МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания к практическим занятиям
для студентов дневной и заочной форм обучения

ВИТЕБСК
2012

УДК 519.21 (075.8)

Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2012.
Составители: доц. Дунина Е.Б.,
ст. преп. Статковский Н.С.,
доц. Никонова Т.В.,
доц. Загурский В.Н.

В методических указаниях изложены теоретические и практические сведения по теории вероятностей и математической статистике. Изложение сопровождается большим количеством решенных примеров с подробными пояснениями.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей дневной формы обучения. Могут быть использованы на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов по высшей математике.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ” 12.10.2012 г., протокол № 3.

Рецензент: канд. ф.-м. н., доцент кафедры
ПМ и М УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
Маркова Л.В.
Редактор: ст. пр. Мисурагина А.Я.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2012 г., протокол №______.

Ответственный за выпуск: Лопатнёва Н.Г.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати _________ Формат ________ Уч.-изд. лист. _______
Печать ризографическая. Тираж _____экз. Заказ № ____Цена _________

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия № 02330/0494384 от 16.03.2009.
210035, г. Витебск, Московский проспект, 72.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по теории вероятностей и математической статистике предназначены для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения. И представляют собой исправленный и существенно дополненный вариант методических указаний по теории вероятностей, изданных в 2009 г.

При составлении данных указаний преследовалось несколько целей: во-первых, предложить достаточное количество задач для выработки навыков решения типовых задач, во-вторых, дать задачи, дополняющие лекционные курсы, в-третьих, иметь возможность организовать контролируемую самостоятельную работу студентов.

Весь материал пособия разделен на шесть разделов. Разделы состоят из параграфов. В начале каждого параграфа даются основные определения, формулировки теорем и приводятся соответствующие формулы. Далее приводятся решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Ответы к задачам даются в конце их формулировок. Каждый раздел завершается вопросами теоретического характера, чтобы студент смог проконтролировать свои знания. С этой же целью студентам предлагаются тесты для самопроверки.

Методические указания могут использоваться также и при дистанционном изучении данной дисциплины.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

1.1 Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов конечного множества.

Множество называется ***упорядоченным***, если в нем указан порядок следования элементов. Так, например, множества (a, b, c) и (b, a, c) есть различные упорядоченные множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n и

$$P_n = n!, \tag{1.1.1}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и по определению полагают $0! = 1$.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 – элементов другого вида и т. д., то ***число перестановок с повторениями*** определяют формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \tag{1.1.2}$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \qquad (1.1.3)$$

Число размещений из n элементов по m элементов ***с повторениями*** равно

$$\left(A_n^m\right)_{\text{с повт}} = n^m. \qquad (1.1.4)$$

Сочетаниями называют комбинации, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний выражается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.1.5)$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n+m-1$ элементов по m элементов

$$\left(C_n^m\right)_{\text{с повт}} = C_{n+m-1}^m. \qquad (1.1.6)$$

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (1.1.7)$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

***Пример* 1.** Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр $2; 2; 2; 3; 3$?

Решение. Для решения задачи надо воспользоваться формулой для числа перестановок с повторениями (1.1.2). При $k=2, n_1=3, n_2=2, n=5$ по этой формуле получаем $P_5(3,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$.

***Пример* 2.** Сколько различных перестановок букв можно сделать в слове *экономика*?

Решение. В слове *экономика* буквы *о* и *к* повторяются дважды. Для подсчета перестановок применяем формулу (1.1.2). При $n=9, n_1=2; n_2=2$ получаем $P_9(2;2)=\frac{9!}{2!2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=90720$.

***Пример* 3**. Возьмем буквы *Б, А, Р*. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение. 1. Получатся следующие наборы: *БА, БР, АР, АБ, РБ, РА*.

$$A_3^2=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1}=6.$$

2. Получатся наборы: *ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.*

$$\left(A_3^2\right)_{\text{с повт}}=3^2=9.$$

ЗАДАЧИ

1.1.1. Сколькими различными способами могут сесть 8 человек за круглым столом? (Ответ: 40320)

1.1.2. Сколькими различными способами можно выбрать четыре человека из двенадцати кандидатов:
а) на четыре различные должности?
б) на четыре одинаковые должности? (Ответ: а) 11880; б) 495)

1.1.3. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: *книга, фабрика, молоко?* (Ответ: 120; 2520; 120)

1.1.4. В лотерее «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует возможных вариантов для игрока? (Ответ: 13 983 816)

1.1.5. Для разгрузки товаров директору супермаркета требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке? (Ответ: 15504)

1.1.6. Отдел рекламы фирмы имеет средства на размещение рекламы только в 15 из 25 городских газет. Сколько существует способов для случайного отбора газет для помещения объявлений? (Ответ: 3 268 760)

1.1.7. Сколько можно составить сигналов из 8 флажков различного цвета, взятых по 2? (Ответ: 56)

1.1.8. Сколькими способами можно выбрать три детали из коробки, содержащей 18 деталей? (Ответ: 816)

1.1.9. На железнодорожной станции имеется 7 путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 состава? (Ответ: 840)

1.1.10. В ящике 10 шаров, из которых 4 зеленых, 3 голубых и 3 красных. Сколькими способами можно извлечь три шара, так чтобы они оказались разного цвета? (Ответ: 36)

1.1.11. Среди 30 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 5, не отвечающих стандарту. Сколькими способами можно выбрать 4 стандартные и 2 нестандартные детали? (Ответ: 126500)

1.1.12. На шахматном турнире было сыграно 78 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? (Ответ: 13)

1.1.13. При встрече 16 игроков футбольной команды обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (Ответ: 120)

1.1.14. Сколькими способами можно распределить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимали участие 20 студентов? (Ответ: 6840)

1.1.15. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей? (Ответ: 210)

1.1.16. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем: а) 8 открыток, б) 8 различных открыток? (Ответ: а) 24310; б) 45)

1.1.17. В продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны, астры и васильки. Сколькими способами можно составить букет из пяти цветков: а) цветы в букете все различные, б) цветы в букете могут повторяться? (Ответ: а) 21; б) 462)

1.1.18. Номер машины состоит из трех букв и четырех цифр. Сколько всего существует разных номеров, если алфавит содержит 32 буквы? (Ответ: 327680000)

1.1.19. Служащий банка утратил 5-значный код одного из сейфов, состоящий из различных цифр. Однако он помнит только 2 цифры этого кода, но не знает их месторасположения. Сколько вариантов он должен перепробовать, чтобы открыть сейф? (Ответ: 6720)

1.1.20. Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5:
а) любых 3-значных;
б) 3-значных с различными цифрами;
в) 3-значных чётных;
г) 3-значных, составленных из нечётных цифр;
д) любых 5-значных;
е) 5-значных с различными цифрами?
(Ответ: а) 125; б) 60; в) 50; г) 6; д) 3125; е) 120)

1.2 События. Классическое и статистическое определение вероятности

Теория вероятности может быть построена аксиоматически. Эта аксиоматика создана академиком А.Н. Колмагоровым в 20-х годах прошлого века.

Исход испытания называется ***событием***. Это понятие является первичным в теории вероятностей. События, как правило, обозначаются большими латинскими буквами $A, B, \ldots$

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно происходит при выполнении некоторых данных условиях G. Невозможное событие – это событие, которое при выполнении данных условий не может произойти.

Элементарными событиями называются события, которые нельзя разложить на составляющие их события. Элементарные события обычно обозначают w. Те элементарные исходы, в которых интересующее событие наступает, называют ***благоприятствующими*** этому событию.

Под ***вероятностью события*** понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Вероятность события A обозначают $P(A)$. Существует несколько определений этого понятия.

1. *Классическое определение вероятности.*

Классической вероятностью события A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A к числу n всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

Свойства вероятности события:

а) вероятность достоверного события равна единице;

б) вероятность невозможного события равна нулю;

в) вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.2.2}$$

2. *Статистическая вероятность.*

Относительной частотой события $W(A)$ называется отношение числа испытаний m, в которых это событие появилось, к числу всех n произведенных испытаний

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Статистической вероятностью события A называется постоянная величина, вокруг которой колеблются значения частот при неограниченном возрастании числа n.

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. Однако о равновозможности исходов опыта судят исходя из соображений симметрии (например, как в случае игрального кубика). На практике трудно указывать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. В связи с этим и было введено статистическое определение вероятности. Кроме этого, классическое определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности, а определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

***Пример* 1.** На одинаковых по форме и размеру карточках по одной букве написаны буквы слова *работа.* Карточки тщательно перемешаны. Карточки наудачу располагают в ряд. Какова вероятность снова получить слово *работа?*

Решение. В слове *работа* буква *а* повторяется дважды. Для подсчета перестановок применяем формулу (1.1.2). При $n = 6, n_1 = 2$ получаем

$P_6(2) = \frac{6!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2} = 360$. Таким образом, $P = \frac{1}{360}$.

***Пример* 2.** В ящике находятся 10 желтых и 8 синих шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти вероятность, что среди отобранных шаров 4 желтых?

Решение. Поскольку шары считаем одинаковыми, то для решения задачи воспользуемся классическим определением вероятности (1.2.1). Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 18 по 7, то есть

$C_{18}^{7} = \frac{18!}{7!11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 31824$.

Подсчитаем число благоприятных исходов. Четыре желтых шарика из 10 можно выбрать C_{10}^{4} способами. Оставшиеся три шарика будут синими, и их можно выбрать C_8^3 способами. Тогда число благоприятных исходов, в силу принципа произведения в комбинаторике, можно записать в виде

$C_{10}^{4}\cdot C_8^3 = \frac{10!}{4!\,6!}\cdot\frac{8!}{3!\,5!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 210\cdot 56 = 11760$. Искомая вероятность будет равна $P = \frac{C_{10}^{4}\cdot C_8^3}{C_{18}^{7}} = \frac{11760}{31824} = \frac{245}{663} = 0{,}37$.

ЗАДАЧИ

1.2.1. В коробке находятся 13 белых, 9 синих и 8 красных шаров. Из коробки извлекают один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется: а) белым; б) красным? (Ответ: а) 13/30; б) 4/15)

1.2.2. Наудачу выбирают число от 1 до 42. Какова вероятность того, что это число является делителем 42? (Ответ: 4/21)

1.2.3. Из чисел 1, 2, …, 8 наудачу выбираем одно. Найти вероятность того, что оно кратно 3. (Ответ: 0,25)

1.2.4. Наудачу называем двузначное положительное число. Найти вероятность того, что оно:
а) кратно 3; б) кратно 4; в) кратно 5. (Ответ: а) 1/3; б) 11/45; в) 1/5)

1.2.5. Наудачу называем одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что это число удовлетворяет уравнению $x^2 - 6x + 8 = 0$. (Ответ: 0,4)

1.2.6. Подбрасываем 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут ровно 2 герба. (Ответ: 3/8)

1.2.7. Подбрасывается два игральных кубика. Найти вероятности событий:
а) сумма выпавших очков равна 8; б) сумма выпавших очков чётная;
в) сумма выпавших очков кратна числу 3.

(Ответ: а) 5/36; б) 1/2; в) 1/3)

1.2.8. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма очков, которые выпали на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 8 или 10 очков? (Ответ: вероятность получить в сумме 8 очков: $P_1 = 21/216$, вероятность получить в сумме 10 очков $P_2 = 27/216$; $P_2 > P_1$)

1.2.9. Кубик, все грани которого окрашены в красный цвет, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенные грани: *а*) три; б) две; в) одну. Найти также вероятность того, что у извлеченного кубика все грани не окрашены. (Ответ: а) $0{,}064$; б) $0{,}288$; в) $0{,}432$; $0{,}216$)

1.2.10. Пять карточек, обозначенных буквами О, П, Р, С, Т, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово СПОРТ. (Ответ: 1/120)

1.2.11. Карточки, обозначенные буквами К, Л, М, Т, О, О, О, наудачу расположили в ряд. Найти вероятность того, что получится слово МОЛОТОК. (Ответ: 1/840)

1.2.12. Наудачу называем трехзначное натуральное число. Найти вероятность того, что его цифры окажутся возрастающими. (Ответ: 7/75)

1.2.13. Найти вероятность того, что 7 различных человек родились в разные дни недели. (Ответ: 720/117649 = 0,006)

1.2.14. Три цифры 1, 2, 3 наудачу располагаем в ряд. Найти вероятность того, что цифры 1, 2 стоят рядом. (Ответ: 2/3)

1.2.15. Четыре тома сказок поставлены в ряд на полку. Найти вероятности событий:

а) первый том сказок стоит последним (событие A);
б) первый том стоит первым, а четвертый – последним (событие B);
в) третий и четвертый том стоят рядом (событие C);
г) первый, второй, третий том будут стоять рядом (событие D).
(Ответ: а) 0,25; б) 0,08; в) 0,5; г) 0,5)

1.2.16. В ящике 7 шаров, из которых 4 белых и 3 синих. Наудачу извлекаем 3 шара. Найти вероятность того, что ровно 2 из этих шаров окажутся белыми. (Ответ: 18/35)

1.2.17. Имеется шесть жетонов с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наудачу извлекаем три жетона. Найти вероятность того, что среди них окажется жетон с номером 1. (Ответ: 0,5)

1.2.18. Четыре человека вошли в лифт 11-этажного дома. Найти вероятность того, что:

а) все они выйдут на разных этажах (событие A);
б) все они выйдут на втором этаже (событие B);
в) все они выйдут на каком-нибудь одном этаже (событие C);
г) на одном из этажей выйдут два человека и на другом два человека (событие D).

(Ответ: а) $0{,}504$; б) $0{,}0001$; в) $0{,}001$; г) $540/10^4 = 0{,}054$)

1.2.19. На остановке три пассажира. К остановке подходят четыре автобуса. Найти вероятность того, что:

а) пассажиры войдут в разные автобусы;

б) все три пассажира войдут в первый автобус;

в) все три пассажира войдут в какой-нибудь один автобус.

(Ответ: а) $0{,}375$; б) $0{,}016$; в) $0{,}0625$)

1.2.20. В партии из 350 телевизоров, отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных. Найти относительную частоту бракованных телевизоров. (Ответ: $1/70 = 0{,}01$)

1.2.21. Найдите частоту появления герба при 20 подбрасываниях симметричной монеты. Опыт проведите самостоятельно.

1.2.22. При стрельбе по мишени частота попаданий $W = 0{,}90$. Найти число выстрелов, если получено 18 попаданий. (Ответ: 20)

1.3 Геометрические вероятности

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. ***Вероятность попадания точки на отрезок*** l определяется равенством

$$P = \frac{l}{L}. \qquad (1.3.1)$$

При этом предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L.

На плоскости имеется область G и область g в ней. Площади их равны S_G и S_g соответственно. В область G бросается наудачу точка. ***Вероятность того, что точка окажется в области*** g, принимается равной

$$P = \frac{S_g}{S_G}, \qquad (1.3.2)$$

и не зависит ни от расположения относительно G, ни от формы области g.

Аналогично определяется ***вероятность попадания точки в объем*** V_{g_1}, находящийся в объеме V_{G_1}:

$$P = \frac{V_{g_1}}{V_{G_1}}. \qquad (1.3.3)$$

Вероятности, определенные таким образом, получили название ***геометрические***.

Пример **1.** На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, а область g-эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g?

Решение. Вычислим площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, записав его параметрическое уравнение: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$. Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то площадь равна

$$S = 4\int\limits_0^a ydx = 4\int\limits_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int\limits_{\pi/2}^0 \sin^2 tdt = \pi ab.$$

Для данной задачи $S_G = 5\cdot 7\cdot \pi = 35\pi$, $S_g = 5\cdot 3\cdot \pi = 15\pi$. По формуле (1.3.2) получим $P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{15\pi}{35\pi} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$.

