lim_{x\to 5-0} f(x) = \lim_{x\to 5-0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = 15,$$

$$\lim_{x\to 5+0} f(x) = \lim_{x\to 5+0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = 15.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 5+0} f(x) = f(5) = 15$. Следовательно, по определению непрерывности функции, в точке $x_1 = 5$ функция $f(x)$ непрерывна.

Исследуем функцию в точке $x_2 = 6$. Значение функции в этой точке не существует, а, следовательно, по определению непрерывности, в точке $x_2 = 6$ функция терпит разрыв. Установим род разрыва.

$$\lim_{x\to 6+0} f(x) = \lim_{x\to 6+0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(12^{\frac{1}{-0}} + \frac{3\cdot 6-9}{6-3}\right) = \left(12^{-\infty}+3\right) = 0+3 = 3.$$

$$\lim_{x\to 6-0} f(x) = \lim_{x\to 6-0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(12^{\frac{1}{+0}} + \frac{3\cdot 6-9}{6-3}\right) = \left(12^{+\infty}+3\right) = +\infty,$$

Следовательно, в точке $x_2 = 6$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв, то есть $x_2 = 6$ - точка разрыва второго рода.

Исследуем функцию в точке $x_3 = 3$. Значение функции в этой точке не существует, а, следовательно, по определению непрерывности, в точке $x_3 = 3$ функция терпит разрыв. Установим род разрыва.

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(\frac{+0}{+0}\right) = \lim_{x\to 3+0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + 3\right) = \sqrt[3]{12} + 3.$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(\frac{-0}{-0}\right) = \lim_{x\to 3-0}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + 3\right) = \sqrt[3]{12} + 3.$$

Следовательно, в точке $x_3 = 3$ выполняется равенство левостороннего и правостороннего предела, но при этом значения функции в этой точке не существует. Поэтому данная точка является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию $f(x)$, по «непрерывности», в точке $x_3 = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 12^{\frac{1}{6-x}} + \dfrac{3x-9}{x-3}, & \text{если } x \neq 3, \\ \sqrt[3]{12} + 3, & \text{если } x = 3. \end{cases}$$

Для выполнения схематического чертёжа графика исходной функции проведем дополнительные исследования, а именно, исследуем функцию на бесконечности.

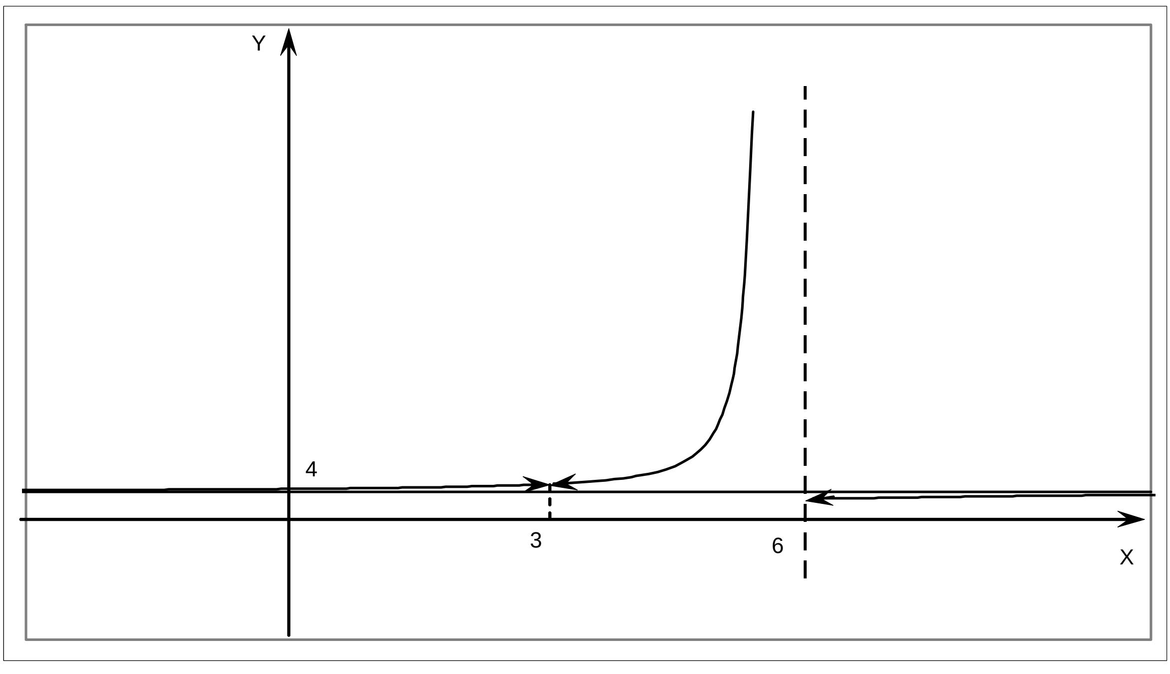
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + 3\right) = \left(12^{\frac{1}{-\infty}} + 3\right) = 12^0 + 3 = 4,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + \frac{3x-9}{x-3}\right) = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(12^{\frac{1}{6-x}} + 3\right) = \left(12^{\frac{1}{+\infty}} + 3\right) = 12^0 + 3 = 4.$$

Выполним схематический чертеж графика функции.



ПРИМЕР 12. Определить точки разрыва функции,

$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } 0<x<1, \\ x^2+1, \text{ если } x\ge 1 \end{cases}$$ если они существуют. Сделать схематический чертёж.

Решение. Функция на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ задана элементарными функциями, которые непрерывны на указанных интервалах, т.к. элементарные функции непрерывны в области определения. Следовательно, если существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках смены аналитического задания функции. Для заданной функции это точки $x_1=0$ и $x_2=1$.

Для точки $x_1=0$ имеем:

$$f(0)=(x+1)\big|_{x=0}=0+1=1,\ \lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(x+1)=(-0+1)=1,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Так как, предел функции справа в точке $x_1=0$ “бесконечен”, то точка $x_1=0$ является точкой разрыва второго рода.

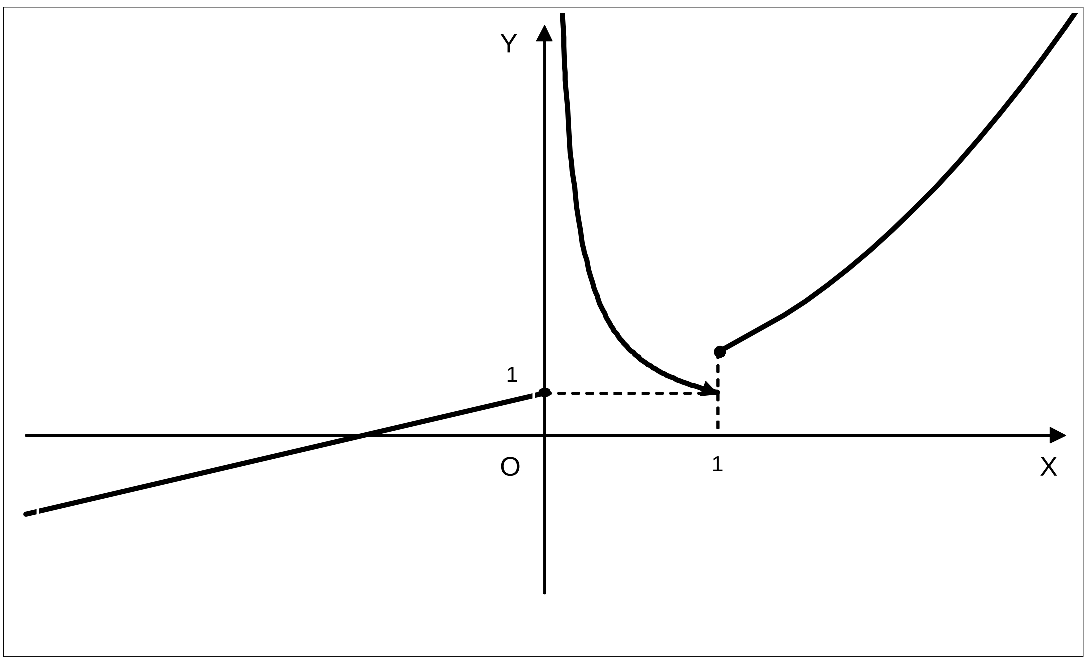
Для точки $x_2=1$ имеем:

$$f(1)=\left(x^2+1\right)\big|_{x=1}=1+1=2,\ \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{1}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x^2+1)=(1+1)=2.$$

Так как, $f(1)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то точка $x_2=1$ является точкой разрыва первого рода.