ЗАДАЧИ

1.3.1. Наудачу называем число x, принадлежащее отрезку $[2,12]$. Найти вероятность того, что оно удовлетворяет неравенству $x \ge 8$. (Ответ: 0,4)

1.3.2. Наудачу ставим точку на $[1,9]$. Вероятность того, что она попадёт на отрезок $[2,b]$, равна $0{,}25$. Найти b. (Ответ: 4)

1.3.3. В круге радиуса R_1 = 4 см расположен круг радиуса R_2 = 2 см. На большой круг наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый круг. (Ответ: $0{,}25$)

1.3.4. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2,1); B(-2,-1); C(2,-1)$. Ставим точку наудачу в треугольник ABC. Найти вероятность того, что точка окажется в первой четверти. (Ответ: $0{,}25$)

1.3.5. В квадрат вписан круг. На квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг. (Ответ: $\pi/4 \approx 0{,}79$)

1.3.6. В квадрат вписан круг, а в этот круг снова вписан квадрат. На большой квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый квадрат. (Ответ: $0{,}5$)

1.3.7. В прямоугольник с вершинами в точках $O(0,0); A(0,4); B(2,4); C(2,0)$ наудачу брошена точка $Q(x,y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \frac{x}{4}$.
(Ответ: $15/16 = 0{,}9375$)

1.3.8. На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$, а область g – этим эллипсом и эллипсом $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g? (Ответ: 0,4)

1.3.9. В область G, ограниченной эллипсоидом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что координаты x, y, z этой точки будут удовлетворять неравенству $x^2+y^2+z^2\le 4$? Замечание: объем эллипсоида вычисляют по формуле $V=\frac{4}{3}\pi abc$, где числа a, b, c называют полуосями эллипсоида. (Ответ: 0,13)

1.3.10. Точка брошена в область G, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Какова вероятность того, что она попадет в область g, ограниченную этим эллипсом и линиями $y\le\frac{1}{2}x, y\ge 0$? (Ответ: 1/8)

1.3.11. На отрезке $[0,3]$ выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $\frac{x^2}{9}\le y\le x$. (Ответ: 7/18)

1.3.12. Два автомобиля должны подъехать к одному и тому же таможенному пункту. Время прибытия автомобилей независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из автомобилей придется ожидать освобождение терминала, если время прохождения контроля первым автомобилем равно одному часу, а второго – полтора часа. (Ответ: 0,1)

1.3.13. Два школьника договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность встречи, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода в течение указанного часа. (Ответ: $0{,}44$)

1.3.14. В шар вписан правильный тетраэдр. Найти вероятность того, что случайно брошенная в шар точка окажется внутри тетраэдра.
(Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}=0{,}123$)

1.3.15. Задумайте любые два положительных числа, каждое из которых не больше трех. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет трех, а произведение будет не больше двух? (Ответ: 0,487)

1.3.16. В прямоугольник с вершинами $A(-2,-1); B(-2,4); C(1,4); D(1,-1)$ наудачу брошена точка. Какова вероятность, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $x^2\le y\le 2-x$? (Ответ: $0{,}3$)

1.3.17. Коэффициенты p и q для уравнения $x^2+px+q=0$ выбираются наудачу из отрезка [0,1]. Какова вероятность того, что корни уравнения будут действительными? Замечание: корни уравнения действительны, если дискриминант $D \geq 0$, т. е. $p^2 - 4q \geq 0$ или $q \leq \frac{p^2}{4}$. (Ответ: $0{,}083$)

1.3.18. На площадку, покрытую квадратной кафельной плиткой со стороной 4 см, бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата. Замечание: пусть (x, y) – координаты центра монеты. Монета окажется внутри квадрата, если: $1 \leq x \leq 3$; $1 \leq y \leq 3$. (Ответ: $0{,}25$)

1.3.19. Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 м. Какова вероятность того, что корабль пройдет через заграждение? (Ответ: $0{,}6$)

1.4 Действия над событиями. Теорема сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности

Если из наступления события A следует наступление события B, то говорят, что ***событие** A **влечет за собой событие*** B и обозначают $A \subset B$.

Равенство событий $A = B$, означает, что $A \subset B$ и $B \subset A$, то есть они состоят из одних и тех же элементарных событий.

Суммой $A + B$, или ***объединением*** $A \bigcup B$, ***двух событий*** называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них (то есть в появлении события A, или события B, или обоих этих событий).

Произведением $A \cdot B$, или ***пересечением*** $A \bigcap B$, ***двух событий*** называется событие, состоящее в одновременном их появлении.

Аналогично определяется и обозначается сумма n событий. Операции над событиями можно представить как операции над множествами.

Свойства операций объединения и пересечения событий:

1) операции коммутативны, то есть

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \; A \bigcap B = B \bigcap A;$$

2) операции ассоциативны, то есть

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup C) \bigcup B;$$

$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap C) \bigcap B;$$

3) операции дистрибутивны

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C);$$

4) $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$;

5) если U – достоверное, V – невозможное событие, A – любое событие, $\overline{A}$ – событие противоположное A, то выполняются равенства:

$$A \bigcap \overline{A} = V, \; A \bigcup \overline{A} = U, \; A \bigcup V = A, \; A \bigcap V = V, \; A \bigcup U = U, \; A \bigcap U = A.$$

Два события называются ***несовместными***, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Множество событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***полной группой событий***, если они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Теорема сложения вероятностей двух событий: вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.4.1)$$

Если A и B несовместные события, то $P(AB)=0$.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий: вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.4.2)$$

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно не появлению другого. Например, события «герб» и «цифра» при одном подбрасывании монеты являются противоположными.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (1.4.3)$$

Обычно вводят обозначения $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$. В этом случае формула (1.4.2) примет вид

$$p+q=1. \qquad (1.4.4)$$

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения вероятностей: вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие уже произошло

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \qquad (1.4.5)$$

Для трех событий A,B,C формула (1.4.5) принимает вид

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C). \qquad (1.4.6)$$

Событие B называют ***независимым от события*** A, если вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A

$$P(B)=P_A(B). \qquad (1.4.7)$$

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий: вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (1.4.8)$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности противоположных событий

$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\overline{B}). \qquad (1.4.9)$$

Если события A и B независимы, то

$$P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-(1-P(A))(1-P(B))=1-q_1q_2. \qquad (1.4.10)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного их них выражается формулой

$$P(A) = 1 - q^n, \tag{1.4.11}$$

где $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Пример **1.** Стрелок производит два выстрела по мишени. Событие $A_k \ (k = 1,2)$ – «попадание в мишень при k-ом выстреле». Выразить через A_1, A_2 следующие события: A – «хотя бы одно попадание»; B – «два попадания»; C – «два промаха»; D – «хотя бы один промах».

Решение. Поскольку $A_1 + A_2$ – это событие, состоящее в попадании при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах, то $A = A_1 + A_2$. Два попадания будут тогда, когда попадание наступит при каждом выстреле, т. е. события A_1, A_2 осуществляются вместе, т. е. $B = A_1 \cdot A_2$. Два промаха будут в случае промаха при каждом выстреле $C = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$. Событие D состоит в промахе при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах, поэтому $D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$.

Пример **2.** В урне 35 шариков: 10 белых, 5 желтых, 6 зеленых и 14 синих. Из урны извлечен шарик. Найти вероятность появления цветного шарика.

Решение. Извлечение цветного шарика означает появление либо желтого (событие A), либо зеленого (событие B), либо синего (событие C) шарика. Вероятности событий A, B, C можно легко найти

$$P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}; \ P(B) = \frac{6}{35}; \ P(C) = \frac{14}{35}.$$

Так как события A, B и C несовместны, то по формуле (1.4.1) получим

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5 + 6 + 14}{35} = \frac{5}{7}.$$

Следует заметить, что этот же результат можно получить и используя классическое определение вероятности, то есть $P = \frac{m}{n}$. Здесь m – число благоприятствующих исходов событию «извлечение цветного шара». В данной задаче $m = 25, n = 35$.

ЗАДАЧИ

1.4.1. Упростить выражения:

а) $(A + B)(B + C)$; б) $(A + B)(\overline{A} + B)$; в) $(A + B)(B + C)(C + A)$.

(Ответ: а) $B + AC$; б) B; в) $AB + BC + AC$)

1.4.2. События A и B несовместны, $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$. Вычислить $P(A + B)$. (Ответ: $0{,}7$)

1.4.3. События A, B и C образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$. Найти вероятность события B. (Ответ: $0{,}5$)

1.4.4. В коробке 15 деталей, среди которых 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди отобранных 7 деталей окажется не более одной нестандартной детали. (Ответ: $0{,}18$) Указание. Пусть событие A – «нет ни одной нестандартной детали», а событие B – «есть одна нестандартная деталь». Тогда в соответствии с теоремой сложения вероятностей (1.4.1) $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

1.4.5. События A и B независимы. Вероятности событий таковы: $P(A)=0{,}6$; $P(B)=0{,}7$. Вычислить $P(AB)$. (Ответ: $0{,}42$)

1.4.6. Пусть события A и B независимы. Вероятность события $P(A)=0{,}7$. Вероятность совместного появления событий $P(AB)=0{,}35$. Найти вероятность события B. (Ответ: 0,5)

1.4.7. Пусть заданы вероятности событий A и $B: P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}6$. Вероятность совместного появления событий $P(AB)=0{,}3$. Найти вероятность появления хотя бы одного события, то есть $P(A+B)$? (Ответ: $0{,}7$)

1.4.8. Пусть задана вероятность события A: $P(A)=0{,}8$. Вероятность совместного появления событий $P(AB)=0{,}4$. Найти условную вероятность $P_A(B)$. (Ответ: $0{,}5$)

1.4.9. Из 1, 2, 3, 4, 5, 6 наудачу выбираем цифру a, из 7, 8, 9 − цифру b. Найти вероятность того, что $ab=42$. (Ответ: $1/18$)

1.4.10. Найти вероятность совместного появления цифры при подбрасывании трех монет. (Ответ: $1/8$)

1.4.11. В ящике 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что один из них окажется белым, а другой – чёрным. (Ответ: $0{,}6$)

1.4.12. В первом ящике находятся 2 белых шара и 5 синих, во втором – 4 белых и 2 синих. Из каждого ящика извлекаем по одному шару. Найти вероятность того, что оба выбранных шара будут синие. (Ответ: $5/21$)

1.4.13. В первом ящике находятся 2 красных, 4 зеленых и 5 синих шаров, во втором – 3 красных, 5 зеленых и 2 синих. Из каждого ящика извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы. (Ответ: $18/55=0{,}33$)

1.4.14. В каждом из 3 ящиков содержится по 15 деталей. В первом ящике – 10, во втором – 7 и в третьем – 11 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными. (Ответ: $0{,}23$)

1.4.15. Рабочий обслуживает пять станков с программным управлением. Вероятность того, что на любом станке в течение часа возникнут неполадки, равна $0{,}55$. Найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего: а) все пять станков, б) ни один из станков, в) хотя бы один станок. Следует полагать, что неполадки на станках независимы. (Ответ: а) $0{,}0503$;
б) $0{,}0185$; в) $0{,}9815$)

1.4.16. В первом ящике находится 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных, а во

втором – 4 шара: 1 белый и 3 чёрных. Из каждого ящика наудачу извлекаем по одному шару. Найти вероятности событий:
а) оба шара белые; б) хотя бы один из них чёрный; в) оба шара одного цвета. (Ответ: а) $0{,}15$; б) $0{,}85$; в) $0{,}45$)

1.4.17. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2 (событие A), или 7 (событие B), или тому и другому одновременно. (Ответ: $P(A+B)=51/90$)

1.4.18. Вероятность попадания в цель для первого стрелка $0{,}91$, а для второго – $0{,}89$. Стрелки сделали по одному выстрелу независимо друг от друга. Какова вероятность, что в цель попадет хотя бы один стрелок? (Ответ: $0{,}99$)

1.4.19. Два спортсмена стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого спортсмена равна $0{,}8$, а для второго – $0{,}9$. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти: а) вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен; б) вероятность того, что в мишень попадет только один спортсмен. (Ответ: а) $0{,}98$; б) $0{,}26$)

1.4.20. На лабораторной работе по физике два студента производят измерение некоторой физической величины. Вероятность того, что они допустят ошибку при считывании показаний прибора, равна $0{,}1$ и $0{,}2$ соответственно. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один студент допустит ошибку. (Ответ: $0{,}28$)

1.4.21. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в четырех независимых испытаниях, равна $0{,}974$. Предполагая, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же, найти вероятность появления события в одном испытании. (Ответ: $0{,}6$)

1.4.22. Стрелок производит пять выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле $0{,}3$. Попадания в цель при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель: а) один раз; б) три раза; в) пять раз? (Ответ: а) $0{,}36$; б) $0{,}13$; в) $0{,}002$)

1.4.23. В ящике находятся 10 синих и 8 белых шаров. Из ящика последовательно без возвращения извлекается три шара. Найти вероятность того, что все три шара синие. (Ответ: $0{,}15$)

Указание. Введите обозначения: событие A_1 – «первый шар синий», событие A_2 – «второй шар синий», событие A_3 – «третий шар синий». Задачу следует решить двумя способами: а) используя формулу (1.4.6); б) непосредственным подсчетом по формуле (1.2.1).

1.4.24. В ящике находятся 12 деталей первого сорта, 5 деталей второго сорта и 3 бракованных детали. Поочередно из ящика берут три детали. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится деталь первого сорта (событие A), при втором – второго (событие B), при третьем – бракованная деталь (событие C). (Ответ: $0{,}026$)

1.4.25. Студент знает ответы на 15 вопросов из 50. Преподаватель задает вопросы последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса – счастливые. (Ответ: $0{,}02$)

1.4.26. Участок электрической цепи *AB* состоит из элементов, указанных на схеме (рис. 1.1 – 1.4). Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Элементы Z в течение месяца независимо друг от друга выходят из строя с вероятностями:

а) $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}7$ (рис 1.1); б) $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}05;\ p_3 = 0{,}05$ (рис 1.2);

в) $p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}3$ (рис 1.3); г) $p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}5;\ p_3 = 0{,}08$ (рис 1.4).

Определить вероятность безотказной работы схемы (событие A) в течение месяца. (Ответ: а) $0{,}21$; б) $0{,}99$; в) $0{,}94$; г) $0{,}77$)

Рис. 1.1

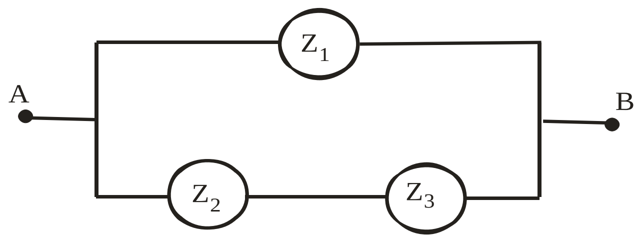


Рис. 1.2

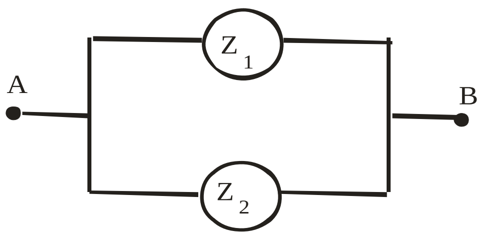


Рис. 1.3

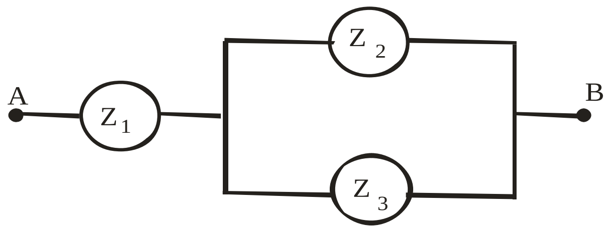


Рис. 1.4

1.5 Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть n попарно несовместных событий $B_1, B_2, ...B_n$ образуют полную группу. Событие A может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, ...B_n$, причем известны условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), ...P_{B_n}(A)$.

Вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A). \quad (1.5.1)$$

Формула (1.5.1) называется ***формулой полной вероятности***. События $B_1, B_2, ...B_n$ называют ***гипотезами***.

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. При этом изменились вероятности гипотез. Условные вероятности любой гипотезы $B_1, B_2, ...B_n$ могут быть вычислены по ***формуле Байеса***

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad (1.5.2)$$

где полная вероятность $P(A)$ задается формулой (1.5.1).

***Пример* 1.** Партия цветных телевизоров на 30 % изготовлена первым цехом, на 70 % – вторым. Вероятность выпуска телевизоров, не отвечающих стандарту, соответственно равны: $q_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}01$. Найти вероятность того, что наудачу взятый телевизор окажется стандартным.

Решение. Введем обозначения: событие A – «из партии взят стандартный телевизор», гипотеза B_1 – «взятый телевизор изготовлен первым цехом», гипотеза B_2 – «взятый телевизор изготовлен вторым цехом». Найдем условные вероятности $P_{B_i}(A)$, $i = 1{,}2$ по формуле

$$P_{B_i}(A) = 1 - P_{B_i}(\overline{A}),$$

где $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A:

$$P_{B_1}(A) = 1 - P_{B_1}(\overline{A}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95,\ P_{B_2}(A) = 1 - P_{B_2}(\overline{A}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Из условия задачи следует, что $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}7$. В соответствии с формулой (1.5.1) получаем

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}99 = 0{,}285 + 0{,}693 = 0{,}978.$$

ЗАДАЧИ

1.5.1. В каждом из двух ящиков по десять шаров: 4 белых и 6 чёрных. Из первого ящика наудачу извлекли один шар и переложили во второй. Затем из второго ящика наудачу извлекли один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второго ящика, будет белым. (Ответ: $0{,}4$)

1.5.2. В четырех ящиках лежит по 12 шаров, отличающихся только цветом. В двух ящиках (состава B_1) – по 5 зеленых и 7 белых шаров. В одном ящике (состава B_2) – 3 зеленых и 9 белых. И в последнем (состава B_3) – 8 зеленых и 4 белых. Из наудачу выбранного ящика взят один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался: а) белым; б) зеленым?
(Ответ: а) $0{,}5625$; б) 0,438)

1.5.3. В урну, содержащую три шара, опущен черный шар. Затем наудачу извлекают один шар. Все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется черным. (Ответ: 0,63)

1.5.4. Три станка штампуют детали. Первый станок производит 25%, второй – 30%, третий – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно $2\%, 2{,}5\%, 4\%$. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной. (Ответ: $0{,}0305$)

1.5.5. Квалифицированный рабочий обслуживает четыре станка, производящие одинаковые детали. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего и четвертого в три раза меньше, чем второго. Детали складываются в один контейнер. Вероятность брака для первого станка равна $0{,}01$, для второго – $0{,}02$, для третьего – $0{,}03$, для четвертого – $0{,}035$. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной?
(Ответ: $0{,}0168$)

1.5.6. В одной группе 10 студентов, из которых 2 отличника, во второй – 12 студентов, из которых 3 отличника. Из наудачу выбранной группы наудачу выбран студент. Найти вероятность того, что он отличник. (Ответ: $0{,}225$)

1.5.7. Экономист считает, что вероятность роста стоимости акций компании в следующем году составит $0{,}81$, если экономика страны будет на подъеме, и $0{,}42$, если экономика не будет успешно развиваться. По мнению экспертов, вероятность экономического подъема равна $0{,}55$. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в следующем году. (Ответ: $0{,}6345$)

1.5.8. В магазине имеются телевизоры с импортными и отечественными кинескопами в отношении $8:2$. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортным кинескопом равна $0{,}008$, с отечественными – $0{,}01$. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок. (Ответ: $0{,}992$)

1.5.9. Инвестор вложил капитал в ценные бумаги двух финансовых фирм. При этом он надеется получить доход в течение года от первой фирмы с вероятностью $0{,}9$, а от второй – с вероятностью 1. Вероятность банкротства первой и второй фирмы независимо друг от друга соответственно равна $0{,}1; 0{,}02$. В случае банкротства инвестор получает вложенный капитал. Какова вероятность того, что инвестор получит прибыль? (Ответ: $0{,}9962$)

Указание. Введите обозначения: событие A – «получение инвестором прибыли», C_1 – «банкротство первой фирмы», C_2 – «банкротство второй фирмы». По условию задачи $P(C_1)=0{,}1$ и $P(C_2)=0{,}02$. Тогда возможны четыре гипотезы: $B_1 = C_1\overline{C}_2$, $B_2 = \overline{C}_1 C_2$, $B_3 = C_1 C_2$, $B_4 = \overline{C}_1\overline{C}_2$. Т. к. возможности банкротства фирм независимы друг от друга, то $P(B_1) = P(C_1)P(\overline{C}_2)$. Аналогичные выражения можно записать для $P(B_2), P(B_3), P(B_4)$. Учитывая, что $P_{B_1}(A)=1$, $P_{B_2}(A)=0{,}9$, $P_{B_3}(A)=0$, $P_{B_4}(A)=1$.

1.5.10. В группе $1\,Шт$ – 20 студентов, из которых 8 отличников, в группе $2Шт$ – 24 студента, из которых 3 отличника, в группе $3Шт$ – 16 студентов, из которых 4 отличника. Из наудачу выбранной группы для сдачи экзамена приглашается наугад один студент, который оказался отличником. Найти вероятность того, что этот студент из группы $2Шт$. Из какой группы наиболее вероятно выбрать этого студента? (Ответ: 0,16; из группы $1Шт$)

1.5.11. Оператор радиолокационной станции фиксирует самолет противника с вероятностью $0{,}8$ и принимает помеху за самолет с вероятностью $0{,}1$. Практика показала, что в $15\,\%$ случаев на экран оператора попадает помеха. Оператор принял решение о наличии в воздушном пространстве самолета противника. Определить вероятность того, что сигнал получен действительно от самолета. (Ответ: $0{,}9784$)

1.5.12. В цехе работают 4 мастера и 8 учеников. При изготовлении изделия мастер допускает брак с вероятностью $0{,}04$; ученик – с вероятностью $0{,}15$. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что его изготовил: а) мастер; б) ученик? (Ответ: а) $0{,}12$; б) 0,88)

1.5.13. В магазин электрические лампочки поставляются двумя заводами в соотношении $7:8$. Среди продукции первого завода стандартные лампочки составляют 95 %, а второго – 90 %. Взятая наугад лампочка оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена первым заводом.
(Ответ: 0,48)

1.5.14. Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны соответственно $0{,}7$; $0{,}8$ и $0{,}9$. Наугад выбранный стрелок выстрелил в мишень. Мишень поражена. Найти вероятность того, что стрелял третий стрелок. (Ответ: 0,38)

1.5.15. Две из трех независимо работающих микросхемы прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья микросхемы, если вероятность отказа первой, второй и третьей микросхемы соответственно равны: $0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}015$. (Ответ: 0,23)

Указание. Введите обозначения: событие A – «отказали две микросхемы», гипотеза B_1 – «отказала первая и вторая микросхемы, а третья работает исправно»; гипотеза B_2 – «отказала первая и третья микросхемы, а вторая работает исправно»; гипотеза B_3 – «отказала вторая и третья микросхемы, а первая работает исправно»; гипотеза B_4 – «отказала только одна микросхема», гипотеза B_5 – «отказали все три микросхемы», гипотеза B_6 – «ни одна из микросхем не отказала». Вероятности гипотез B_1, B_2, B_3 можно найти следующим образом: $P(B_1) = p_1 p_2 q_3$, $P(B_2) = p_1 p_3 q_2$, $P(B_3) = q_1 p_2 p_3$. При гипотезах B_4, B_5, B_6 событие A невозможно, и, следовательно, условные вероятности $P_{B_4}(A), P_{B_5}(A), P_{B_6}(A)$ равны нулю. Поскольку при гипотезах B_1, B_2, B_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице.

1.5.16. В каждом из трех ящиков по 9 шаров. Число белых шаров в первом, втором и третьем ящиках соответственно равно 9, 6, 3. Из наудачу выбранного ящика наудачу извлечен шар, оказавшийся белым. Шар возвращают в ящик, и второй раз из того же ящика извлекают шар, который также оказывается белым. Найти вероятность того, что шары были извлечены из первого ящика. (Ответ: $0{,}643$)

ВОПРОСЫ

1. Что изучает комбинаторика?
2. Что называют перестановками, размещениями, сочетаниями?
3. По какой формуле вычисляют число перестановок из n различных элементов?
4. По какой формуле вычисляют число перестановок с повторениями?
5. По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по m элементов?
6. По какой формуле вычисляют число размещений с повторениями?
7. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по m элементов?
8. По какой формуле вычисляют число сочетаний с повторениями?
9. Что называют событием?
10. Какие события называют элементарными?
11. Какое событие называют достоверным?
12. Какое событие называют невозможным?
13. Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?
14. Какие события считают равновозможными?
15. Дайте классическое определение вероятности.
16. Дайте статистическое определение вероятности.
17. В чем отличие классического и статистического определения вероятности?
18. Чему равна вероятность достоверного события?
19. Чему равна вероятность невозможного события?
20. В каких пределах заключена вероятность случайного события?
21. Как определяется геометрическая вероятность в плоском случае?
22. Как определяется геометрическая вероятность в линейном случае?
23. Как определяется геометрическая вероятность попадания точки в объем?
24. Что называют суммой, или объединением, двух событий? Как ее обозначают?
25. Что называют произведением, или пересечением, двух событий? Как ее обозначают?
26. Назовите свойства операций объединения и пересечения событий.
27. Какие события называются несовместными?
28. Сформулируйте теорему сложения вероятностей двух событий.
29. Сформулируйте теорему сложения вероятностей двух несовместных событий.
30. Что называют полной группой событий?
31. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
32. Сформулируйте теорему умножения вероятностей двух независимых событий.
33. Какой вид имеет формула полной вероятности?
34. Какой вид имеет формула Байеса?

2 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

2.1 Формула Бернулли

Пусть проводятся n независимых испытаний, в результате которых может появиться событие A с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$.

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз, равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.1.1}$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Формула (2.1.1) называется ***формулой Бернулли***.

Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли событие A появится от k_1 до k_2 раз, можно найти по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}\ . \tag{2.1.2}$$

Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли событие A появится хотя бы один раз, определяется формулой

$$P_n(1 \le k \le n)=1-q^n. \tag{2.1.3}$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит: менее k раз, более k раз, не менее k раз, не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P(A)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k-1), \tag{2.1.4}$$

$$P(A)=P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n(n), \tag{2.1.5}$$

$$P(A)=P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n), \tag{2.1.6}$$

$$P(A)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k). \tag{2.1.7}$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, называется ***наивероятнейшим числом появления события*** A. При заданных n и p это число определяется неравенствами

$$np-q \le k_0 \le np+p\ . \tag{2.1.8}$$

Если число $np+p$ не является целым, то k_0 равно целой части этого числа. Если $np+p$ – целое число, то k_0 имеет два значения $k'=np-q$, $k''=np+p$.

ЗАДАЧИ

2.1.1. Подбрасывается 4 одинаковых монеты. Найти вероятность того, что выпало ровно 2 герба; выпало более одного герба. (Ответ: $0{,}375$; $0{,}688$)

2.1.2. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна $0{,}8$. Найти вероятность того, что будет ровно два промаха. (Ответ: $0{,}096$)

2.1.3. Имеется 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по каждому из них равна $0{,}2$. Найти вероятность того, что ровно три билета окажутся выигрышными. (Ответ: $0{,}201$)

2.1.4. Вероятность банкротства одной из 7 фирм к концу года равна $0{,}3$. Какова вероятность того, что к концу года обанкротится не более двух фирм? (Ответ: $0{,}652$)

2.1.5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 19 новорожденных будет 10 мальчиков. (Ответ: $0{,}178$)

2.1.6. Каждое из 9 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью $0{,}93$. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят, по крайней мере, 7 предприятий. (Ответ: $0{,}98$)

2.1.7. При эпидемии гриппа $40\,\%$ населения заражены вирусом. В лаборатории числится 12 сотрудников. Какова вероятность того, что 6 из них будут носителями вируса? (Ответ: $0{,}17$)

2.1.8. Найти вероятность того, что при 6 подбрасываниях игральной кости четный номер выпадет ровно 4 раза. (Ответ: $0{,}234$)

2.1.9. На отрезке $[0{,}9]$ наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что ровно 2 из них попадут на отрезок $[0{,}3]$. (Ответ: $8/27$)

2.1.10. В квадрат $ABCD$ наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что все они попадут в треугольник ABC. (Ответ: 0,125)

2.1.11. В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что все они окажутся удаленными от сторон квадрата не менее чем на 1 см. (Ответ: $(4/16)^4 = 1/256$)

2.1.12. На фабрике, изготовляющей болты, брак в продукции составляет $5\ \%$. Найти вероятность того, что среди четырёх взятых наугад болтов будет хотя бы два бракованных. (Ответ: $0{,}014$)

2.1.13. В водоёме $70\,\%$ всех рыб составляют карпы. Найти вероятность того, что из пяти выловленных рыб окажется хотя бы один карп. (Ответ: $0{,}998$)

2.1.14. На круг с центром в начале координат наудачу ставим 5 точек. Найти вероятность того, что хотя бы 4 из них попадут в первую четверть. (Ответ: $0{,}016$)

2.1.15. В круге радиуса 4 см находится меньший круг радиуса 2 см. В большой круг наудачу поставлены 5 точек. Найти вероятность того, что в малый круг попадёт хотя бы одна точка. (Ответ: $0{,}763$)

2.1.16. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p = 0{,}85$. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 7 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность. (Ответ: 6; $0{,}396$)

2.1.17. Всхожесть семян составляет в среднем $60\,\%$. Найти наивероятнейшее число всхожих среди десяти семян. (Ответ: 6)

2.1.18. Какова вероятность наступления события в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений события в 100 испытаниях равно
$k_0 = 25$? (Ответ: $25/101 \le p \le 26/101$)

2.2 Локальная теорема Муавра-Лапласа

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как приходится вычислять факториалы больших чисел. В этом случае используют локальную теорему Лапласа.

Теорема: Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и $0 < p < 1$, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится во всех этих испытаниях ровно k раз, приближенно (тем точнее, чем больше n) выражается формулой

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (2.2.1)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента x дана в приложении 1. Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Заметим, что для частного случая $p = 1/2$ формула была найдена в 1730 г. Муавром. В 1783 г. Лаплас обобщил формулу на случай произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему иногда называют теоремой Муавра-Лапласа.

ЗАДАЧИ

2.2.1. Известно, что из 100 семей 80 имеют холодильник. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильник. (Ответ: $0{,}0022$)

2.2.2. При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность, что из 800 опросов число неискренних ответов будет 180.
(Ответ: $0{,}0074$)

2.2.3. Вероятность обнаружения упавшего на Землю метеорита, по подсчетам ученых, составляет $0{,}0001$. Какова вероятность обнаружения двух метеоритов из 3000 упавших на Землю? (Ответ: 0,006)

2.2.4. Вероятность появления события A в каждом из 850 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет:
а) 700 раз; б) 670 раз. (Ответ: а) 0,0079; б) 0,024)

2.2.5. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,5. Сколько раз с вероятностью 0,0352 можно ожидать появления события A в 150 независимых испытаниях? (Ответ: 81)

2.2.6. Найти вероятность того, что из 300 наудачу отобранных человек в летние месяцы родились 66 человек. (Ответ: $0{,}026$)

2.2.7. Вероятность изготовления детали первого сорта на данном станке равна 0,75. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 100 деталей окажется 70 деталей первого сорта. (Ответ: $0{,}047$)

2.3 Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема: Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится от k_1 до k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (2.3.1)$$

где x_1 и x_2 определяются равенствами

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (2.3.2)$$

Формулу (2.3.1) часто представляют в виде

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (2.3.3)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, т. е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (2.3.4)$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ – нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Ее значения приведены в приложении 2. Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Формулами (2.2.1) и (2.3.3) на практике пользуются в случае, если $npq > 10$. В этом случае формулы не приводят к большим погрешностям.