Выполним схематический чертеж графика функции.



ПРИМЕР 13. Заданы два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ и $z_2 = 1 - i$, которые записаны в алгебраической форме записи. Требуется:

а) найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot \overline{z}_2$, $\dfrac{\overline{z}_1}{z_2}$, z_1^3;

б) записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить указанные операции: $\overline{z}_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{\overline{z}_2}$, z_2^4, $\sqrt[5]{z_1}$;

в) найти все корни уравнения $z^4 + z^3 + i \cdot z + i = 0$, записав их в показательной форме.

Решение.

а) $z_3 = z_1 + z_2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i\right) + (1 - i) = \left(\sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot i$.

Число $\overline{z}_2 = 1 + i$ является сопряженным с числом z_2. Тогда

$$z_4 = z_1 \cdot \overline{z}_2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i\right) \cdot (1 + i) = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i + \sqrt{2} \cdot i + \sqrt{2} \cdot i^2 =$$
$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i + \sqrt{2} \cdot (-1) = 2\sqrt{2} \cdot i.$$

Число $\overline{z}_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$ является сопряженным с числом z_1. Тогда

$$z_5 = \frac{\overline{z}_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i}{1 - i} = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i\right) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i - \sqrt{2} \cdot i - \sqrt{2} \cdot i^2}{1 - i^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot (-1)}{1 - (-1)} = \sqrt{2}$$

$$z_6 = z_1^3 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i\right)^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \cdot i + 6\sqrt{2} \cdot i^2 + 2\sqrt{2} \cdot i^3 =$$
$$= 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \cdot i - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot i.$$

б) Произвольное число $z = x + i \cdot y$ в тригонометрической форме имеет вид:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, а аргумент φ определяется из равенств $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, причем $0 \le \varphi < 2\pi$.

Запишем числа $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ и $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Для числа $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$.

$r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2,$

$\cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},$ т. е. $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

$z_1 = 2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ - запись числа z_1 в тригонометрической форме.

Для числа $z_2 = 1 - i$.

$r_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$

$\cos\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ т. е. $\varphi_2 = \dfrac{7\pi}{4}$.

$z_2 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ - запись числа z_2 в тригонометрической форме.

Для выполнения над числами z_1 и z_2 указанных операций, необходимо представить сопряженные им числа в тригонометрической форме записи.

Для числа $\overline{z_1} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot i$. $\overline{r_1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2,$

$\cos\overline{\varphi_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\overline{\varphi_1} = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ т. е. $\varphi_1 = \dfrac{7\pi}{4}$.

$\overline{z_1} = 2\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ - запись числа $\overline{z_1}$ в тригонометрической форме.

Для числа $\overline{z_2} = 1 + i$.

$\overline{r_2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\overline{\varphi_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\overline{\varphi_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},$ т. е. $\overline{\varphi_2} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\overline{z_2} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ - запись числа $\overline{z_2}$ в тригонометрической форме.

Выполним над полученными числами указанные в задании операции.

$$\overline{z_1}\cdot z_2 = \overline{r_1}\cdot r_2\cdot\left(\cos\left(\overline{\varphi_1} + \varphi_2\right) + i\cdot\sin\left(\overline{\varphi_1} + \varphi_2\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\cdot i.$$

$$\frac{z_1}{\overline{z_2}} = \frac{r_1}{\overline{r_2}}\cdot\left(\cos\left(\varphi_1 - \overline{\varphi_2}\right) + i\cdot\sin\left(\varphi_1 - \overline{\varphi_2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos 0 + i\cdot\sin 0\right) = \sqrt{2}.$$

$$z_2^4 = r_2^4\cdot\left(\cos\left(4\varphi_2\right) + i\cdot\sin\left(4\varphi_2\right)\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 4\cdot(\cos 7\pi + i\cdot\sin 7\pi) = 4\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = -4.$$

$$\omega_k = \sqrt[5]{z_1} = \sqrt[5]{r_1} \cdot \left(\cos\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{5} + i \cdot \sin\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{5} \right), \text{ где } k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$$

$$k = 0:\ \omega_0 = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{5} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{20} + i \cdot \sin\frac{\pi}{20} \right);$$

$$k = 1:\ \omega_1 = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{5} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{20} + i \cdot \sin\frac{9\pi}{20} \right);$$

$$k = 2:\ \omega_2 = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{5} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{17\pi}{20} + i \cdot \sin\frac{17\pi}{20} \right);$$

$$k = 3:\ \omega_3 = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 3}{5} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 3}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4} \right);$$

$$k = 4:\ \omega_4 = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 4}{5} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 4}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \cdot \left(\cos\frac{33\pi}{20} + i \cdot \sin\frac{33\pi}{20} \right).$$

в) Решим данное уравнение $z^4 + z^3 + i \cdot z + i = 0$. Путем элементарных преобразований приходим к уравнению вида $z^3 \cdot (z+1) + i(z+1) = 0$, а затем и к уравнению:

$$(z+1) \cdot (z^3 + i) = 0.$$

Решением данного уравнения являются комплексные числа:

$$z = -1 = -1 + 0 \cdot i \text{ или } z = \sqrt[3]{(-i)}.$$

Запишем решения уравнения в показательной форме, причем, во втором случае, проведем извлечение корня третьей степени из комплексного числа.

Произвольное число $z = x + i \cdot y$ в показательной форме имеет вид: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, а аргумент φ определяется из равенств $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, причем $0 \le \varphi < 2\pi$.

Число $z = -1 + 0 \cdot i$, где $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2}} = -1$,

$\sin\varphi = \dfrac{0}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2}} = 0$, т. е. $\varphi = \pi$.

Тогда число $z = -1$, в показательной форме имеет вид $z = 1 \cdot e^{\pi \cdot i}$.

Число $-i = 0 + (-1) \cdot i$,

$r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$, $\cos\varphi=\dfrac{0}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}=0,\;\; \sin\varphi=\dfrac{-1}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}=-1,\;\; \varphi=\dfrac{3\pi}{2}$, тогда $z=1\cdot e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i}$ - число $(-i)$, записанное в показательной форме.

Определим, корень третьей степени из комплексного числа $z=1\cdot e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i}$ по формуле:

$\omega_k=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{3}\cdot i}$, где $k=0;\ 1;\ 2.$

$k=0$: $\omega_0=\sqrt[3]{1}\cdot e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}\cdot i}=e^{\frac{\pi}{2}i}$; $k=1$: $\omega_1=\sqrt[3]{1}\cdot e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{3}\cdot i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}$;

$k=2$: $\omega=\sqrt[3]{1}\cdot e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot 2}{3}\cdot i}=e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

Таким образом, решением данного уравнения являются числа: $e^{\pi\cdot i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $e^{\frac{11\pi}{6}i}$, которые записаны в показательной форме.

ТЕМА 4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

Пример 14. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ заданных функций.

а) $y=\sqrt[5]{\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}+\lg e^{\pi}$; б) $y=\dfrac{\sin^2\sqrt{2x}}{\ln\sqrt{2x}}$;

в) $y=\sqrt[5]{\arcsin 5x}\cdot\cos 6x+\log_2\sqrt{\pi}$; г) $y=(\text{ctg}\ 9x)^{\cos 9x}$;

д) $\ln x^5+\cos y^3-\arccos(x^4\cdot y^2)=\ln\dfrac{\pi}{8}$.

Решение.

а) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\left[(u\pm v)'=u'\pm v'\right]=\left(\sqrt[5]{\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}+\lg e^{\pi}\right)'=$

$=\left(\sqrt[5]{\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}\right)'+\left(\lg e^{\pi}\right)'=\left[\left(y(u(x))\right)'=y'_u\cdot u'_x,\ C'=0\ (C=Const)\right]=$

$=\dfrac{1}{5}\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^{\frac{1}{5}-1}\cdot\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)'+0=$

$=\dfrac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^4}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-8^{2\cdot tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}}\right)\cdot\left(8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)'=$

$$=-\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-64^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}}\cdot 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\ln 8\cdot\left(tg(x^2+x\cdot\log_6 7)\right)'=$$

$$=-\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-64^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}}\cdot 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\ln 8\cdot\frac{1}{\cos^2(x^2+x\cdot\log_6 7)}\times$$

$$\times\left(x^2+x\cdot\log_6 7\right)'=\left[(C\cdot u)'=C\cdot u'\right]=-\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-64^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}}\times$$

$$\times 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\ln 8\cdot\frac{1}{\cos^2(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\left(2\cdot x+\log_6 7\right).$$

б) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{\sin^2\sqrt{2x}}{\ln\sqrt{2x}}\right)'=\left[\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}\right]=$

$$=\frac{\left(\sin^2\sqrt{2x}\right)'\cdot\ln\sqrt{2x}-\sin^2\sqrt{2x}\cdot\left(\ln\sqrt{2x}\right)'}{\ln^2\sqrt{2x}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\sqrt{2x}\cdot\cos\sqrt{2x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2\cdot\ln\sqrt{2x}-\sin^2\sqrt{2x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2}{\ln^2\sqrt{2x}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin 2\sqrt{2x}\cdot\ln\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}-\dfrac{\sin^2\sqrt{2x}}{2x}}{\ln^2\sqrt{2x}}=\frac{\sqrt{2x}\cdot\sin 2\sqrt{2x}\cdot\ln\sqrt{2x}-\sin^2\sqrt{2x}}{2x\cdot\ln^2\sqrt{2x}}.$$

в) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\left(\sqrt[5]{\arcsin 5x}\cdot\cos 6x+\log_2\sqrt{\pi}\right)'=\left[(u\pm v)'=u'\pm v'\right]=$

$$=\left(\sqrt[5]{\arcsin 5x}\cdot\cos 6x\right)'+\left(\log_2\sqrt{\pi}\right)'=\begin{bmatrix}(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\\ C'=0,\ \text{где } C=Const\end{bmatrix}=$$

$$=(\sqrt[5]{\arcsin 5x})'\cdot\cos 6x+\sqrt[5]{\arcsin 5x}\cdot(\cos 6x)'+0=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{(\arcsin 5x)^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-25\cdot x^2}}\times$$

$$\times\ 5\cdot\cos 6x+\sqrt[5]{\arcsin 5x}\cdot(-6\cdot\sin 6x)=\frac{\cos 6x-\arcsin 5x\cdot\sin 6x\cdot\sqrt{1-25\cdot x^2}}{5\cdot\sqrt{1-25\cdot x^2}\cdot\sqrt[5]{(\arcsin 5x)^4}}.$$

г) $y=\left(\mathrm{ctg}9x\right)^{\cos 9x}$.

Прологарифмируем обе части данного выражения:

$$\ln y=\ln\left(\mathrm{ctg}9x\right)^{\cos 9x},$$

и, используя свойства логарифма, получаем

$$\ln y = \cos 9x \cdot \ln(\operatorname{ctg} 9x).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства, воспользовавшись формулой производной сложной функции и формулой дифференцирования произведения функций.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos 9x)' \cdot \ln(\operatorname{ctg} 9x) + \cos 9x \cdot \left(\ln(\operatorname{ctg} 9x)\right)' = -9 \cdot \sin 9x \cdot \ln(\operatorname{ctg} 9x) +$$

$$+\cos 9x \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} 9x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 9x}\right) \cdot 9 = -9 \cdot \frac{\sin^2 9x \cdot \ln(\operatorname{ctg} 9x) + 1}{\sin 9x}.$$

Умножая обе части на переменную y, которая определяет функцию $y = (\operatorname{ctg} 9x)^{\cos 9x}$, находим производную заданной функции:

$$y' = -9 \cdot (\operatorname{ctg} 9x)^{\cos 9x} \cdot \frac{\sin^2 9x \cdot \ln(\operatorname{ctg} 9x) + 1}{\sin 9x}.$$

д) $\ln x^5 + \cos y^3 - \arccos(x^4 \cdot y^2) = \ln \frac{\pi}{8}.$

Данная функция заданна $y = f(x)$ в неявном виде. Для определения её производной дифференцируем левую и правую часть равенства по переменной *x*, считая $y = f(x)$, как функцию независимой перемеренной *x*.

$$\left(\ln x^5 + \cos y^3 - \arccos(x^4 \cdot y^2)\right)' = \left(\ln \frac{\pi}{8}\right)'$$

$$\left(\ln x^5\right)' + \left(\cos y^3\right)' - \left(\arccos(x^4 \cdot y^2)\right)' = 0$$

$$\frac{1}{x^5} \cdot 5 \cdot x^4 - \sin y^3 \cdot 3y^2 \cdot y' + \frac{1}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} \cdot \left(4 \cdot x^3 \cdot y^2 + 2 \cdot x^4 \cdot y \cdot y'\right) = 0$$

$$\frac{5}{x} - 3 \cdot y^2 \cdot \sin y^3 \cdot y' + \frac{4 \cdot x^3 \cdot y^2}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} + \frac{2 \cdot x^4 \cdot y \cdot y'}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} = 0$$

$$\left(\frac{2 \cdot x^4 \cdot y}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} - 3 \cdot y^2 \cdot \sin y^3\right) \cdot y' = -\frac{4 \cdot x^3 \cdot y^2}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} - \frac{5}{x}$$

$$\frac{\left(2 \cdot x^4 \cdot y - 3 \cdot y^2 \cdot \sin y^3 \cdot \sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}\right) \cdot y'}{\sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}} = \frac{-\left(4 \cdot x^4 \cdot y^2 + 5 \cdot \sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}\right)}{x \cdot \sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}}$$

$$y' = \frac{\left(4 \cdot x^4 \cdot y^2 + 5 \cdot \sqrt{1 - x^8 \cdot y^4}\right)}{\left(3 \cdot y^2 \cdot x \cdot \sin y^3 \cdot \sqrt{1 - x^8 \cdot y^4} - 2 \cdot x^5 \cdot y\right)}$$

Ответ: а) $-\dfrac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\arccos 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\right)^4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-64^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}}}\cdot 8^{tg(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\ln 8\times$

$\times\dfrac{1}{\cos^2(x^2+x\cdot\log_6 7)}\cdot\left(2\cdot x+\log_6 7\right);$

б) $\dfrac{\sqrt{2x}\cdot\sin 2\sqrt{2x}\cdot\ln\sqrt{2x}-\sin^2\sqrt{2x}}{2x\cdot\ln^2\sqrt{2x}};$

в) $\dfrac{\cos 6x-\arcsin 5x\cdot\sin 6x\cdot\sqrt{1-25\cdot x^2}}{5\cdot\sqrt{1-25\cdot x^2}\cdot\sqrt[5]{(\arcsin 5x)^4}};$

г) $-9\cdot\left(\mathrm{ctg}9x\right)^{\cos 9x}\cdot\dfrac{\sin^2 9x\cdot\ln\left(\mathrm{ctg}9x\right)+1}{\sin 9x}.$

д) $y'=\dfrac{\left(4\cdot x^4\cdot y^2+5\cdot\sqrt{1-x^8\cdot y^4}\right)}{\left(3\cdot y^2\cdot x\cdot\sin y^3\cdot\sqrt{1-x^8\cdot y^4}-2\cdot x^5\cdot y\right)}.$

15. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: а) $y=x^2\cdot\arcsin x$, вычислить их значения в точке $x_0=0$; б) $\begin{cases}y=\sin^4 2t\\ x=-\cos^4 2t\end{cases}.$

Решение. а) Найдем первую производную функции $y=x^2\cdot\arcsin x$ и вычислим её значение в точке $x_0=0$.

$$y'=\frac{dy}{dx}=(x^2\cdot\arcsin x)'=(x^2)'\cdot\arcsin x+x^2\cdot(\arcsin x)'=2\cdot x\cdot\arcsin x+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y'(0)=\frac{dy(0)}{dx}=2\cdot 0\cdot\arcsin 0+\frac{0^2}{\sqrt{1-0^2}}=0.$$

Найдем вторую производную функции $y=x^2\cdot\arcsin x$ и вычислим её значение в точке $x_0=0$.