Пусть при n независимых испытаниях событие A наступает m раз. Вероятность появления события A в одном испытании p и $0 < p < 1$. Тогда частота появления $W(A) = \frac{m}{n}$. Вероятность того, что модуль отклонения частоты появления события от вероятности события p не превышает положительного числа ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2.3.5)$$

ЗАДАЧИ

2.3.1. Вероятность изготовления изделий первого сорта на данном заводе равна $0{,}7$. Чему равна вероятность того, что в партии из 900 изделий число изделий первого сорта будет не менее 650 и не более 680? (Ответ: $0{,}07$)

2.3.2. Вероятность появления события A в каждом из 500 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что данное событие появится: а) не менее 430 и не более 470 раз; б) не менее 430 раз; в) не более 429 раз. (Ответ: а) 0,997; б) $0{,}9986$; в) $0{,}0014$)

2.3.3. Сколько раз нужно подбросить игральный кубик, чтобы с вероятностью $0{,}85$ можно было ожидать не менее 150 выпадений шестерки?
(Ответ: 953)

2.3.4. Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна $0{,}75$. Найти вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.
(Ответ: $0{,}696$)

2.3.5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна $0{,}5$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по модулю не больше чем на $0{,}02$. (Ответ: $0{,}7698$)

2.3.6. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна $0{,}05$. Найти с вероятностью $0{,}95$ границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных. (Ответ: $15 \le m \le 33$)

2.3.7. Игральный кубик подбрасывают 80 раз. Найти с вероятностью $0{,}99$ границы, в которых будет заключено число m выпадений четверки. (Ответ: $5 \le m \le 22$)

ВОПРОСЫ

1. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применять формулу Бернулли?
2. Какой вид имеет формула Бернулли?
3. Что называют наивероятнейшим числом появления события в n независимых испытаниях? Как находится это число?
4. Как найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится хотя бы один раз?
5. Как вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит: менее k раз, более k раз, не менее k раз, не более k раз?
6. Как формулируется локальная теорема Лапласа?
7. Как формулируется интегральная теорема Муавра-Лапласа?
8. Как определяется функция Лапласа?
9. Функция Лапласа является четной или нечетной?

3 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1 Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые она принимает с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Случайные величины обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z...$, а их значения – строчными буквами $x_1, x_2, x_3...$.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически.

При табличном способе заданий случайной величины X в первой строке таблицы указывают возможные значения x_i, а во второй – вероятности p_i.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Следует заметить, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если дискретная случайная величина X принимает бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, ...$, то таблица имеет вид:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Ряд, составленный из чисел $p_1, p_2, ...$, сходится, и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i) $(i = 1, ..., n)$. Затем соединяют точки отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется ***многоугольником распределения*** случайной величины X .

При аналитическом способе заданий закон распределения определяется формулами

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i) \quad (i = 1, ..., n), \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) = 1. \qquad (3.1.1)$$

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X, в котором вероятности вычисляют по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

ЗАДАЧИ

3.1.1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

X	1	3	5	7
p	0,2	0,1	0,6	0,1

б)

X	10	20	30	40
p	0,1	0,5	0,2	0,1

в)

X	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^i$	...
p	1	1/2	1/3	...	1/i	...

г)

X	1/5	$1/5^2$	$1/5^3$	...	$1/5^i$	...
p	1/7	$1/7^2$	$1/7^3$	...	$1/7^i$	...

(Ответ: а) да; б) нет; в) нет; г) нет)

3.1.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,10	p_2	0,12	p_4	0,46	0,22

Найти вероятности p_2 и p_4, если $p_1 = 4p_4$. (Ответ: $p_2 = 0{,}08$; $p_4 = 0{,}02$)

3.1.3. В ящике 10 % бракованных деталей. Наудачу отобрано 5 деталей. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей среди пяти отобранных и построить многоугольник распределения.

Ответ:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,590	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

3.1.4. Подбрасывается три монеты. Записать закон распределения случайной величины X – числа выпадений цифры на трех монетах.

Ответ:

X	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

3.1.5. В коробке 9 шаров, из которых 5 белых. Из коробки наудачу извлекают 4 шара. Найти закон распределения случайной величины X – числа белых шаров в выборке.

Ответ:

X	0	1	2	3	4
p	1/126	20/126	60/126	40/126	5/126

3.1.6. В партии из 14 деталей имеется 3 нестандартных. Из партии наудачу взято 4 детали. Найти закон распределения случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

Ответ:

X	1	2	3	4
p	11/1001	165/1001	495/1001	330/1001

3.1.7. Подбрасывается два игральных кубика. Найти закон распределения случайной величины, равной сумме выпавших очков на двух игральных кубиках.

Ответ:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

3.1.8. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна p. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Рассматривается случайная величина X – числа патронов, выданных стрелку. Составить закон распределения дискретной случайной величины X.

Ответ:

X	1	2	3	…	n	…
p	q	pq	p^2q	…	$p^{n-1}q$	…

3.2 Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений, называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{3.2.1}$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. Поэтому математическое ожидание случайной величины называют ее ***средним значением***.

Математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей бесконечную последовательность значений, определяется формулой

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,, \tag{3.2.2}$$

если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной

$$M(C) = C \ \ (C = const)\,. \tag{3.2.3}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожи-

дания

$$M(CX)=CM(X) \ \ (C=const). \qquad (3.2.4)$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий

$$M(X \pm Y)=M(X) \pm M(Y). \qquad (3.2.5)$$

4. Математическое ожидание произведения двух и более независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot \ldots \cdot M(X_n). \qquad (3.2.6)$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании

$$M(X)=np. \qquad (3.2.7)$$

Отклонением $X-M(X)$ называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1-M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность этого события равна p_1. Следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1-M(X)$, также равна p_1. Закон распределения отклонения имеет вид:

X-$M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	...	$x_n-M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M(X-M(X))=0. \qquad (3.2.8)$$

Дисперсией, или ***рассеянием***, случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right). \qquad (3.2.9)$$

Дисперсию удобно также вычислять по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (3.2.10)$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0 \ \ (C=const). \qquad (3.2.11)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X) \ \ (C=const). \qquad (3.2.12)$$

3. Дисперсия суммы двух и более независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \qquad (3.2.13)$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме

дисперсий этих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \qquad (3.2.14)$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятность появления и непоявления события в одном испытании

$$D(X) = npq. \qquad (3.2.15)$$

Средним квадратическим отклонением или ***стандартным отклонением*** случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (3.2.16)$$

Это выражение имеет смысл, так как из определения дисперсии (3.2.9) следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, то есть

$$D(X) \geq 0. \qquad (3.2.17)$$

ЗАДАЧИ

3.2.1. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 5X + Y$, если известно, что $M(X) = 3, M(Y) = 2$. (Ответ: 17)

3.2.2. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 15 + 9X$, если известно, что $M(X) = 7$. (Ответ: 78)

3.2.3. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y: $M(X) = 2, M(Y) = 5$. Найти математические ожидания суммы, разности и произведения этих величин. (Ответ: 7; -3; 10)

3.2.4. Доказать формулы (3.2.8) и (3.2.10).

3.2.5. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X заданной законом распределения:

а)

X	-2	1	3
p	0,2	0,7	0,1

б)

X	1/3	$1/3^2$	$1/3^3$	...	$1/3^k$	...
p	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^k$	...

в)

X	1	2	3	...	n	...
p	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

(Ответ: а) $0{,}6$; б) $1/5$; в) $1/p$)

3.2.6. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей:

X	2	4	6	8	10	12
p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

Запишите закон распределения случайных величин $3X$, $X/2$. Найдите математическое ожидание случайных величин $X, 3X, X/2$. (Ответ: $26{,}6; 79{,}8; 13{,}3$)

3.2.7. Подбрасывается две монеты. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу появления «герба» на двух монетах. (Ответ: 1)

3.2.8. Дискретная случайная величина X принимает значения: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3, если известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 0{,}2; M(X^2) = 0{,}8$.
(Ответ: $p_1 = 0{,}05;\ p_2 = 0{,}8;\ p_3 = 0{,}15$)

3.2.9. Найти дисперсию случайной величины $Z = X + 6Y$, если известно, что $D(X) = 3, D(Y) = 5$. (Ответ: 183)

3.2.10. Вычислить дисперсию случайной величины X по формуле (3.2.9) и по формуле (3.2.10) и среднее квадратическое отклонение, если закон распределения имеет вид:

а)

X	-2	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

б)

X	-2	-1	3
p	0,2	0,6	0,2

(Ответ: а) 1,6; 1,26; б) 3,04; 1,74)

3.2.11. Монета подбрасывается четыре раза. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа выпадений герба при этих подбрасываниях. (Ответ: 2; 1; 1)

3.2.12. В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна $0{,}8$, второй – 0,6 и третьей – 0,4. Найти математическое ожидание и дисперсию числа правильно решенных задач. (Ответ: $M(X) = 1{,}8, D(X) = 0{,}64$)

3.3 Функция распределения дискретной случайной величины

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.3.1}$$

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция» или «интегральный закон» распределения.

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k), \tag{3.3.2}$$

где неравенство $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. Функция, определяемая выражением (3.3.2), является разрывной.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется ***непрерывной случайной величиной***. Ее функция распределения является непрерывно дифференцируемой.

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0,1], то есть

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (3.3.3)$$

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, то есть

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1. \qquad (3.3.4)$$

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то для ее функции распределения

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a, \; F(x) = 1 \text{ при } x \ge b. \qquad (3.3.5)$$

4. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), F(x_0 - 0) = F(x_0). \qquad (3.3.6)$$

5. Если возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty,+\infty)$, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1. \qquad (3.3.7)$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a,b)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (3.3.8)$$

Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно определенное значение, равна нулю. Поэтому справедливы равенства:

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b). \qquad (3.3.9)$$

ЗАДАЧИ

3.3.1. Найти функцию распределения и построить ее график, если дискретная случайная величина задана таблицей распределения:

а)

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

X	0	3	6
P	0,2	0,3	0,5

Ответ: а) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, \\ 0{,}1, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}4, \text{ если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}8, \text{ если } 3 < x \le 4, \\ 1, \text{ если } x > 4, \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 0{,}2, \text{ если } 0 < x \le 3, \\ 0{,}5, \text{ если } 3 < x \le 6, \\ 1, \text{ если } x > 6. \end{cases}$

3.3.2. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	3	6	8	12
P	0,1	0,25	0,5	0,15

Найти функцию распределения этой случайной величины. Найдите вероятность того, что $3 < X \le 8$.

(Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 3, \\ 0{,}1, \text{ если } 3 < x \le 6, \\ 0{,}35, \text{ если } 6 < x \le 8, \\ 0{,}85, \text{ если } 8 < x \le 12, \\ 1, \text{ если } x > 12, \end{cases}$; 0,35)

3.3.3. В партии из 25 деталей имеется 10 стандартных. Из этой партии наудачу взято 4 детали. Найти функцию распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

3.3.4. Проверить, является ли функция $F(x)$ функцией распределения некоторой случайной величины

а) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ x^3, \text{ если } 0 < x \le 3, \\ 1, \text{ если } x > 3, \end{cases}$

в) $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

(Ответ: а) является; б) не является; в) не является)

3.3.5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ x/5, \text{ если } 0 < x \le 5 \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(1, 3)$. (Ответ: $0{,}4$)

3.3.6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1 \\ \dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{4}, \text{ если } 1 < x \le \dfrac{9}{5} \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{9}{5} \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение: а) меньшее $0{,}5$; б) меньшее $1{,}5$; в) не меньше $1{,}5$; г) не меньше 2. (Ответ: а) 0; б) 0,625; в) 0,375; г) 0)

3.3.7. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка $0{,}8$, а для второго – 0,6. Найти функцию распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти вероятность события $X \geq 1$. (Ответ: 0,92)

3.4 Плотность распределения

Случайная величина называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x)$ является непрерывно дифференцируемой.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (3.4.1)$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (3.4.2)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения $f(x)$ – неотрицательная функция, то есть

$$f(x) \geq 0. \qquad (3.4.3)$$

2. Несобственный интеграл от плотности распределения по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (3.4.4)$$

3. Если всевозможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1. \qquad (3.4.5)$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (3.4.6)$$

ЗАДАЧИ

3.4.1. Найти значение постоянного параметра C, если функция плотности распределения случайной величины X имеет вид: а) $f(x) = \dfrac{C}{1+4x^2}$,

б) $f(x) = C\sin 4x$, в интервале $(0, \dfrac{\pi}{4})$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

(Ответ: а) $C = 2/\pi$; б) $C = 2$)

3.4.2. Проверить, являются ли нижеприведенные функции $f(x)$ функциями плотности вероятности. Найти (где это возможно) вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (a,b):

а) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ при } x>0,\end{cases}$ $a=1$, $b=3$; б) $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{4}{\pi}\sin^2 x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $a=0$, $b=\dfrac{\pi}{4}$;

в) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0 \text{ и } x>1,\\ x(1-x), \text{ при } 0<x\le 1;\end{cases}$ г) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(Ответ: а) $0{,}4$; б) $0{,}182$; в), г) не является функцией плотности вероятности)

3.4.3. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \sin 3x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{6},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

Найти ее плотность распределения. Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $\left(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{9}\right)$. (Ответ: $f(x)=3\cos 3x$ в интервале $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$; вне интервала $f(x)=0$, $P=0{,}15$)

3.4.4. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

а) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \sin x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0 \text{ и } x>2,\\ x, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 2-x, \text{ при } 1<x\le 2.\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики функций $f(x)$, $F(x)$.

Ответ: а) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ 1-\cos x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0\\ x^2/2, \text{ при } 0<x\le 1,\\ -x^2/2+2x-1, \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$

3.4.5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X

имеет вид $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0\\ Cxe^{-2x}, \text{при } x\geq 0\end{cases}$. Найти значение коэффициента C и функцию распределения $F(x)$.

(Ответ: C=4, $F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0,\\ -2xe^{-2x}-e^{-2x}+1, \text{при } \ x\geq 0.\end{cases}$)

3.4.6. На отрезок [0,2] случайным образом бросается точка. Пусть X – случайная величина – расстояние от нее до начала координат. Найти функцию распределения X, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
(Ответ: $M(X)=1, D(X)=1/3$)

3.5 Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{3.5.1}$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$, то

$$M(x)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx. \tag{3.5.2}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(x)\right)^2 f(x)dx, \tag{3.5.3}$$

или

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(x)\right)^2, \tag{3.5.4}$$

если этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Если все возможные значения принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$, то формулы (3.5.3) и (3.5.4) примут вид

$$D(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(x-M(x)\right)^2 f(x)dx \text{ и } D(x)=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-\left(M(x)\right)^2. \tag{3.5.5}$$

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}\,. \tag{3.5.6}$$

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X < M_e(X)] = P[X > M_e(X)].$$

Геометрически медиану можно истолковывать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

ЗАДАЧИ

3.5.1. Доказать, что дисперсию непрерывной случайной величины можно вычислить по формуле (3.5.4).

Указание. Для доказательства воспользуйтесь формулой (3.5.3) и равенствами (3.4.4) и (3.5.1).

3.5.2. Найти числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, если известна функция распределения этой величины

а) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ x^3, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ если } x > 1, \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ \sin 2x, \text{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -1, \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, \text{ если } -1 < x \le 1, \\ 1, \text{ если } x > 1, \end{cases}$ г) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 2, \\ (x-2)^2, \text{ если } 2 < x \le 3, \\ 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

(Ответ: а) $M(X) = 3/4, D(X) = 3/80, \ \sigma = 0{,}19$; б) $M(X)=0{,}285$, $D(X)=1{,}88$, $\sigma(X)=1{,}37$; в) $M(X) = 0, D(X) = 0{,}333$; г) $M(X) = 2{,}667, D(X) = 0{,}056$)

3.5.3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}$ $(-\infty, \infty)$. Найти математическое ожидание случайной величины X. (Ответ: $M(X) = 0$)

3.5.4. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{8}x$ в интервале $(0{,}4)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X. (Ответ: $D(X) = 0{,}89$)

3.5.5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$f(x)=1/(\pi\sqrt{9-x^2})$ в интервале $(-3{,}3)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X. (Ответ: $D(X)=4{,}5$)

Указания. Для вычисления интегралов типа $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ используется подстановка $x=a\sin t$.

3.5.6. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2\cos 2x$ в интервале $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти : а) моду; б) медиану X. (Ответ: $M_e=\pi/12$)

3.5.7. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=-x^2+8x-15$ в интервале $(3{,}5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану X. (Ответ: $M_0=M(X)=M_e=4$)

3.6 Начальные и центральные теоретические моменты

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k=M(X^k). \tag{3.6.1}$$

Тогда начальный момент первого и второго порядка имеет вид

$$\nu_1=M(X),\ \nu_2=M(X^2). \tag{3.6.2}$$

И формулу для вычисления дисперсии можно записать в виде:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\nu_2-\nu_1^2. \tag{3.6.3}$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X-M(X))^k$:

$$\mu_k=M[(X-M(X))^k]. \tag{3.6.4}$$

В частности,

$$\mu_1=M[X-M(X)]=0, \tag{3.6.5}$$

$$\mu_2=M[(X-M(X))^2]=D(X). \tag{3.6.6}$$

При вычислениях удобно использовать формулы, выражающие центральные моменты через начальные

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2, \tag{3.6.7}$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3, \tag{3.6.8}$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4. \tag{3.6.9}$$

***Пример* 1.** Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2
P	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

Решение. Найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}6 = 1{,}6;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1^2\cdot 0{,}4 + 2^2\cdot 0{,}6 = 2{,}8;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1^3\cdot 0{,}4 + 2^3\cdot 0{,}6 = 5{,}2.$$

Вычислим центральные моменты:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2{,}8 - (1{,}6)^2 = 0{,}24;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 5{,}2 - 3\cdot 1{,}6\cdot 2.8 + 2\cdot(1{,}6)^3 = -0{,}48.$$

Значения μ_2 и μ_3 также можно найти по формуле (3.6.4)

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = (1-1{,}6)^2\cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^2\cdot 0{,}6 = 0{,}24,$$

$$\mu_3 = M[(X - M(X))^3] = (1-1{,}6)^3\cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^3\cdot 0{,}6 = -0{,}48.$$

ЗАДАЧИ

3.6.1. Доказать, что центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков связаны с начальными моментами формулами (3.6.7), (3.6.8), (3.6.9).

3.6.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X. (Ответ: $\nu_1 = 3{,}9; \nu_2 = 16{,}5; \nu_3 = 74{,}1$)

3.6.3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.
(Ответ: $\nu_1 = 3; \nu_2 = 10{,}2; \nu_3 = 37{,}8; \mu_1 = 0; \mu_2 = 1{,}2; \mu_3 = 0$)

3.6.4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5
P	0,2	0,8

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

(Ответ: $\mu_1 = 0; \mu_2 = 0{,}64; \mu_3 = 0{,}77; \mu_4 = 1{,}33$)

3.6.5. Доказать, что начальный момент нулевого порядка равен единице, а начальный момент первого порядка случайной величины X равен ее математическому ожиданию.

3.6.6. Доказать, что центральный момент нулевого порядка равен единице; центральный момент первого порядка равен нулю; центральный момент второго порядка случайной величины X равен дисперсии этой величины.

ВОПРОСЫ

1. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
2. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
3. Как можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
4. Какой закон распределения называется биномиальным?
5. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
6. Какое другое название используют для математического ожидания?
7. Назовите свойства математического ожидания случайной величины.
8. Как можно записать математическое ожидание биномиального распределения?
9. Что называют отклонением случайной величины от ее математического ожидания?
10. Чему равно математическое ожидание отклонения?
11. Дайте определение дисперсии случайной величины.
12. По какой формуле можно вычислять дисперсию?
13. Назовите свойства дисперсии случайной величины.
14. Что называют средним квадратическим отклонением?
15. Дайте определение функции распределения случайной величины?
16. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
17. Назовите свойства функции распределения случайной величины.
18. Как с помощью функции распределения $F(X)$ вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a, b)$?
19. Дайте определение плотности распределения случайной величины.
20. Как выражается функция распределения через плотность распределения?
21. Как выражается плотность распределения через функцию распределения?
22. Как с помощью плотности распределения найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b)?
23. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?
24. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат промежутку $(-\infty, +\infty)$?
25. По каким формулам можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, если все возможные значения принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?

26. По каким формулам можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, если все возможные значения принадлежат промежутку $(-\infty,+\infty)$?
27. Что называют модой непрерывной случайной величины X ?
28. Что называют медианой непрерывной случайной величины X ?
29. Что называют начальным моментом k -го порядка случайной величины?
30. Что называют центральным моментом k -го порядка случайной величины?
31. Чему равны начальные моменты первого и второго порядка?
32. Чему равны центральные моменты первого и второго порядка?
33. Запишите формулы, выражающие центральные моменты через начальные.

4 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Вся информация о случайной величине заключена в ее законе распределения. Поэтому, зная закон распределения случайной величины, можно находить любые вероятности событий, связанных с этой случайной величиной. Некоторые частные виды распределения дискретных и непрерывных случайных величин особенно часто встречаются в прикладных задачах теории вероятностей. Для вычисления их основных числовых характеристик удобно пользоваться готовыми формулами.

4.1 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***равномерному закону*** на интервале $[a,b]$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ при } a\le x\le b; \\ 0, \text{ при } x>b. \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le a, \\ \dfrac{x\text{-}a}{b\text{-}a}, \text{ при } a<x<b, \\ 1, \text{ при } x\ge b. \end{cases} \qquad (4.1.2)$$

Числовые характеристики для равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad (4.1.3)$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \qquad (4.1.4)$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (4.1.5)$$

Вероятность того, что случайная величина, равномерно распределенная в интервале (α,β), принадлежащем $[a,b]$, выражается формулой

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (4.1.6)$$

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина X принимает значения в конечном промежутке $[a,b]$. Все значения из этого промежутка возможны в одинаковой степени, причем ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими. Например, время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого; ошибка отсчета показаний стрелочного прибора распределена равномерно на отрезке, равном цене деления.

***Пример* 1.** Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут?

Решение. Пусть X — время начала работы передатчика в часах. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, следует считать, что X — случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [12; 14]. Тогда ее плотность распределения примет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<12; \\ \dfrac{1}{14-12}=0{,}5, \text{ при } 12\le x\le 14; \\ 0, \text{ при } x>14. \end{cases}$$

Искомую вероятность находим по формуле (4.1.6)

$P(12<X<12{,}25)=\int_{12}^{12.25} 0{,}5dx=0{,}125$. При этом учтено, что 15 мин = 0,25 ч.

Ответ: 0,125.

***Пример* 2**. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 ампера. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,03 ампера. Найти математическое ожидание, дисперсию ошибки округления отсчета и функцию $f(x)$.

Решение. Ошибку округления отсчета можно считать распределенной равномерно на [0; 0,1], то есть a = 0, b = 0,1. Тогда дифференциальная функция распределения $f(x)$ будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0; \\ \dfrac{1}{0,1-0}=10, \text{ при } 0\le x\le 0,1; \\ 0, \text{ при } x>0,1. \end{cases}$$

Найдем

$M(X)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{0+0,1}{2}=\dfrac{0,1}{2}=0,05;$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(0.1-0)^2}{12}=\dfrac{0,01}{12}=0,0008.$

$$P(0,03<X<0,07)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{0,07-0,03}{0,1-0}=\frac{0,04}{0,1}=0,004.$$

Ответ: 0,05; 0,0008; 0,004.

ЗАДАЧИ

4.1.1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [−2; 10]. Найти $M(X)$. (Ответ: 4)

4.1.2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [10; 12]. Найти $D(X)$. (Ответ: 1/3)

4.1.3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2; 4]. Найти $D(X)$. (Ответ: 1/3)

4.1.4. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+6], причем $M(X)=8$. Найти число a. (Ответ: 5)

4.1.5. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+4], причем $M(X)=6$. Найти число a. (Ответ: 4)

4.1.6. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+8], причем $M(X)=7$. Найти число a. (Ответ: 3)

4.1.7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+2], причем $M(X)=5$. Найти число a. (Ответ: 4)

4.1.8. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [1; b], причем $D(X)=3$. Найти b. (Ответ: 7)

4.1.9. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; b], причем $D(X)=1/3$, $P(10\le X\le 20)=0,5$, $P(5\le X\le 15)=1$. Найти числа a, b. (Ответ: 9, 11)

4.1.10. Случайная величина X равномерно распределена, причем $M(X)=3$. Функция плотности вероятностей $f(x)$ принимает значения 0 и 0,5. Найти дисперсию $D(X)$. (Ответ: 1/3)

4.1.11. Случайная величина X имеет равномерное распределение на [3; 5]. Найти дифференциальную и интегральную функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию и $P(2<X<4)$. (Ответ: 4; 1/3; 0,5)

4.1.12. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение на отрезке [19, 20]. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 час 22 минут до 19 час 46 минут. (Ответ: 0,4)

4.1.13. Случайная величина X — отклонение емкости конденсатора от номинала распределена равномерно на отрезке [-50, 50]. Найти плотность распределения и функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию, $P(10 < X < 30)$. (Ответ: 0; 2500/3; 0,2)

4.1.14. Маршрутное такси ходит строго по расписанию с интервалом 5 минут. К остановке подошел пассажир. Время ожидания такси есть равномерно распределенная случайная величина. Записать ее плотность и функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что пассажир будет ожидать такси менее одной минуты. (Ответ: 2,5; 25/12; 0,2)

4.2 Биномиальное распределение

Пусть производятся испытания по схеме Бернулли: в одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью q $(q = 1 - p)$.

Через X обозначим число наступлений события A в серии из n опытов.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по ***биномиальному закону***, если свои возможные значения $0, 1, \ldots, n$ она принимает с вероятностями

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (4.2.1)$$

Постоянные n и p называются ***параметрами*** биномиального распределения.

Случайная величина X имеет ряд распределения

x	0	1	2	3	$\ldots$	n
$P(X = x)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	$\ldots$	p^n

Функция распределения для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ при } 0 < x \le n; \\ 1, \text{ при } x > n. \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

Числовые характеристики для биномиального распределения:

$$M(X) = np, \qquad (4.2.3)$$

$$D(X) = npq, \qquad (4.2.4)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \qquad (4.2.5)$$

***Пример* 1.** В партии 5 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны 5 деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди пяти отобранных; найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Дискретная случайная величина X — число нестандартных деталей имеет биномиальное распределение и может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Вероятность нестандартной детали в партии $p = 5/500 = 0{,}05$.

Найдем вероятности этих возможных значений:

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^5 = 0{,}7737809$; $P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^4 = 0{,}2036267$;

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^3 = 0{,}02143433$; $P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^2 = 0{,}0011281$;

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^1 = 0{,}0000297$; $P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^0 = 0{,}0000003$.

Напишем искомый закон распределения

x	0	1	2	3	4	5
p	0,7737809	0,2036267	0,02143433	0,0011281	0,0000297	0,0000003

Найдем числовые характеристики:

$$M(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}7737809 + 1 \cdot 0{,}2036267 + 2 \cdot 0{,}0214343 + 3 \cdot 0{,}0011281 +$$

$$+ 4 \cdot 0{,}0000297 + 5 \cdot 0{,}0000003 = 0.2499999 \approx 0{,}250$$

или по формуле (4.2.3) $M(X) = np = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25$.

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0^2 \cdot 0{,}7737809 + 1^2 \cdot 0{,}2036267 +$$

$$+ 2^2 \cdot 0{,}0214343 + 3^2 \cdot 0{,}0011281 + 4^2 \cdot 0{,}0000297 + 5^2 \cdot ,0000003 -$$

$$- 0.0625 = 0{,}2999995 - 0.0625 = 0{,}2374995 \approx 0{,}2375$$

или по формуле (4.2.4) $D(X) = npq = 5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}2375$.

Ответ: 0,250; 0,2375.

ЗАДАЧИ

4.2.1. Вероятность попадания в мишень в одном выстреле равна p = 0,6. Сделано 100 выстрелов. Пусть X – число попаданий. Найти $M(X)$, $D(X)$. (Ответ: 60; 24)

4.2.2. Игральную кость выбрасываем 30 раз. Случайная величина X – число шестёрок. Найти $M(X)$. (Ответ: 5)

4.2.3. Игральную кость выбрасываем 72 раза. Случайная величина X – число шестёрок. Найти $D(X)$. (Ответ: 10)

4.2.4. Игральную кость выбрасываем 36 раз. Случайная величина X – число шестёрок. Найти $D(X)$. (Ответ: 5)

4.2.5. Игральную кость выбрасываем 144 раз. Случайная величина X – число единиц. Найти $D(X)$. (Ответ: 20)

4.2.6. Игральную кость выбрасываем n раз. Случайная величина X – число шестёрок, для которой $D(X)=10$. Найти число n. (Ответ: 72)

4.2.7. Наудачу выбраны 10 человек. Найти числовые характеристики числа людей из этих 10 человек, которые родились в мае.

4.2.8. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение следующих случайных величин:
а) числа гербов при выбрасывании 20 монет;
б) числа попадания в мишень из 50-ти выстрелов, если вероятность попадания в одном выстреле равна $p=0{,}6$;
в) числа точек, попавших на отрезок [3; 7] при выбрасывании наудачу 30 точек на отрезок [1; 15].
(Ответ: а) 10; 5; 2,236; б) 30; 12; 3,464; в) 60/7; 300/49; 2,474)

4.2.9. По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X числа брусков с зазубринами среди случайно взятых 4 брусков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. (Ответ: 1,2; 0,84; 0,916)

4.2.10. В планово-экономическом отделе предприятия имеется 4 компьютера. Вероятность работы одного компьютера без ремонта в течение месяца составляет 0,9. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X числа компьютеров в отделе, проработавших в течение месяца без ремонта. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. (Ответ: 3,6; 0,36; 0,6)

4.2.11. 20 % изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X — числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке. (Ответ: 30; 24)

4.2.12. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша одного билета равна 0.1. Найти дисперсию числа успехов в данном опыте. (Ответ: 2; 1.8)

4.2.13. Проводятся 3 независимых испытания, в каждом из которых вероятность наступления некоторого события A постоянна и равна p. Пусть X — число появления события A в этом опыте. Найти $D(X)$, если известно, что $M(X)=2{,}1$. (Ответ: 0,63)

4.2.14. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 80 попаданий в цель? (Ответ: 200)

4.2.15. Контрольная работа по теории вероятности состоит из 6 задач. Вероятность решить правильно каждую задачу для данного студента равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа правильно решенных задач. (Ответ: 4,2; 1,26)

4.2.16. Известно, что среднее число попаданий в мишень в серии из n выстрелов равно 192; вероятность попадания при каждом выстреле равна p; $\sigma(X)=8$, где X — число попаданий. Найти n и p. (Ответ: 288; 2/3)

4.2.17. В боевой операции участвуют 30 самолетов. Вероятность гибели самолета в результате обстрела противником равна 1/15. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где X — число сбитых самолетов. (Ответ: 2; 1,37)

4.2.18. Успеваемость студентов 1 курса составляет 80 %. Найти математическое ожидание и дисперсию числа успевающих студентов среди 50 наудачу отобранных первокурсников. (Ответ: 40; 8)

4.2.19. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,86. Найти среднее число приемов радиосигнала при пятикратной передаче сигнала. (Ответ: 4,3)

4.2.20. По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где X — число попаданий в мишень. (Ответ: 2,1; 0,79)

4.3 Закон Пуассона (Закон редких событий)

Дискретная случайная величина X называется распределенной по ***закону Пуассона***, если свои возможные значения $0, 1, 2, 3, \ldots$ (счетное множество значений) она принимает с вероятностями

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \tag{4.3.1}$$

где k = 0, 1, 2, 3… и λ — параметр распределения.