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(2\cdot x\cdot\arcsin x+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=(2\cdot x\cdot\arcsin x)'+\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=$$

$$=2\cdot(x'\cdot\arcsin x+x\cdot(\arcsin x)')+\frac{(x^2)'\cdot\sqrt{1-x^2}-x^2\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}=$$

$$= 2\cdot\arcsin x+\frac{2\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=2\cdot\arcsin x+\frac{2\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\cdot x\cdot(1-x^2)+x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=$$

$$=\frac{2\cdot\arcsin x\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}+2x\cdot(1-x^2)+x\cdot(2-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{2\cdot\arcsin x\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}+x\cdot(4-3\cdot x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$y''(0)=\frac{d^2y(0)}{dx^2}=\frac{2\cdot\arcsin 0\cdot\sqrt{(1-0^2)^3}+0\cdot(4-3\cdot 0^2)}{\sqrt{(1-0^2)^3}}=0.$$

б) Найдем первую и вторую производные функции $\begin{cases} y=\sin^4 2t \\ x=-\cos^4 2t \end{cases}$, заданной параметрически, по формулам:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \text{ и } y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Находим производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t.

$$x'_t=\frac{dx}{dt}=(-\cos^4 2t)'_t=8\cdot\cos^3 2t\cdot\sin 2t$$

$$y'_t=\frac{dy}{dt}=(\sin^4 2t)'_t=8\cdot\sin^3 2t\cdot\cos 2t.$$

Следовательно, первая и вторая производные равны:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{8\cdot\sin^3 2t\cdot\cos 2t}{8\cdot\cos^3 2t\cdot\sin 2t}=\operatorname{tg}^2 2t,$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(\operatorname{tg}^2 2t)'_t}{(-\cos^4 2t)'_t}=\frac{4\cdot\operatorname{tg}2t\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2t}}{8\cdot\cos^3 2t\cdot\sin 2t}=\frac{1}{2\cdot\cos^6 2t}.$$

Ответ: а) $y'=2\cdot x\cdot\arcsin x+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'(0)=0$;

$y''=\dfrac{2\cdot\arcsin x\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}+x\cdot(4-3\cdot x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; $y''(0)=0$; б) $y'_x=\operatorname{tg}^2 2t$, $y''_{xx}=\dfrac{1}{2\cdot\cos^6 2t}$.

16. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$, используя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\left(\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}\right)=(1^{\infty})$. Таким образом, имеем неопределенность вида (1^{∞}). Правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, применяется при раскрытии неопределенностей, $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Приведем полученную неопределенность (1^{∞}) к одной из указанных неопределенностей. Введем обозначение $Y=\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ и прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln Y=\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right).\text{ Тогда}$$

$$\lim_{x\to 1}\ln Y=\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\text{используем правило Лопиталя}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)\right)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1\Big/\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\left(-1\Big/\sin^2\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}}{\left(-1\Big/\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2\cdot\sin\frac{\pi x}{4}\cdot\cos\frac{\pi x}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}\ln Y=1$ и в силу непрерывности логарифмической функции $\ln\lim\limits_{x\to 1}Y=1$, $\lim\limits_{x\to 1}Y=e^1=e$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=e$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=e$.

17. Используя понятие дифференциала функции, вычислить приближенное значение $\cos 58^0$. Оценить допущенную относительную погрешность вычисления, с абсолютной погрешностью аргумента $\varepsilon_x = 0,001$.

Решение. Так как дифференциал функции отличается от ее приращения на бесконечно малую величину высшего порядка по сравнению с dx, то $\Delta y \approx dx$, или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. По условию задачи необходимо вычислить значение этой функции в точке $x = 58^0$. Выберем $x_0 = 60^0 = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда приращение аргумента: $\Delta x = x - x_0 = 58^0 - 60^0 = -2^0 = -2^0 \cdot \dfrac{\pi}{180^0} \approx -0,035$ радиан. Найдем производную функции и определим ее значение в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$:

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866.$$

Вычислим приближенное значение $\cos 58^0$:

$$\cos 58^0 \approx \cos\frac{\pi}{3} + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot (-0,035) = 0,5 + 0,866 \cdot 0,035 \approx 0,530.$$

Определим относительную погрешность δ_y, которая выражается формулой:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \cdot \varepsilon_x = \left|\left(\ln f(x_0)\right)'\right| \cdot \varepsilon_x,$$

где ε_x - абсолютная погрешность аргумента, а ε_y - абсолютная погрешность функции. В данной задаче абсолютная погрешность аргумента $\varepsilon_x = 0,001$, тогда абсолютная погрешность функции $\varepsilon_y = |f'(x_0)| \cdot \varepsilon_x = |-0,866| \cdot 0,001 = 0,000866$.

Следовательно, относительную погрешность $\delta_y = \dfrac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \dfrac{0,000866}{0,5} = 0,001732$ или $0,1732\%$.

Ответ. $0,53$; $0,1732\%$.

18. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(1;1)$ и $B(2;3)$, и касательной к графику функции $y = x^2 + 1$, которая перпендикулярна прямой $x + 4y - 4 = 0$.

Решение. Найдем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой проходящей через две точки A и B: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$. Подставляя координаты точек A и B в данное уравнение, находим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2} \text{ или } 2x-y-1=0.$$

Найдем уравнение касательной к графику функции $y=x^2+1$, которая перпендикулярна прямой $x+4y-4=0$. Уравнение касательной:
$y-y(x_0)=y'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Так как, касательная перпендикулярна прямой, то их угловые коэффициенты удовлетворяют соотношению: $k_{\text{кас}}\cdot k_{\text{пр}}=-1$. Угловой коэффициент прямой $x+4y-4=0$ или $y=-\dfrac{1}{4}x+1$ равен $k_{\text{пр}}=-\dfrac{1}{4}$, а угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}}=y'(x_0)=2x\big|_{x=x_0}=2x_0$. Тогда, $2x_0\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-1$. Откуда,

$$x_0=2,\ y_0=y(x_0)=y(2)=\left(x^2+1\right)\big|_{x=2}=5,\ k_{\text{кас}}=y'(2)=2x\big|_{x=2}=4.$$

Запишем уравнение касательной:

$$y-5=4\cdot(x-2) \text{ или } 4x-y-3=0.$$

Найдем угол φ между прямой AB и касательной, который равен углу между нормальными векторами $\vec{n}_{AB}(2;-1)$ и $\vec{n}_{\text{кас}}(4;-1)$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_{AB}\cdot\vec{n}_{\text{кас}}}{\left|\vec{n}_{AB}\right|\cdot\left|\vec{n}_{\text{кас}}\right|}=\frac{2\cdot4+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{85}}=\frac{9\cdot\sqrt{85}}{85},$$

$$\varphi=\arccos\frac{9\cdot\sqrt{85}}{85}.$$

Ответ. $\arccos\dfrac{9\cdot\sqrt{85}}{85}$.

ТЕМА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ.

19. Найти наименьшее и наибольшее значение функции
$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x}$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение. Функция $y=f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке, либо в критических точках, которые принадлежат данному отрезку, либо на концах отрезка. Определим критические точки, для чего находим производную функции и выясняем, где она равна нулю или не существует.

$$f(x)=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x}\right)'=\frac{x^2-6x+5}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right)^2}}.$$

$f'(x)=0$, $x^2-6x+5=0$, $x=1\in[-1;2]$, $x=5\notin[-1;2]$.

Производная функции $f'(x)$ - не существует, если $\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x=0$. Решая полученное уравнение, находим значения переменной: $x=0\in[-1;2]$ или $x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{2}\notin[-1;2]$. Таким образом, вычисляем значения функции в точках: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.

$f(-1)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)}=-\sqrt[3]{\frac{25}{3}}$;

$f(0)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\cdot 0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0}=0$;

$f(1)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1}=\sqrt[3]{\frac{7}{3}}$;

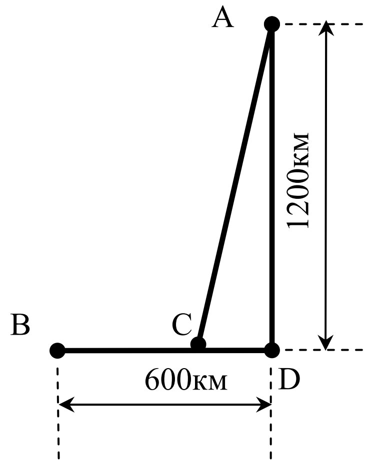
$f(2)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\cdot 2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Среди полученных значений выбираем наибольшее $\max\limits_{[-1;2]}f(x)$ и наименьшее $\min\limits_{[-1;2]}f(x)$ значения функции:

$$\max_{[-1;2]}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{\frac{7}{3}};\ \min_{[-1;2]}f(x)=f(-1)=-\sqrt[3]{\frac{25}{3}}.$$

Ответ. $\max\limits_{[-1;2]}f(x)=\sqrt[3]{\frac{7}{3}}$; $\min\limits_{[-1;2]}f(x)=-\sqrt[3]{\frac{25}{3}}$.