Случайная величина X имеет ряд распределения:

x	0	1	2	3	…	m	…
$P(X=x)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	…

При этом
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X)=\lambda, \tag{4.3.2}$$

$$D(X)=\lambda, \tag{4.3.3}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\lambda}. \tag{4.3.4}$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального и приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число испытаний n велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала и $\lambda = np$ — среднее число появлений события в n испытаниях. Тогда (4.3.5)

$$P(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$, $\lambda = np$.

Примеры дискретных случайных величин, распределенных по закону Пуассона: число вызовов на телефонной станции за время t; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число $\alpha-$частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $\lambda = np$.

***Пример* 1.** Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Найти $P(X=3)$, если $\lambda=4$, а также математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. По формуле (4.3.1) находим $P(X=3)=\frac{4^3}{3!}e^{-4}=0{,}1952$. Согласно формулам (4.3.3) и (4.3.4) получаем $M(X)=4$, $D(X)=4$.

Ответ: 0,1952; 4; 4.

***Пример* 2.** Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна $p=0{,}002$. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n=1000$, $p=0{,}002$, $\lambda=np=2$.

Распределение Пуассона приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число испытаний $n=1000$ велико, а вероятность $p=0{,}002$ появления события в каждом испытании очень мала и $\lambda=np=2$ — среднее число появлений события в n испытаниях.

Пусть X — число обрывов нити за 1 минуту. Тогда
$P_n(X>3)=1-P_n(X\le 3)=1-P_n(0)-P_n(1)-P_n(2)-P_n(3)$. Применяя формулу (4.3.5), находим

$$P_n(X>3)\approx 1-e^{-2}\frac{2^0}{0!}-e^{-2}\frac{2^1}{1!}-e^{-2}\frac{2^2}{2!}-e^{-2}\frac{2^3}{3!}=0{,}1428.$$

Ответ: 0,1428.

ЗАДАЧИ

4.3.1. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda=0{,}324$. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины X. (Ответ: 0,324; 0,569)

4.3.2. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p=0{,}002$. Какова вероятность того, что при 1000 испытаниях событие A появится 5 раз? (Ответ: 0,0361)

4.3.3. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p = 0{,}0015$. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится 3 раза? (Ответ: 0,2242)

4.3.4. Вероятность изготовления нестандартной детали $p = 0{,}004$. Найти вероятность того, среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных. (Ответ: 0,1562)

4.3.5. Известно, что в принятой для сборки партии из 1000 деталей имеется 4 дефектных. Найдите вероятность того, что среди 50 наугад взятых деталей нет дефектных. (Ответ: 0,8187)

4.3.6. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p = 0{,}001$. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырех раз? (Ответ: 0,541)

4.3.7. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу придут 3 негодных изделия? (Ответ: 0,0613)

4.3.8. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия; б) ровно 1 изделие; в) не более трех изделий; г) более трех изделий? (Ответ: 0,0631; 0,3679; 0,9810; 0,0190)

4.3.9. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одну; б) менее 2; в) ровно 2; г) более 2 разбитых бутылок. (Ответ: 0,95; 0,1992; 0,224; 0,577)

4.3.10. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год? (Ответ: 0,1831; 0,2642)

4.3.11. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: “в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию”; “в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию”; “в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию”. (Ответ: 0,1563; 0,6289; 0,7619)

4.3.12. Коммутатор обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно 3 абонента; б) менее трех абонентов; в) более трех абонентов; г) хотя бы один абонент. (Ответ: 0,0613; 0,9177; 0,019; 0,6321)

4.3.13. На факультете обучается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения для k студентов данного факультета?

Вычислить эту вероятность для значений $k = 0, 1, 2, 3$. (Ответ: 0,2541; 0,3481; 0,2385; 0,1089)

4.3.14. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99 % случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4, ребенка? (Ответ: 0,3679; 0,1839; 0,0613; 0,0153)

4.3.15. Проверяется партия из 10000 изделий. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,002. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в этой партии. Найти вероятность того, что в партии есть хотя бы одно бракованное изделие. (Ответ: 20; 19,96; ≈ 1)

4.3.16. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов; найти вероятность того, что будет искажено не более 3–х символов. (Ответ: 4; 0,433)

4.3.17. Вероятность того, что частица, вылетевшая из радиоактивного источника, будет зарегистрирована счетчиком, равна 0,0001. За время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Найти вероятность того, что счетчик зарегистрировал: а) ровно 3 частицы; б) ни одной частицы; в) не менее 10 частиц. (Ответ: 0,2240; 0,0498; 0,0011)

4.3.18. Учебник издали тиражом 900 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) пять бракованных книг; б) хотя бы одну бракованную книгу. (Ответ: 0,6; 0,9999)

4.3.19. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно 3; б) менее 3; в) более 3; г) хотя бы одно. (Ответ: 0,061; 0,92; 0,019; 0,632)

4.3.20. Аппаратура содержит 3000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа которых равна 0,001. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного элемента? (Ответ: 0,95)

4.3.21. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,015. Сделано 600 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий не менее 7 и не более 10? (Ответ: 0,381)

4.4 Показательное (экспоненциальное) распределение. Функция надежности

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному (экспоненциальному) закону***, если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0, \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

где $\lambda > 0$ — параметр распределения.

Функция распределения для случайной величины X, распределенной по показательному закону, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \text{при} \ \ x<0; \\ 1-e^{-\lambda x}, \ \text{при} \quad x\ge 0. \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad (4.4.3)$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \quad (4.4.4)$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \quad (4.4.5)$$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по показательному закону, попадет в интервал (α,β), выражается формулой

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=(1-e^{-\lambda\beta})-(1-e^{-\lambda\alpha})=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}. \quad (4.4.6)$$

Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону: длительность работы прибора до первого отказа; длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания; продолжительность телефонного разговора; срок службы радиоэлектронной аппаратуры; время ожидания при техническом обслуживании; длина пути молекулы между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами; время обнаружения цели локатором.

Показательное распределение широко используется для расчета надежности различных систем (радиотехнических, электрических, механических и т. п.). Под надежностью понимается способность системы не отказывать в работе. Оказывается, время безотказной работы системы со случайными отказами имеет показательный закон распределения. Количественной характеристикой надежности является функция надежности $R(t)$, равная вероятности безотказной работы системы за время от 0 до t. Известно, что если в системе происходят только случайные отказы, то функция надежности имеет вид

$$R(t)=e^{-\lambda t}, \quad (4.4.7)$$

где $\lambda=\dfrac{1}{t_{cp}}$, t_{cp}— среднее время безотказной работы системы.

***Пример* 1.** Случайная величина X — время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов?

Решение. Так как $M(X)=400$, то по формуле (4.4.3) $\lambda=\dfrac{1}{400}$.

Искомая вероятность

$$P(X\ge 800)=1-P(X<800)=1-F(800)=1-(1-e^{-\frac{800}{400}})=e^{-2}\approx 0{,}135.$$

Ответ: 0,135.

***Пример* 2**. Время исполнения заказа на ремонт телеаппаратуры имеет показательный закон распределения со средним временем исполнения в 5 суток. Какова вероятность того, что сданный Вами в мастерскую телевизор починят не ранее чем через 4 суток?

Решение. Случайная величина X — время исполнения заказа. Так как по формуле (4.4.6) $P(0<X<4)=e^{-\frac{1}{5}\cdot 0}-e^{-\frac{1}{5}\cdot 4}=1-e^{-\frac{4}{5}}\approx 0{,}55$, то искомая вероятность $P(X>4)=1-P(0<X<4)=1-0{,}55=0{,}45$.

Ответ: 0,45.

***Пример* 3.** Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 20 мин. Какова вероятность того, что покупатель потратит на покупку не менее 10 и не более 15 мин?

Решение. Случайная величина X — время ожидания в очереди. Так как $M(X)=\frac{1}{3}$, то по формуле (4.4.3) $\lambda=3$. По формуле (4.4.6) искомая вероятность

$P(\frac{1}{6}<X<\frac{1}{4})=e^{-3\cdot\frac{1}{6}}-e^{-3\cdot\frac{1}{4}}\approx 0{,}134$.

Ответ: 0,134.

***Пример* 4.** Устройство состоит из двух последовательно соединенных независимо работающих блоков. Зная, что среднее время безотказной работы для первого и второго блоков составляет соответственно 200 ч, 150 ч. Найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов.

Решение. Найдем функции надежности для каждого блока. Учитывая, что $t_{ср1}=200\,ч$, $t_{ср2}=150\,ч$, имеем согласно (4.4.7) $R_1(t)=e^{-\frac{t}{t_{ср1}}}=e^{-\frac{t}{200}}$ и $R_2(t)=e^{-\frac{t}{t_{ср2}}}=e^{-\frac{t}{150}}$.

Находим вероятности безотказной работы каждого блока в течение 100 часов. Получаем $p_1=R_1(100)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}607$, $p_2=R_2(100)=e^{-\frac{2}{3}}\approx 0{,}513$. Значит, вероятность работы всего устройства равна $p_1\cdot p_2$=0,607·0,513≈0,311.

Ответ: 0,311.

***Пример* 5**. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0{,}02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}05t}$, t — время в часах. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Решение. Пусть A_i — событие, состоящее в безотказной работе i-го элемента в течение 6 часов ($i=1, 2$). Найдем вероятность безотказной работы элементов в течение 6 часов:

$P(A_1) = F_1(6) = 1 - e^{-0,02 \cdot 6} = 1 - e^{-0,12} \approx 0,113$,
$P(A_2) = F_2(6) = 1 - e^{-0,05 \cdot 6} = 1 - e^{-0,3} \approx 0,259$.

Тогда вероятности отказа в течение 6 часов первого и второго элементов составят $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,113 = 0,887$ и
$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,259 = 0,741$.

Поэтому вероятность отказа двух независимо работающих элементов составит по теореме умножения $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0,887 \cdot 0,741 \approx 0,657$.

Вероятность безотказной работы двух независимо работающих элементов по теореме умножения $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,113 \cdot 0,259 \approx 0,029$.

Вероятность отказа только одного элемента
$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2) = 0,113 \cdot 0,741 + 0,887 \cdot 0,259 \approx 0,313.$

Вероятность отказа хотя бы одного элемента
$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - P(A_1A_2) = 1 - 0,029 = 0,971$.

Ответ: а) 0,657; б) 0,029; в) 0,313; г) 0,971.

ЗАДАЧИ

4.4.1. Случайная величина X распределена по показательному закону $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0,1; 0,7). (Ответ: 0,572)

4.4.2. Случайная величина X распределена по показательному закону $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0.1;1). (Ответ: 0,691)

4.4.3. Случайная величина X распределена по показательному закону $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 6e^{-6x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0.2;1.1). (Ответ: 0,512)

4.4.4. Математическое ожидание показательно распределенной случайной величины X равно $M(X) = 5$. Найти вероятность $P(X < 5)$. (Ответ: 0,632)

4.4.5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,4$. Найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (0,25; 5). (Ответ: 0,77)

4.4.6. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем $M(X)$. (Ответ: 0,632)

4.4.7. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Найти $M(X)$ и $P(|X - M(X)| < 3\sigma(X))$ (Ответ: 0,2; 0,98)

4.4.8. 90 % лампочек перегорают после 800 часов работы. Найти вероятность того, что лампочка перегорит в промежутке от 100 до 200 часов работы (Случайная величина X — время безотказной работы лампочки). (Ответ:

0,108)

4.4.9. Случайная величина X, которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t) = 0{,}003e^{-0{,}003 \cdot t}$, $t \geq 0$. Найти среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент проработает не менее 400 часов. (Ответ: 333,(3), 0,30)

4.4.10. Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 минуты. Найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут, считая, что время разговора является случайной величиной X, распределенной по показательному закону. (Ответ: 0,95)

4.4.11. Время обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону, причем $1/\lambda = 10$ с – среднее время обнаружения цели. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска. (Ответ: 0,383)

4.4.12. Две электрические лампочки включены последовательно. Время работы каждой лампы имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}004/\text{ч}$. Найти вероятность того, что в течение 100 часов лампы будут гореть. (Ответ: 0,449)

4.4.13. Время ожидания у бензоколонки является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания 15 минут. Найти вероятность события $A = (5 \text{ мин} < X < 7{,}5 \text{ мин})$. (Ответ: 0,11)

4.4.14. Время t телефонного разговора — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4/\text{мин}$. Найти вероятность того, что разговор будет продолжаться более трех минут. (Ответ: 0,435)

4.4.15. 98 % топливных насосов дизельных тракторов выходит из строя после 3000 моточасов. Какова вероятность того, что насос выйдет из строя в интервале времени от 2000 до 2500 моточасов?

4.4.16. P%-ным ресурсом элемента называется такое число $t = 20$, что за время t элемент не выходит из строя с вероятностью P. Считается, что время t непрерывной работы электрической лампочки распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что лампочка будет гореть в течение 2 лет, если ее 90 %-ный ресурс составляет 6 месяцев. (Ответ: 0,656)

4.4.17. Линия связи состоит из двух каналов, основного и дублирующего. Моменты отказов каналов являются независимыми, показательно распределенными случайными величинами с параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}05$. Найти вероятность того, что линия связи будет исправно работать до момента времени $t = 20$. (Ответ: 0,603)

4.4.18. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение со средним значением для 1-го элемента 20 часов, 2-го — 25 часов. Найти вероятность того, что за промежуток времени длительностью 10 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) хотя бы один элемент откажет. (Ответ: 0,130; 0,464; 0,870)

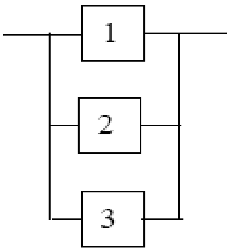
4.4.19. Известно, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону; при этом среднее время ремонта телевизора составляет две недели. Найти: а) $D(X)$ и $\sigma(X)$; б) вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется менее 10 дней. (Ответ: 196, 14, 0,51)

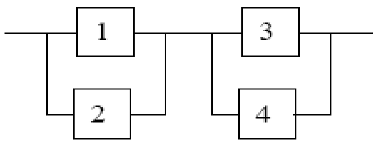
4.4.20. Для надежности схемы устанавливаются n параллельно соединенных и независимо работающих элементов, моменты отказов за единицу времени которых распределены по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}05$. Сколько нужно поставить таких элементов, чтобы с вероятностью 0.99 схема безотказно работала в течение времени $t = 10$ (ед. времени)? (Ответ: 10)

4.4.21. На новогодней елочке висит гирлянда из 10 последовательно соединенных разноцветных лампочек. Моменты сгорания каждой из них являются независимыми, показательно распределенными величинами с равными параметрами $\lambda = 0{,}01$, при этом время измеряется в часах. Найти среднее время работы гирлянды. (Ответ: 10 часов)

4.4.22. Устройство состоит из трех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рисунке ниже. Зная, что среднее время безотказной работы 1, 2, 3 блоков соответственно равны 500 ч, 800 ч, 1000 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 1500 часов. (Ответ: 0,375)

4.4.23. Устройство состоит из четырех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рисунке ниже. Зная, что среднее время безотказной работы 1, 2, 3, 4 блоков соответственно равны 100 ч, 200 ч, 300 ч, 50 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 120 часов. (Ответ: 0,479)





4.5 Нормальное распределение (Закон Гаусса)

Непрерывная случайная величина X называется ***нормально распределенной*** (распределенной по закону Гаусса), если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.5.1)$$

где a, σ — параметры распределения.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины представляется интегралом, не выражаемым через элементарные функции:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{4.5.2}$$

Этот «неберущийся» интеграл удобно выразить через табулированную функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{4.5.3}$$

Именно $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma}).$ (4.5.4)

Приближенное значение функции Лапласа $\Phi(x)$ берется из таблиц. Кроме того, эта функция обладает свойством: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и если $x > 5$, то $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Числовые характеристики нормального распределения:

$$M(X) = a, \tag{4.5.5}$$

$$D(X) = \sigma^2, \tag{4.5.6}$$

$$\sigma(X) = \sigma. \tag{4.5.7}$$

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина попадет в интервал (α, β), выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}). \tag{4.5.8}$$

Если $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, где δ — произвольное число, то

$$P(|x-a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) = \Phi(\frac{\delta}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}). \tag{4.5.9}$$

При $\delta = 3\sigma$ получаем $P(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$

Правило трех сигм. Если случайная величина подчинена нормальному закону, то вероятность ее отклонения от математического ожидания больше трех средних квадратичных ошибок, близка к нулю ($p = 0{,}0027$). Или практически достоверно, что нормальная случайная величина принимает значения в интервале $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$, так как $p = 0{,}9973$.

На практике многие случайные величины распределены нормально или почти нормально. Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону: ошибки измерений физических величин; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала; величины износа деталей в механизмах; урожайность сельскохозяйственной культуры с 1 га; величина шума в радиоприемном устройстве; производительность труда; колебания курса акций; суммарная выплата страхового общества за большой период; дальность полета снаряда; частота события при большом числе опытов; масса вылавливаемой рыбы одного вида; рост мужчин (женщин) одного возраста и национальности.

***Пример* 1.** Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$. Найти $P(12<X<14)$, $P(8<X<12)$, $P(X>12)$.

Решение. Из условия следует, что $a=10$, $\sigma=\sqrt{D(X)}=2$. В соответствии с формулой (4.5.8) находим

$$P(12<X<14)=\Phi(\frac{14-10}{2})-\Phi(\frac{12-10}{2})=\Phi(2)-\Phi(1)\approx 0{,}1359,$$

$$P(8<X<12)=\Phi(\frac{12-10}{2})-\Phi(\frac{8-10}{2})=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)\approx 0{,}6827,$$

$$P(12<X<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi(\frac{12-10}{2})=\Phi(\infty)-\Phi(1)\approx 0.5-\Phi(1)\approx 0{,}1587.$$

Ответ: 0,1359; 0,6827; 0,1587.

***Пример* 2.** Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$. Найти $P(0<X<10)$, если известно $P(10<X<20)=0.3$.

Решение. При нахождении искомой вероятности будем пользоваться формулой (4.5.8), условием $a=10$, нечетностью функции Лапласа.

По условию $P(10<X<20)=0.3$, поэтому

$$P(10<X<20)=\Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0=$$

$=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}3$. Так как $P(0<X<10)=\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right)=$

$=\Phi(0)-\Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)$ и $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}3$, то $P(0<X<10)=0{,}3$.

Ответ: 0,3.

***Пример* 3**. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X. Считая, что случайная величина X распределена нормально, с параметрами $a=10$ мм, $\sigma=0{,}1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. Воспользуемся формулой (4.5.9). В данном случае известно $a=10$, $\sigma=0{,}1$, $2\Phi(\delta/\sigma)=0{,}9973$; требуется определить δ и интервал $(a-\delta, a+\delta)$.

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta/\sigma=3$. Это вытекает из равенства $\Phi(\delta/\sigma)=0{,}9973/2=0{,}4987$.

Следовательно, $\delta=3\sigma=3\cdot 0{,}1=0{,}3$. Из неравенства $|X-10|<0{,}3$ получаем $9{,}7<X<10{,}3$. Значит, искомым является интервал (9,7; 10,3).

Ответ: (9,7; 10,3).

ЗАДАЧИ

4.5.1. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=1$, $D(X)=4$. Найти $P(3<X<5)$. (Ответ: 0,1359)

4.5.2. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=3$, $D(X)=1$. Найти $P(2<X<5)$. (Ответ: 0,8186)

4.5.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=3$, $D(X)=4$. Найти $P(-1<X<5)$, $P(X\le 8)$, $P(X\ge 5)$, $P(-3<X<9)$. (Ответ: 0,8185; 0,9938; 0,1587; 0,9972)

4.5.4. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=25$. Найти $P(35<X<40)$, если известно $P(10<X<15)=0{,}2$. (Ответ: 0,2)

4.5.5. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$. Найти $P(9<X<10)$, если известно $P(5<X<15)=0{,}8$. (Ответ: 0,1018)

4.5.6. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=7$, $D(X)=16$. Найти $P(|X-7|\le 2)$. (Ответ: 0,3830)

4.5.7. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=0$, $\sigma=0{,}5$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X по модулю будет меньше единицы. (Ответ: 0,9544)

4.5.8. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$. Чему равно $P(m-\sigma<X<m+\sigma)$, $P(m-2\sigma<X<m+2\sigma)$, $P(m-3\sigma<X<m+3\sigma)$?
(Ответ: 0,6827; 0,9545; 0,9973)

4.5.9. Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 16 % и среднеквадратичным отклонением 4 %. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12 % до 24 % золы. (Ответ: 0,819)

4.5.10. Автомат штампует шарики. Шарик удовлетворяет требованию стандарта качества, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера меньше 0,7. Отклонение X − нормальная величина, $\sigma(X)=0{,}4$. Сколько в среднем будет качественных шариков из изготовленных 100 шариков?
(Ответ: 92)

4.5.11. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma=0{,}4$ мм?
(Ответ: 95)

4.5.12. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

(Ответ: 0,8664)

4.5.13. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с $M(X)=50$ мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: *а*) более 55 мм; *б*) менее 40 мм. (Указание: из равенства $P(32<X<68)=1$ найти σ) (Ответ: 0,0823; 0,0027)

4.5.14. Диаметр изготавливаемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=4{,}5$ см, $\sigma=0{,}05$ см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наугад детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм. (Ответ: 0,9544)

4.5.15. При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону с параметром $\sigma=20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 30 г. (Ответ: 0,866)

4.5.16. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=375$ г, $\sigma=25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.
(Ответ: 0,9759; 0,9987; 0,9987)

4.5.17. Вероятность попадания в одном опыте нормальной случайной величины X в интервал (0; 20) равна 0,3. Найти вероятность попадания в интервал (0; 10), если $M(X)=10$. (Ответ: 0,3)

4.5.18. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $\sigma(X)=5$. Найти интервал (α,β), симметричный относительно $M(X)$ такой, что $P(\alpha<X<\beta)=0{,}9973$. (Ответ: (−5; 25))

4.5.19. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=16$, $\sigma(X)=2$. Найти интервал (α,β), в котором с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.
(Ответ: (12,08; 19,92))

4.5.20. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80 % ошибок не вышло за пределы ± 20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратичное отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. (Ответ: 15,6)

4.5.21. На станке изготавливаются втулки. Длина l втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеет среднее значение $l_{ср}$=20 см и дисперсию $\sigma=0{,}04\ см^2$. Найти вероятность того, что длина втулки заключена между 19,7 и 20,3 см. Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью 0,95. (Ответ: 0,87; 20 ± 4 см)

4.5.22. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должна иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одной потери вызова? (Ответ: 130)

ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеет плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$?
2. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$?
3. Как записываются числовые характеристики для равномерного распределения.
4. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Как найти вероятность попадания ее значений в интервал (α,β), принадлежащий данному отрезку?
5. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?
6. Как записываются числовые характеристики для биномиального распределения?
7. Запишите биномиальный закон распределения вероятностей случайной величины в виде таблицы.
8. Запишите формулу Пуассона.
9. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?
10. При каких условиях можно применять закон распределения Пуассона?
11. Как определяется показательное распределение случайной величины?
12. Какой вид имеет функция распределения для показательного закона?
13. Запишите числовые характеристики для показательного закона.
14. Случайная величина X распределена по показательному закону. Запишите вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (α,β).
15. Какое распределение вероятностей случайной величины называют нормальным?
16. Каков вероятностный смысл параметров a и σ, входящих в уравнение (4.5.1)?
17. Чему равно математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины.
18. Как вычислить вероятность попадания значений нормальной случайной величины в заданный интервал?
19. Сформулируйте правило трех сигм.

5 ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1 Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Во многих практических задачах результат опыта описывается не одной, а двумя (или более) случайными величинами X и Y. В этом случае говорят о ***двумерной случайной величине*** (X,Y) (**или *системе двух случайных величин***). Геометрически систему двух случайных величин (X,Y) можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

На двумерные случайные величины практически без изменений переносятся основные понятия для одномерных случайных величин, в частности закон распределения, функция распределения, плотность распределения и т. д.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие X и Y которой дискретны.

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$.

Закон распределения с. в. (X,Y) задаётся формулой

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \ i = 1,...,n, \ j = 1,...,m \tag{5.1.1}$$

или с помощью таблицы с двойным входом

$X \setminus Y$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Таблица 1

где $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$

В формуле (5.1.1) событие $(X = x_i, \ Y = y_j)$ означает произведение событий $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$.

По табл. 1 составляются ***(безусловные) законы распределения*** с. в. X и Y:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Таблица 2

Y	y_1	y_2	…	y_m
q	q_1	q_2	…	q_m

Таблица 3

где $p_i = P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im}, \ i = 1,...,n$ (суммируем по строкам),

$q_j = P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + ... + p_{nj}, \ \ j = 1,...,m$ (суммируем по столбцам).

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если независимы события $(X < x)$ и $(Y < y)$ для любых действительных чисел x и y. В противном случае случайные величины называются ***зависимыми***.

Дискретные с.в. X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \ \forall i = 1,...,n, \ j = 1,...,m. \tag{5.1.2}$$

Условным законом распределения одной из с.в., входящих в систему (X, Y), называется закон ее распределения, найденный при условии, что другая с.в. приняла определенное фиксированное значение (или попала в некий интервал).

Условные вероятности составляющих с.в. X и Y вычисляются по формулам

$$p\left(x_i \middle| y_j\right) = P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i,\, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)}, \qquad (5.1.3)$$

$$p\left(y_j \middle| x_i\right) = P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i,\, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)}. \qquad (5.1.4)$$

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называется совокупность условных вероятностей

$$p\left(x_1|y_j\right),\, p\left(x_2|y_j\right), \ldots, p\left(x_n|y_j\right), \qquad (5.1.5)$$

записывать которую удобно в виде таблицы $P_{Y=y_j}$

X	x_1	x_2	…	x_n
$P_{Y=y_j}$	$p\left(x_1\|y_j\right)$	$p\left(x_2\|y_j\right)$	…	$p\left(x_2\|y_j\right)$

Таблица 4

Условным распределением составляющей Y при $X = x_i$ называется совокупность условных вероятностей

$$p\left(y_1|x_i\right),\, p\left(y_2|x_i\right), \ldots, p\left(y_m|x_i\right). \qquad (5.1.6)$$

Y	y_1	y_2	…	y_m
$P_{X=x_i}$	$p\left(y_1\|x_i\right)$	$p\left(y_2\|x_i\right)$	…	$p\left(y_m\|x_i\right)$

Таблица 5

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Математическим ожиданием с. в. (X,Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ (т. е. упорядоченная пара $(M(X), M(Y))$), определяемых равенствами

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i\, p_{ij} \quad \text{и} \quad M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_i\, p_{ij}\,. \qquad (5.1.7)$$

Дисперсией с. в. (X,Y) называется пара

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))^2\, p_{ij} \quad \text{и} \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_i - M(Y))^2\, p_{ij}\,. \qquad (5.1.8)$$

Для практических расчётов используют формулы

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^2 p_{ij}-M^2(X) \quad \text{и} \quad D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_i^2 p_{ij}-M^2(Y) \qquad (5.1.9)$$

Найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ можно также используя (безусловные) распределения компонент X и Y (см. табл. 2 и 3):

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n, \qquad (5.1.10)$$

$$M(Y)=y_1p_1+y_2p_2+...+y_mp_m, \qquad (5.1.11)$$

$$D(X)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+...+x_n^2p_n-M^2(X), \qquad (5.1.12)$$

$$D(Y)=y_1^2q_1+y_2^2q_2+...+y_m^2q_m-M^2(Y). \qquad (5.1.13)$$

Математическое ожидание с. в. $\varphi(X,Y)$, являющейся ***функцией компонент*** с. в. (X, Y), находится по формуле:

$$M(\varphi(X,Y))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_i,y_j)\,p_{ij}\,. \qquad (5.1.14)$$

Условным математическим ожиданием с.в. X при условии $Y = y_j$ называется

$$M\left(X\,|Y=y_j\right)=M\left(X\,|\,y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p\left(x_1|y_j\right). \qquad (5.1.15)$$

Условным математическим ожиданием с.в. Y при условии $X = x_i$ называется

$$M\left(Y\,|\,X=x_i\right)=M\left(Y|\,x_i\right)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p\left(y_j|x_i\right). \qquad (5.1.16)$$

***Пример* 1.** Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Требуется:

а) найти законы распределения случайных величин X и Y;

б) установить, зависимы или нет компоненты X и Y;

в) найти условные законы распределения с.в. X при $Y = 2$ и с.в. Y при $X = 1$;

г) найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$;

д) Найти условные математические ожидания $M\left(X\,|Y=2\right)$ и $M\left(Y\,|\,X=1\right)$.

Решение.

а) Случайная величина X принимает два значения: $x_1=1$ и $x_2=2$. Вероятности находим в соответствии с таблицами 2, 3:

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}36$, $p_2 = 0{,}28 + 0{,}11 + 0{,}25 = 0{,}64$.

Аналогично строим закон распределения Y.

В таблицах получим

X	1	2
1	0,36	0,64

Y	1	2	3
1	0,44	0,23	0,33

б) Используем (5.1.2). Для $i=1,\ j=1$ имеем $P(X=x_1, Y=y_1)=p_{11}=0{,}16$,
$P(X=x_1)=0{,}36,\ P(Y=y_1)=0{,}44,\quad 0{,}16\neq 0{,}36\cdot 0{,}44=0{,}1584$

Следовательно, условие (5.1.2) не выполнено. Отсюда заключаем, что величины X и Y зависимы.

в) Используем формулы (5.1.3) − (5.1.6).

$$p(y_1|x_1)=\frac{P(X=x_1,\ Y=y_1)}{P(X=x_1)}=\frac{0{,}16}{0{,}36}=\frac{4}{9},\ p(y_2|x_1)=\frac{0{,}12}{0{,}36}=\frac{3}{9},\ p(y_3|x_1)=\frac{0{,}08}{0{,}36}=\frac{2}{9}.$$

Аналогично строим распределение с.в. X при $Y = 2$.

В таблицах получим

X	1	2
$P_{Y=2}$	12/23	11/23

Y	1	2	3
$P_{X=1}$	4/9	3/9	2/9

г) Используем формулы (5.1.10) − (5.1.13) и таблицы, построенные в п. *а*).

$M(X) = 1\cdot 0{,}36 + 2\cdot 0{,}64 = 1{,}64,\qquad M(Y) = 1\cdot 0{,}44 + 2\cdot 0{,}23+ 3\cdot 0{,}33 = 1{,}89,$

$D(X) = 1^2\cdot 0{,}36 + 2^2\cdot 0{,}64 - (1{,}64)^2 = 0{,}2304,$

$D(Y) = 1^2\cdot 0{,}44 + 2^2\cdot 0{,}23+ 3^2\cdot 0{,}33 - (1{,}89)^2 =0{,}7579,$

$\sigma(X)=\sqrt{0{,}2304}=0{,}48,\ \sigma(Y)=\sqrt{0{,}7579}\approx 0{,}87.$

д) Используем формулы (5.1.15), (5.1.16) и таблицы, построенные в п. *в*).

$$M(X\,|Y=2)=1\cdot\frac{12}{23}+2\cdot\frac{11}{23}=\frac{34}{23},\quad M(Y\,|X=1)=1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{3}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{9}.$$

ЗАДАЧИ

5.1.1. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

X\Y	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,03	0,02	0,11	*D*

Найти:

а) значение числа D;

б) законы распределения величин X и Y;

в) вероятности событий $(X = 1,\ Y \geq 2)$, $(X = Y)$ и $(XY \leq 2)$.