20. Предприятие города A, для доставки своей продукции в город D строит автомобильную дорогу AC, которая соединяет его с железной дорогой BD (см. рисунок). К какому пункту C, относительно города B, необходимо подвести автомобильную дорогу, чтобы при перевозке своей продукции из города A в город D предприятие имело бы наименьшее количество затрат. При этом известно, что стоимость автомобильных перевозок груза на 1 км равна 13 у. е., а стоимость перевозок груза по железной дороге 5 у. е.



Решение. Пусть S - стоимость перевозки продукции из города A в город B. Тогда $S_1 = 5x$ - стоимость перевозки груза по железной дороге на участке BC, длина которого равна x, а, стоимость перевозки продукции, по автомобильной дороге, равна

$$S_2 = 13 \cdot |AC| = 13\sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = 13\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}\ .$$

Следовательно, общая стоимость перевозки продукции из города A в город B будет определяться по формуле:

$$S = S_1 + S_2 = 5x + 13\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}\ .$$

Так как, стоимость должна быть наименьшей, то исследуем полученную функцию на экстремум, то есть, определим точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$S' = \left(5x + 13\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}\right)' = (5x)' + \left(13\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}\right)' =$$

$$= 5 - \frac{13 \cdot (600-x)}{\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600-x)^2} - 13 \cdot (600-x)}{\sqrt{1200^2 + (600-x)^2}}.$$

$$S' = 0;\ 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600-x)^2} - 13 \cdot (600-x) = 0\ .$$

$$5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600-x)^2} = 13 \cdot (600-x)$$

Решаем полученное иррациональное уравнение.

$$\begin{cases} 600 - x \geq 0, \\ 25 \cdot (1200^2 + (600-x)^2) = 169 \cdot (600-x)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ 144 \cdot x^2 - 172800 \cdot x + 15840000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ x = 100 \vee x = 1100, \end{cases} \quad x = 100 \text{ км.}$$

Производная стоимости S' - не существует, если $\sqrt{1200^2+(600-x)^2}=0$, но такого значения x нет, так как сумма квадратов положительных чисел не может равняться нулю.

Таким образом, при расстоянии $x_0=100$ км. стоимость перевозки продукции из города A в город B достигает своего экстремально значения, но при этом, затраты на перевозку продукции, которую изготавливает предприятие, может быть как наибольшей, так и наименьшей. Воспользуемся достаточным признаком экстремума: если $S''(x_0)<0$, то при расстоянии $x=x_0$ стоимость является максимальной, а при значении $f''(x_0)>0$ - минимальной. Найдем вторую производную функции, которая является стоимостью перевозки продукции из города A в город B, и определим её значение при перевозке груза, по железной дороге, на расстояние $x=100$ км.

$$S''=\left(5-\frac{13\cdot(600-x)}{\sqrt{1200^2+(600-x)^2}}\right)'=$$

$$=5'-\frac{\left(13\cdot(600-x)\right)'\cdot\sqrt{1200^2+(600-x)^2}-13\cdot(600-x)\cdot\left(\sqrt{1200^2+(600-x)^2}\right)'}{1200^2+(600-x)^2}=$$

$$=-\frac{-13\cdot\sqrt{1200^2+(600-x)^2}+\dfrac{13\cdot(600-x)^2}{\sqrt{1200^2+(600-x)^2}}}{1200^2+(600-x)^2}=\frac{18720000}{\sqrt{\left(1200^2+(600-x)^2\right)^3}}.$$

$$S''(500)=\left.\left(\frac{18720000}{\sqrt{\left(1200^2+(600-x)^2\right)^3}}\right)\right|_{x=100}=\frac{18720000}{\sqrt{\left(1200^2+(600-100)^2\right)^3}}=144000>0.$$

Так как, вторая производна $S''(100)>0$, то, используя достаточный признак экстремума, при расстоянии $x=100$ км. предприятие будет иметь наименьшее количество затрат.

Ответ. 100 км.

21. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1). Так как, в точке $x=1$ значение функции не существует, то областью определения функции является множество $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Определим точки разрыва функции и асимптоты графика. Так как, в точке $x=1$ функция неопределена, то данная точка является точкой разрыва. Исследуем функцию в окрестности данной точки:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, а, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y=k\cdot x+b$ графика функции.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1-0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2}{x-1}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x\cdot(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Таким образом, наклонной асимптотой графика функции является прямая $y=x+1$.

3) Область определения функции не является симметричным множеством относительно начала координат, из определения четности и нечетности функции, исходная функция не является четной и не является нечетной.

4) Исследуемая функция является дробно-рациональной, а, следовательно, непериодическая.

5) Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную функции.

$$y'=\frac{(x^2)'\cdot(x-1)-x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2\cdot x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Экстремального значения функция может достигать в критических точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в которых производная равна нулю или не существует. Находим критические точки. Производная функции $y'=0$, если $x\cdot(x-2)=0$, то есть $x=0\in D(y)$ или $x=2\in D(y)$. Производная функции y' - не существует, если $x=1\notin D(y)$. Знаки y' найдем, решая методом интервалов неравенство $\frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}>0$ (или <0). Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-	Не существует	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	Не существует	$\searrow$	4	$\nearrow$

По необходимому и достаточному признаку монотонности, функция возрастает если $y' \geq 0$ и убывает, если $y' \leq 0$. Следовательно, исследуемая функция возрастает на промежутках $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$ а, убывает на промежутках $[0;1)$ и $(1;2]$. По достаточному признаку экстремума, если производная в критической точке меняет свой знак с отрицательного на положительный, то данная точка является точкой локального минимума, если же знак, в данной точке, меняется с положительного на отрицательный, то в этой точке функция достигает локального максимума.

$$y_{\min} = y(2) = 4,$$
$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

6) Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Определим точки перегиба, если они существуют. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \frac{(x^2-2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot \left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(2 \cdot x - 2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Не существует значения переменной, при которой вторая производная функции равна нулю. Вторая производная функции y'' - не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	-	Не существует	+
y	$\frown$	Не существует	$\smile$

Согласно достаточного признака выпуклости (вогнутости), функция является выпуклой, если $y'' < 0$, и вогнутой, если $y'' > 0$. Следовательно, исследуемая функция выпуклая на промежутке $(-\infty;1)$ и вогнутая на промежутке $(1;+\infty)$. По достаточному признаку точек перегиба, если вторая производная в точке равна нулю или не существует и при переходе через эту точку из области определения функции, вторая производная меняет свой знак, то данная точка является точкой перегиба. Исходная функция не имеет точек перегиба.

7) Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

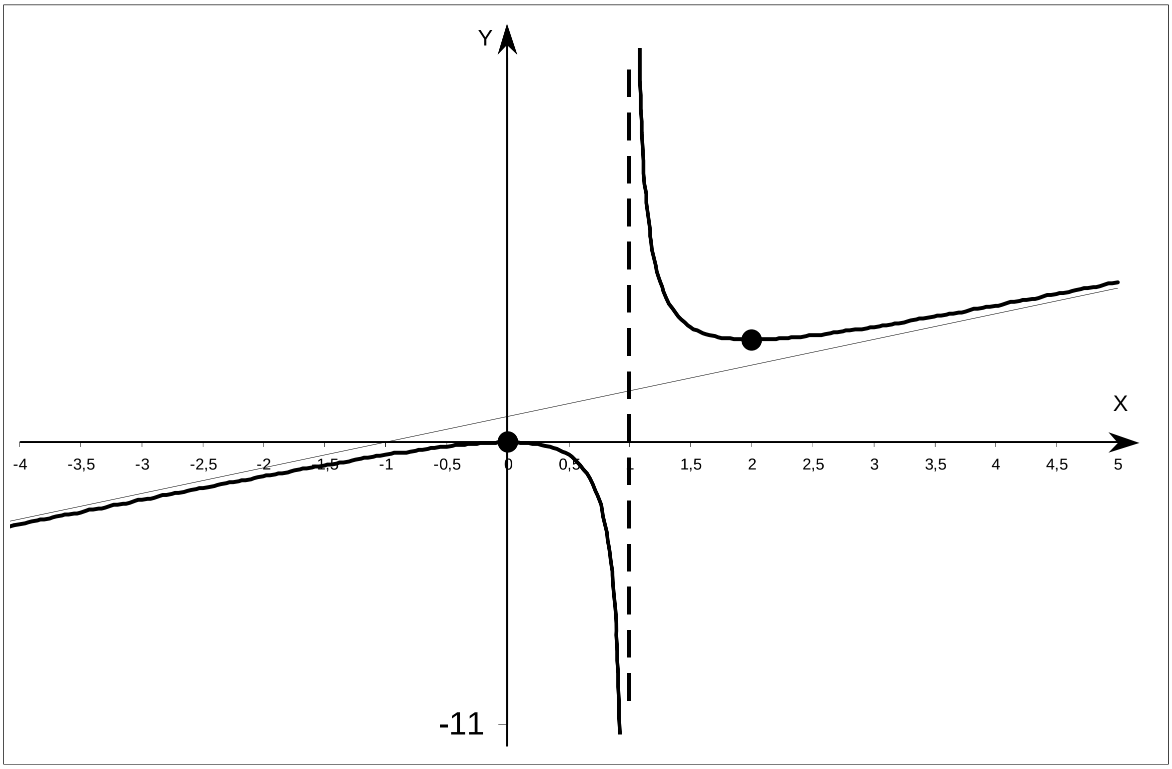
Если $x = 0$, то $y = 0$. Аналогично, значение функции равно нулю, если $x = 0$. Таким образом, функция имеет единственную точку пересечения с осями координат: $O(0;0)$.

8) Определим интервалы знакопостоянства функции.

Функция принимает положительные значения, если $\frac{x^2}{x-1} > 0$, т. е. $x \in (1;+\infty)$.

Функция принимает отрицательные значения, если $\frac{x^2}{x-1} < 0$, т. е. $x \in (-\infty;0) \cup \left(0;1\right)$.

9) По результатам проведенных исследований строим график функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1-10. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) каноническое уравнение прямой AB, параметрическое уравнение прямой AC, нормальное уравнение прямой BC; 2) общее уравнение прямой перпендикулярной стороне AB и проходящей через точку С; 3) вычислить длину высоты треугольника, опущенной из вершины C на сторону AB; 4) угол между высотой CD и медианой BM; 5) площадь треугольника ABC, используя понятие определителя. Сделать чертёж.

1. $A(5;2),\ B(4;5),\ C(7;4)$.

2. $A(2;1),\ B(3;7),\ C(4;6)$.

3. $A(3;2),\ B(4;8),\ C(9;10)$. 4. $A(-2;0),\ B(2;7),\ C(1;5)$.
5. $A(1;1),\ B(8;4),\ C(5;3)$. 6. $A(3;1),\ B(10;4),\ C(8;9)$.
7. $A(1;2),\ B(9;6),\ C(5;8)$. 8. $A(0;2),\ B(8;2),\ C(3;7)$.
9. $A(4;-1),\ B(4;3),\ C(5;4)$. 10. $A(2;3),\ B(7;2),\ C(3;6)$.

11-20. Даны координаты вершин треугольной призмы $ABCDEK$. Доказать, что вектора $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AK}$ образуют базис и определить координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в этом базисе. Найти: 1) объём призмы; 2) площадь грани ABC; 3) координаты точки, которая симметрична точке пересечения медиан треугольника ABC, относительно плоскости DEK; 4) угол между прямой AK и плоскостью DEK; 5) угол между прямой AB и прямой AC (указать уравнения прямой AB и прямой AC; 6) работу равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC},\ \vec{F}_3 = \overrightarrow{AK}$, приложенных к материальной точке, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки A в точку D. Сделать чертеж.

11. $A(3;5;2),\ B(4;3;5),\ C(7;12;4),\ D(13;16;6),\ E(10;7;7),\ K(9;9;4)$.
12. $A(2;1;4),\ B(3;3;7),\ C(1;4;6),\ D(8;1;11),\ E(10;0;12),\ K(9;-2;9)$.
13. $A(3;2;5),\ B(4;6;8),\ C(9;10;10),\ D(12;11;14),\ E(7;7;12),\ K(6;3;9)$.
14. $A(-2;0;2),\ B(2;7;10),\ C(7;1;5),\ D(9;-3;6),\ E(4;3;11),\ K(0;-4;3)$.
15. $A(1;1;1),\ B(2;8;4),\ C(4;5;3),\ D(8;13;8),\ E(6;16;9),\ K(5;9;6)$.
16. $A(5;3;1),\ B(7;10;4),\ C(8;4;9),\ D(10;-3;13),\ E(9;3;8),\ K(7;-4;5)$.
17. $A(1;2;3),\ B(9;4;6),\ C(5;8;13),\ D(8;6;14),\ E(12;2;7),\ K(4;0;4)$.
18. $A(1;0;2),\ B(8;2;3),\ C(5;3;7),\ D(8;7;5),\ E(11;6;1),\ K(4;4;0)$.
19. $A(4;-1;2),\ B(14;2;3),\ C(5;3;4),\ D(8;12;6),\ E(17;11;5),\ K(7;8;4)$.
20. $A(2;3;1),\ B(4;7;2),\ C(3;6;7),\ D(8;9;8),\ E(9;10;3),\ K(7;6;2)$.

21-30. Построить по точкам кривую, которая заданна уравнением в полярной системе координат, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая углу φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{8}$. Записать уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат, полагая, что начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная ось абсцисс – с полярной осью. Определить какая это линия.

21. $\rho = 4\sin\varphi$. 22. $\rho = 1-\sin\varphi$. 23. $\rho = 6\cos\varphi$. 24. $\rho = \sin 3\varphi$.
25. $\rho = 4\cos 3\varphi$. 26. $\rho = 1-\cos\varphi$. 27. $\rho = \varphi$. 28. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.
29. $\rho = -2\cos\varphi$ 30. $\rho = -4\sin\varphi$.

31-40. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы. В условиях задач: F - фокус, a - большая (действительная) полуось,

b - малая (мнимая) полуось, ε - эксцентриситет, D - директриса, $2c$ - фокусное расстояние, $y = \pm kx$ - уравнение асимптот гиперболы, A и B - точки, которые лежат на кривой.

31. а) $b = 4$, $F(9;0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

32. а) $\varepsilon = \frac{7}{8}$, $A(8;0)$; в) $D: y = 4$.

33. б) $k = \frac{12}{13}$, $2a = 26$; в) ось симметрии Ox и $A(27;9)$.

34. а) $a = 6$, $F(-4;0)$; б) $b = 3$, $F(7;0)$.

35. а) $b = 7$, $F(5;0)$; в) $D: x = 10$.

36. б) $k = \frac{1}{3}, 2a = 6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9;6)$.

37. а) $a = 11$, $\varepsilon = \frac{10}{11}$; б) $k = \frac{1}{3}$, $a = 3$.

38. а) $a = 9$, $F(7;0)$; б) $a = 9$, $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

39. а) $b = 7$, $F(13;0)$; в) $D: y = 4$.

40. а) $a = 25$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; б) $A(\sqrt{6};0)$, $B(-\sqrt{8};1)$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

41-50. Доказать совместность системы линейных уравнений, используя теорему Кронекера - Капелли. Решить её двумя способами: 1) методом Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

41. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 15. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -17. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

51-60. Исследовать на совместность систему линейных уравнений и решить её методом Гаусса.

51. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 3, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -5. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -1, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$

61-70. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений:

61. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3+3x_4=0, \\ -7x_1-7x_2+2x_3+5x_4=0. \end{cases}$

62. $\begin{cases} 3x_1+12x_2-2x_3+4x_4=0, \\ x_1+4x_2-5x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-11x_3+10x_4=0. \end{cases}$

63. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-2x_2+x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+3x_4=0. \end{cases}$

64. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_4=0, \\ -x_1+6x_2-6x_3-8x_4=0. \end{cases}$

65. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 5x_1-2x_2-5x_3-2x_4=0. \end{cases}$

66. $\begin{cases} -2x_2+x_3-7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-x_2+3x_4=0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ -x_2+5x_3-5x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

68. $\begin{cases} 3x_1-x_3+x_4=0, \\ -x_1-2x_2-5x_3-7x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3+4x_4=0. \end{cases}$

69. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

70. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1+8x_2+7x_3-8x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3-6x_4=0. \end{cases}$

71-80. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

71. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

72. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

73. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

74. $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

75. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

76. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

77. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.   78. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.   79. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

80. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

81-90. Найти предел числовой последовательности.

81. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$.

82. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$.

83. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

84. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

85. $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\ldots+\dfrac{n}{n^3}\right)$.

86. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

87. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{5^n}}$.

88. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

89. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$.

90. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+5+25+\ldots+5^{n-1}}{1-25^n}$.

91-100. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{3x^3+2x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3+x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot(\ln(2x-1)-\ln(2x+3)))$.

92. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x+1}{8x^4+2x^3+7}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2+2x-16}{3x^3-x^2-3x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x^2-2x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((3x-4)\cdot(\ln(x+1)-\ln(x-4)))$.

93. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+9}{x^2-4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^3-5x^2-9}{x^3-x^2+x-21}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x^3-15}-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((4x+1)\cdot(\ln(2x-1)-\ln(2x+3)))$.

94. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2+13}{7x^4-3x^3-9}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{3x^3+x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\mathrm{tg}x}{\sin^3 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((6x-1)\cdot(\ln(4x+9)-\ln(4x+3)))$.

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+8x^3+11}{2x^3-6x^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3-4x^2+32}{x^3+3x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+5}-1}{x^2+4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((5x-7)\cdot(\ln(6x-3)-\ln(6x+9)))$.

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8x+9}{5x^3+7x^2+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^3-3x-2}{3x^3+x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{2x^2-3x-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((4x+1)\cdot(\ln(5x-2)-\ln(5x+4)))$.

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+3}{5x^3+3x^2-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^3+7x^2-9}{x^3+x+30}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\mathrm{tg}x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$.

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-8x^2+x}{x^3-2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{x^3+2x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\left((1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}((3x-7)\cdot(\ln(5x-1)-\ln(5x+3)))$.

99. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+13}{6x^4+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-5x^2+4}{4x^3+x^2-36}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x^2+2x-35}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x\cdot\mathrm{tg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})}{2x}$.

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+15}{2x^3-2x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-4x^2-25}{2x^3-8x^2-50}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{2x^2-7x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\arcsin3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\cdot(\ln(x^2-1)-\ln(x^2+3)))$.

101-110. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. Установить точки разрыва. Сделать схематический чертёж графика исходной функции.

101. $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}+\dfrac{x-4}{x-4}$.

102. $f(x)=3^{\frac{1}{4+x}}+\dfrac{2x-2}{x-1}$.

103. $f(x)=4^{\frac{1}{x}}-\dfrac{x-3}{x-3}$.

104. $f(x)=5^{\frac{1}{2+x}}-\dfrac{2x-10}{x-5}$.

105. $f(x)=6^{\frac{1}{1-x}}+\dfrac{2x-8}{x-4}$.

106. $f(x)=7^{\frac{1}{1+x}}+\dfrac{x-6}{x-6}$.

107. $f(x)=8^{\frac{1}{3+x}}+\dfrac{2x-4}{x-2}$.

108. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}-\dfrac{3x+3}{x+1}$.

109. $f(x)=10^{\frac{1}{4-x}}-\dfrac{4x-20}{x-5}$.

110. $f(x)=11^{\frac{1}{5-x}}+\dfrac{5x}{x}$.

111-120. Определить точки разрыва функции $y=f(x)$, если они существуют. Сделать схематический чертёж.

111. $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x\le0; \\ \mathrm{tg}x, \text{ если } 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{4}, \text{ если } x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

112. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, \text{ если } x<-1; \\ x^2, \text{ если } -1\le x<1; \\ -x, \text{ если } x\ge1. \end{cases}$

113. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ если } x\le 0; \\ \text{ctg}x, \text{ если } 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{2}{\pi}x-1, \text{ если } x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

114. $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, \text{ если } x\le 0; \\ \ln x, \text{ если } 0<x\le 1; \\ x^2+2, \text{ если } x>1. \end{cases}$

115. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x<1; \\ 2x-1, \text{ если } 1\le x<2; \\ x^2, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$

116. $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \text{tg}x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0; \\ x^2+2, \text{ если } x>0. \end{cases}$

117. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{ если } x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ \text{ctg}x, \text{ если } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi; \\ \dfrac{1}{\pi}x+\dfrac{1}{2}, \text{ если } x\ge\pi. \end{cases}$

118. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x\le -1; \\ \ln(-x), \text{ если } -1<x<0; \\ x+1, \text{ если } x\ge 0. \end{cases}$

119. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, \text{ если } x<2; \\ \sin x, \text{ если } 2\le x<\pi; \\ \dfrac{2}{\pi}x+1, \text{ если } x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

120. $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\le 0; \\ \log_2 x, \text{ если } 0<x<1; \\ x^3, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

121-130. Заданы два комплексных числа z_1 и z_2, которые записаны в алгебраической форме записи. Требуется:

а) найти z_1+z_2, $z_1\cdot\overline{z}_2$, $\dfrac{\overline{z}_1}{z_2}$, z_1^3;

б) записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить указанные операции: $\overline{z}_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{\overline{z}_2}$, z_2^3, $\sqrt[4]{z_1}$;

в) найти все корни уравнения $\omega^3+z_1=0$, записав их в показательной форме.

121. $z_1=1-i,\ z_2=1+\sqrt{3}\cdot i$.

122. $z_1=1+i,\ z_2=1+\sqrt{3}\cdot i$.

123. $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ z_2=1-\sqrt{3}\cdot i$.

124. $z_1=1+i,\ z_2=1-\sqrt{3}\cdot i$.

125. $z_1=-1-i,\ z_2=\sqrt{3}-i$.

126. $z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i,\ z_2=1+\sqrt{3}\cdot i$.

127. $z_1=1-i,\ z_2=-\sqrt{3}+i$.

128. $z_1=-1-i,\ z_2=-1+\sqrt{3}\cdot i$.

129. $z_1=1+i,\ z_2=-1-\sqrt{3}\cdot i$.

130. $z_1=-1+i,\ z_2=\sqrt{3}+i$.

4. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ.

131-140. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ заданных функций.

131. а) $y=\dfrac{\sin^3(4^{\arcsin 7x})}{\mathrm{tg}^2(\log_3 2x)}$; б) $y=\sqrt[3]{\cos 9x}\cdot arctg 6x+\ln\pi$;

в) $y=(\sin 2x)^{3x^2-1}$; г) $x^3+y^2-\sin(x^2y^3)=\sin\dfrac{\pi}{3}$.

132. а) $y=\dfrac{\cos^2(\ln(\sin 3x))}{\mathrm{ctg}^3(\arcsin 5x)}$; б) $y=\sqrt[4]{\sin 9x+5x}\cdot \mathrm{arcctg}6x+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}$;

в) $y=(x^2+2x+3)^{\sin 2x}$; г) $2x^4+3y^3-\ln(x^2+y^3)=\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}$.

133. а) $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2(\sin\sqrt{2x})}{\cos^2(\log_3 5x)}$; б) $y=\sqrt[3]{\mathrm{ctg}7x}\cdot \mathrm{arctg}8x+\log_3 e$;

в) $y=(\cos 5x)^{\sin 2x}$; г) $x^2-2y^3-\mathrm{tg}(x^5y^3)=\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

134. а) $y=\dfrac{\ln^5(2^{\sin 9x})}{\mathrm{ctg}^3(\arccos 2x)}$; б) $y=\sqrt[4]{arctg 5x}\cdot\cos 6x+e^{\pi}$;

в) $y=(\ln 3x)^{\cos 2x}$; г) $4x^5+3y^2-\cos(x^4-2y^5)=\ln\dfrac{\pi}{3}$.

135. а) $y=\dfrac{\arccos^3(\log_2\sqrt[4]{x})}{\sin^3(\mathrm{tg}5x)}$; б) $y=\cos\sqrt{x^2+5}\cdot\log_6 7x+2^{\sin 1}$;

в) $y=(\cos 2x)^{\sqrt{\sin 3x}}$; г) $2x^3+5y^2-\mathrm{ctg}(2x^2-3y^3)=\sin\dfrac{\pi}{6}$.

136. а) $y=\dfrac{\arcsin^3(5^{\sin 2x})}{\log_4{}^2(\cos 9x)}$; б) $y=\sqrt[5]{\mathrm{arctg}^3 3x}\cdot 3^{2/3x-2}+\ln\dfrac{\pi}{4}$;

в) $y=(\mathrm{tg}9x)^{\ln 8x}$; г) $5x^4+4y^5-\log_3(x^3y^2)=\pi^e$.

137. а) $y=\dfrac{3^{\arcsin^2(\ln 4x)}}{\cos^2(\mathrm{tg}5x)}$; б) $y=\sqrt[4]{\mathrm{ctg}7x}\cdot\arccos 2x+2\sin 3\pi$;

в) $y=(\ln 2x)^{4x^3+2x}$; г) $3x^3y^2-\sin(x^2-y^3)=\log_7 e$.

138. а) $y=\dfrac{\cos^8(3^{\arccos 7x})}{\mathrm{ctg}^2(\log_4 5x)}$; б) $y=\sqrt[3]{tg2x}\cdot 3^{\sin 7x}+\log_5 8\pi$;

в) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{\mathrm{ctg}7x}}$; г) $5x^3+6y^2+\ln(2x^2-3y^4)=\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{3}$.

139. а) $y=\dfrac{\ln^3(3^{\arcsin 8x})}{\mathrm{ctg}^4(\log_5 7x)}$; б) $y=\sqrt[7]{\mathrm{ctg}10x}\cdot\arcsin 9x+\ln\pi^2$;

в) $y=\left(\log_5 3x\right)^{x^2-9}$; г) $4x^3-5y^3-\sin(2x^3y^2)=\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

140. а) $y=\dfrac{\log_2^3(\sin\sqrt{x^3})}{\mathrm{ctg}^4(3^{\sqrt{x}})}$; б) $y=5^{\cos^2(2x-1)}\cdot\arcsin 9x+\pi^2$;

в) $y=\left(\mathrm{tg}7x\right)^{\sqrt{\cos 6x}}$; г) $4x^3+3y^2-\ln(x^4y^5)=\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}$.

141-150. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: а) $y=f(x)$, вычислить их значения в точке x_0; б) $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$.

141. а) $y=x\cdot\sin x,\ x_0=\pi/2$; б) $x=5\cos^2 t,\ y=10\sin^2 t$.

142. а) $y=x^4\cdot\ln x,\ x_0=1$; б) $x=3e^{-2t},\ y=3e^{8t}$.

143. а) $y=(x+1)\cdot\ln(x+1),\ x_0=-1/2$; б) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$.

144. а) $y=x^2\cdot\cos x,\ x_0=\pi/2$; б) $x=5(t-\sin t),\ y=5(1-\cos t)$.

145. а) $y=x\cdot\arccos x,\ x_0=\sqrt{3}/2$; б) $x=\arcsin t,\ y=\sqrt{1-t^2}$.

146. а) $y=x\cdot arcctgx,\ x_0=1$; б) $x=t\cdot e^t,\ y=t/e^t$.

147. а) $y=x\cdot\sin 2x,\ x_0=\pi/4$; б) $x=\ln^2 t,\ y=t+\ln t$.

148. а) $y=e^{-x}\cdot\cos x,\ x_0=0$; б) $x=t^4,\ y=\ln t$.

149. а) $y=e^x\cdot\sin 2x,\ x_0=0$; б) $x=7\sin^3 t,\ y=2\cos^3 t$.

150. а) $y=\dfrac{1}{2}x^2\cdot e^x,\ x_0=0$; б) $x=\mathrm{arctg}t,\ y=\ln(1+t^2)$.

151-160. Найти пределы функции, используя правило Лопиталя.

151. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\ln(x-1)}-\dfrac{x-1}{\ln(x-1)}\right)$. 152. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{3}{x}\right)$.

153. $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}\right)$. 154. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((\pi-2arctgx)\cdot\ln x\right)$.

155. $\lim\limits_{x\to\infty}((2^{\frac{1}{x}}-1)\cdot x)$. 156. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\cos x)\cdot\mathrm{ctg}x\right)$.

157. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\text{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. 158. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)$.

159. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. 160. $\lim\limits_{x\to0}\left(\left(1-e^{2x}\right)\cdot\text{ctg}x\right)$.

161-170. Используя понятие дифференциала функции вычислить приближенное значение указанной величины. Оценить допущенную относительную погрешность, с абсолютной погрешностью аргумента $\varepsilon_x = 0{,}001$.

161. $\sqrt{\dfrac{(2{,}05)^2-1}{(2{,}05)^2+7}}$; 162. $\dfrac{2{,}95}{\sqrt{(2{,}95)^2+16}}$; 163. $\cos149^0$; 164. $\sin31^0$;

165. $\ln(e^3+0{,}1)$; 166. $\sqrt{\dfrac{4-2{,}98}{1+2{,}98}}$; 167. $\arcsin0{,}52$; 168. $tg46^0$;

169. $(2{,}99)^4+(2{,}99)^3$; 170. $ctg29^0$.

171. Найти уравнение касательной к графику функции $y=2-x^2$, которая образует угол 75^0 с осью Ox.

172. Найти уравнение касательной к графику функции $y=4x^2-6x+3$, которая параллельна прямой $y=2x$.

173. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=x^3-4x^2+3x+1$, проведенными в точках с абсциссами 0 и 1.

174. Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^2-x+1$, которая параллельна прямой $y=3x-1$.

175. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, которая образует угол 135^0 с осью Ox.

176. Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^2-7x+3$, которая параллельна прямой $y=3-5x$.

177. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=-3x^2$, проведенными из точки $M(0;2)$.

178. В точке $A(1;27)$ к графику функции $y=\sqrt{(10-x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

179. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=x^3-x$, проведенными в точках с абсциссами -1 и 1.

180. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\text{arctg}\dfrac{x}{2}$ в точках ее пересечения с прямой $x-2=0$.

181-190. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

181. $f(x) = \sqrt{x - x^3}$, $a = 0,\ b = 1$.
182. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $a = 2,\ b = 3$.
183. $f(x) = \sin 2x - x$, $a = -\frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2}$.
184. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $a = 0,\ b = 1$.
185. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$, $a = \frac{3}{4},\ b = 2$.
186. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$, $a = -1,\ b = 2$.
187. $f(x) = 2\cdot 3^{3x} - 4\cdot 3^{2x} + 2\cdot 3^x$, $a = -1,\ b = 1$.
188. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $a = 1,\ b = e$.
189. $f(x) = 2\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x} + 12\cdot 2^x$, $a = -1,\ b = 1$.
190. $f(x) = \sin x + \cos 2x$, $a = 0,\ b = \pi$.

191. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса $R = 2$ м.

192. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полукруг радиуса $R = 3$ м.

193. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R = 1$ м.

194. Найти высоту прямого кругового конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R = 5$ м.

195. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиусом $R = 3$ м так, чтобы центр основания конуса совпадал с центром шара.

196. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшей, если боковые стороны и меньшее основание равны 2 см.

197. Найти радиус основания и высоту конуса наибольшего объема, у которого площадь боковой поверхности равна $\pi\sqrt{3}$ см^2.

198. Найти наибольший объем конуса, с образующей равной 3 см.

199. Найти высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, у которого площадь полной поверхности равна 24 см^2.

200. Представить число 48 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

201-210. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

201. а) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; б) $y = x^2 e^{1/x}$.

202. а) $y = xe^{1/x}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+2}$.

203. а) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

204. а) $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$; б) $y = \dfrac{x^2}{9 - x}$.

205. а) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$; б) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

206. а) $y = 1 - \ln^3 x$; б) $y = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$.

207. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$; б) $y = (x-1)e^{4x+2}$.

208. а) $y = x^2 - 2\ln x$; б) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

209. а) $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$; б) $y = \ln(4 - x^2)$.

210. а) $y = x\ln x$; б) $y = \dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