(Ответ: *а*) 0,2;

б)

x_i	1	2	3
p_i	0,35	0,29	0,36

y_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,2	0,3

в) 0,25; 0,29; 0,37)

5.1.2. Задано распределение двумерной случайной величины (*X*, *Y*)

X\Y	1	1,5	2
1	1/12	1/24	1/24
2	1/12	1/24	1/24
2,5	1/3	1/6	1/6

Найти одномерные распределения компонент системы. Установить, зависимы ли компоненты *X* и *Y*. Найти $P(X + Y \le 3{,}5)$.

(Ответ:

x_i	1	2	2,5
p_i	1/6	1/6	2/3

y_i	1	1,5	2
p_i	0,5	0,25	0,25

независимы; 5/8)

5.1.3. Используя условие задачи 5.1.1, установить, зависимы или нет случайные величины *X* и *Y*. (Ответ: зависимы)

5.1.4. Закон распределения системы дискретных случайных величин (*X*, *Y*) задан таблицей

X\Y	−2	−1	0	1
−1	1/16	2/16	3/16	1/16
0	2/16	3/16	1/16	0
1	0	1/16	0	2/16

Найти:

а) безусловные законы распределения случайных величин *X* и *Y*;

б) условный закон распределения с.в. *Y* при *X* = 0;

в) проверить независимость случайных величин *X* и *Y*.

(Ответ:

x_i	−1	0	1
p_i	7/16	6/16	3/16

y_i	−2	−1	0	1
p_i	3/16	6/16	4/16	3/16

y_i	−2	−1	0	1
$P_{X=0}$	1/3	1/2	1/6	0

5.1.5. Используя условие задачи 5.1.4, найти условный закон распределения: *а*) с.в. *Y* при *X* = −1; *б*) с.в. *X* при *Y* = −2; *в*) с.в. *X* при *Y* = 0.

Ответ:

y_i	−2	−1	0	1
$P_{X=-1}$	1/7	2/7	3/7	1/7

x_i	−1	0	1
$P_{Y=-2}$	1/3	2/3	0

x_i	−1	0	1
$P_{Y=0}$	3/4	1/4	0

5.1.6. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$.
(Ответ: 0,7; 0,6; 0,21; 0,24; ≈0,46; ≈0,49)

5.1.7. Используя условие задачи 5.1.2, найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.
(Ответ: $1\frac{3}{8}$; $\frac{11}{64}$; $\frac{\sqrt{11}}{8}$)

5.1.8. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) задан таблицей

$X\backslash Y$	−2	0	2
0,2	0,03	0,05	0,12
0,6	0,15	0,30	0,35

Найти математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$ и условные математические ожидания $M(X | Y = 2)$, $M(X | Y = 0)$, $M(Y | X = 0{,}2)$.
(Ответ: 0,52; 0,58; ≈0,498; 19/35; 0,9)

5.1.9. Используя условие задачи 5.1.4, найти:
$M(Y | X = -1)$, $M(X | Y = -2)$, $M(X | Y = 0)$. (Ответ: $-\frac{3}{7}; -\frac{1}{3}; -\frac{3}{16}$)

5.1.10. Монету подбрасывают 3 раза. Пусть X − количество гербов, выпавших в 1-м и 2-м испытаниях, Y − количество гербов, выпавших во 2-м и 3-м испытаниях. Найти: совместное распределение с.в. X и Y; вероятность события $(X = Y)$.
Ответ: $P = 0{,}5$;

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

5.1.11. Используя условие задачи 5.1.2, найти:
$P(X = 1 | Y = 2)$, $P(X = 2 | Y = 2)$, $P(X = 2{,}5 | Y = 2)$, $P\left(\sqrt{X^2 + Y^2} \le \sqrt{2}\right)$.
(Ответ: $\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{12}$)

5.1.12. Среди 10 лотерейных билетов есть 2 выигрышных. Сначала девушка вытягивает один билет, затем один билет вытягивает юноша. Описать закон распределения системы случайных величин (X,Y), где X − число выигрышных билетов у девушки, Y − у юноши. Найти: $P(X > Y)$.

Ответ: P = 8/45;

$X\backslash Y$	0	1
0	28/45	8/45
1	8/45	1/45

5.1.13. Производят два независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p. Пусть X − число попаданий в цель и Y − число промахов. Составить таблицу распределения и найти числовые хароактеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ системы (X,Y).

(Ответ:

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$(1-p)^2$
1	0	$2p(1-p)$	0
2	p^2	0	0

$M(X) = 2p$, $M(Y) = 2(1-p)$, $D(X) = 2p(1-p)$, $D(Y) = 2p(1-p)$)

5.1.14. Используя условие задачи 5.1.2, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

(Ответ: $\frac{13}{6}; \frac{11}{36}; \frac{\sqrt{11}}{6}$)

5.2 Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения вероятностей (иначе ***интегральной функцией***) двумерной случайной величины называют функцию $F(x, y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного выполнения двух событий $(X < x)$ и $(Y < y)$, то есть

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \qquad (5.2.1)$$

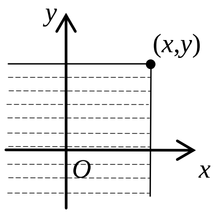


Рисунок 1

Геометрически это равенство можно истолковать так: каждое значение функции $F(x,y)$ равно вероятности попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины (см. рисунок 1).

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, находится по формуле:

$$P\left(x_1 \le X \le x_2,\, y_1 \le Y \le y_2\right) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \qquad (5.2.2)$$

<u>Свойства двумерной функции распределения:</u>

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x,y)$ не убывает по каждому из своих аргументов:

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $x_2 > x_1$ и y − фиксировано,

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, если $y_2 > y_1$ и x − фиксировано.

3. $F(x,y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов.

4. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$, где, например,

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y).$$

5. $F(+\infty,+\infty)=1.$

6. $F(x,+\infty)=F_1(x),\ F(+\infty,y)=F_2(y)$, где $F_1(x),\ F_2(y)$ − функции распределения составляющих с. в. X и Y соответственно.

7. С.в. X и Y независимы тогда и только тогда, когда $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$.

Для системы (X,Y) двух дискретных с. в.

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}p_{ij}. \quad (5.2.3)$$

***Пример* 1.** Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти функцию распределения системы с. в. (X,Y). Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D: $1,5\le X\le 4$; $1,5\le Y\le 5$.

Решение. В соответствии с формулой (5.2.3) $F(x,y)=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}p_{ij}$ значение $F(x,y)$ будем находить в точках каждой из 12-ти областей на плоскости (см. рис. 2).

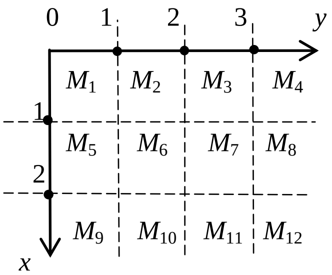


Рисунок 2

$M_1(0{,}5;0{,}5)$, $F(M_1)=\sum\limits_{x_i<0,5}\sum\limits_{y_j<0,5}p_{ij}=0$. Аналогично

$F(M_2)=F(M_3)=F(M_4)=F(M_5)=F(M_9)=0$.

$M_6(1{,}5;1{,}5)$, $F(M_6)=\sum\limits_{x_i<1,5}\sum\limits_{y_j<1,5}p_{ij}=p_{11}=0{,}16$ и т. д.

$M_{11}(2{,}5;2{,}5)$, $F(M_{11})=\sum\limits_{x_i<2,5}\sum\limits_{y_j<2,5}p_{ij}=$

$p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=0{,}16+0{,}12+0{,}28+0{,}11=0{,}67$

$$F(M_{12})=F(2{,}5;3{,}5)=\sum_{x_i<2,5}\sum_{y_j<3,5}p_{ij}=p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{21}+p_{22}+p_{23}=$$

$=0{,}16+0{,}12+0{,}08+0{,}28+0{,}11+0{,}25=1.$

Таким образом, функция распределения данной системы случайных величин имеет вид:

$F(x,y)=$

при	$y\le1$	$1<y\le2$	$2<y\le3$	$y>3$
$x\le1$	0	0	0	0
$1<x\le2$	0	0,16	0,28	0,36
$x>2$	0	0,44	0,67	1

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D найдём по формуле (5.2.2): $P\left(1{,}5 \le X \le 4;\ 1{,}5 \le Y \le 5\right) = F(4;\ 5) - F(1{,}5;\ 5) - F(4;\ 1{,}5) +$ $+F(1{,}5;\ 1{,}5) = 1 - 0{,}36 - 0{,}44 + 0{,}16 = 0{,}36.$

ЗАДАЧИ

5.2.1. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X \backslash Y$	-2	0	4
0	0,15	0,05	0
10	0,10	0,20	0,10
20	0,05	0,10	0,25

Найти функцию распределения $F(x,y)$. Найти условный закон распределения с.в. Y при $X = 20$. Выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y.

(Ответ:

$F(x,y) =$

при	$y \le -2$	$-2 < y \le 0$	$0 < y \le 4$	$y > 4$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 10$	0	0,15	0,20	0,20
$10 < x \le 20$	0	0,25	0,50	0,60
$x > 20$	0	0,30	0,65	1

;

y_i	-2	0	4
$P_{X=20}$	1/8	1/4	5/8

; X и Y зависимы)

5.2.2. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Пусть с.в. X — число попаданий; с.в. Y − число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей случайных величин (X,Y).

Написать функцию распределения $F(x,y)$ системы с.в. (X,Y).

Ответ:

$X \backslash Y$	0	1
0	0	0,25
1	0,75	0

$F(x,y) =$

при	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0	0,25
$x > 1$	0	0,75	1

5.2.3. Подбрасывают 2 монеты. Пусть X − число выпавших гербов, Y − модуль разности числа выпавших гербов и цифр. Пусть $F(x,y)$ – функция распределения с.в. (X,Y). Найти её значения $F(1{,}5;\ 3)$, $F(1;\ 2{,}5)$, $F(5;\ 1)$.

(Ответ: 0,75; 0,25; 0,5)

5.2.4. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором – 0,9. С.в. X – число попаданий при первом выстреле, Y − число попаданий при втором. Найти:

а) закон распределения системы случайных величин (X,Y);

б) безусловные законы распределения компонент X и Y и их функции распределения $F_1(x)$, $F_2(y)$; *в*) функцию распределения $F(x,y)$.

Ответ:

$X \backslash Y$	0	1
0	0,02	0,18
1	0,08	0,72

x_i	0	1
p_i	0,2	0,8

y_i	0	1
p_i	0,1	0,9

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 0{,}1, & 0<y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

$F(x,y)=$

при	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,02	0,20
$x > 1$	0	0,10	1

5.2.5. Заданы законы распределения двух независимых друг от друга случайных величин X и Y:

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,6

y_i	8	9	10
p_i	0,2	0,3	0,5

Написать функцию распределения $F(x,y)$ системы с.в. (X,Y) и вычислить её значения $F(9{,}2;\ 8{,}5)$, $F(8{,}5;\ 12)$.
(Ответ: 0,08; 0,17)

5.2.6. Функция распределения системы дискретных с. в. (X, Y) имеет вид

$F(x,y)=$

при	$y \le -4$	$-4 < y \le 1$	$1 < y \le 8$	$y > 8$
$x \le -2$	0	0	0	0
$-2 < x \le 3$	0	1/12	1 / 4	7/12
$x > 3$	0	1 / 4	7/12	1

Найти: таблицу распределения случайного вектора (X,Y); ряд распределения с.в. Y; вероятность события $(X > Y)$. (Ответ: 5/12)

$X \backslash Y$	-4	1	8
-2	1/12	1/6	1/3
3	1/6	1/6	1/12

Y	-4	1	8
p_i	1/4	1/3	5/12

5.3 Двумерная плотность вероятности непрерывной случайной величины

Непрерывной называют двумерную величину (X,Y), составляющие X и Y которой непрерывны.

Плотностью распределения вероятностей (или ***дифференциальной функцией***) непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}. \tag{5.3.1}$$

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy *к* площади этого прямоугольника, когда обе его стороны стремятся к нулю. Геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют ***поверхностью распределения***.

Свойства двумерной плотности распределения вероятностей:

1. $f(x,y)\ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$

   В частности, если все возможные значения (X,Y) принадлежат конечной области D, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=1.$
3. $P\big((X,Y)\subset D\big)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D − произвольная область.
4. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=f_1(x),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=f_2(y)$, где $f_1(x),\ f_2(y)$ − функции плотности распределения составляющих с. в. X и Y соответственно.
6. С.в. X и Y независимы тогда и только тогда, когда $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y=y$ называется отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)},\ \text{где}\ f_2(y)\ne 0. \tag{5.3.2}$$

Аналогично определяется условная плотность распределения с.в. Y:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)},\ \text{где}\ f_1(x)\ne 0. \tag{5.3.3}$$

Из формул (5.3.2), (5.3.3) следует, что

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f(y|x)=f_2(y)\cdot f(x|y). \tag{5.3.4}$$

Распределение двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) называют ***равномерным,*** если в области, которой принадлежат все возможные значения (x,y), плотность вероятностей $f(x,y)$ сохраняет постоянное значение.

Математические ожидания и дисперсии непрерывной двумерной с. в. (X,Y) находятся по формулам:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy \text{ или } M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\,dx, \quad (5.3.5)$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy \text{ или } M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\,dy, \quad (5.3.6)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x,y)\,dx\,dy - M^2(X) \text{ или } D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_1(x)\,dx - M^2(X), \quad (5.3.7)$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f(x,y)\,dx\,dy - M^2(Y) \text{ или } D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f_2(y)\,dy - M^2(Y). \quad (5.3.8)$$

Математическое ожидание с. в. $\varphi(X,Y)$, являющейся ***функцией компонент*** с. в. (X,Y), находится по формуле:

$$M(\varphi(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy. \quad (5.3.9)$$

Условное математическое ожидание с. в. X при условии $Y=y$ определяется равенством

$$M(X|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x|y)\,dx. \quad (5.3.10)$$

Аналогично

$$M(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(y|x)\,dy. \quad (5.3.11)$$

***Пример* 1.** Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(y-xy), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$. Требуется:

а) найти коэффициент с;

б) найти плотности распределения компонент X и Y;

в) найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область $D_1=\{(x,y)\colon 0{,}7\le x\le 3,\ 0\le y\le 0{,}3\}$.

г) найти совместную функцию распределения $F(x,y)$;

д) выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y;

е) найти условные плотности распределения компонент X и Y;

ж) найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

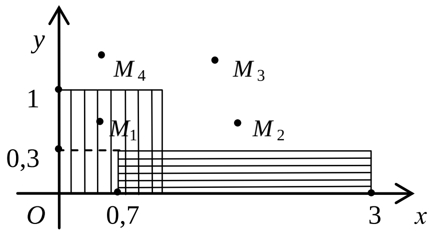


Рисунок 3

Области D и D_1 изображены на рисунке 3.

Решение.

а) Коэффициент c найдем из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 c\cdot(y-xy)dy = c\int\limits_0^1 (1-x)dx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{c}{2}\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{c}{4},$$

откуда $\frac{c}{4}=1$, то есть $c = 4$.

б) Находим плотности распределения компонент X и Y:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 4y(1-x)\,dy = 4(1-x)\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 2(1-x),$$

то есть $f_1(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x\in[0;1], \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 4y(1-x)\,dx = 4y\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 = 2y,$$

то есть $f_2(y) = \begin{cases} 2y, & y\in[0;1], \\ 0, & y\notin[0;1]. \end{cases}$

в) Для нахождения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в область D_1 воспользуемся формулой из свойства 3 плотности распределения:

$$P\Big((X,Y)\subset D_1\Big) = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{0,7}^{1} dx\int\limits_0^{0,3} 4(1-x)y\,dy + \int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{0,3} 0\,dy =$$

$$= 4\int\limits_{0,7}^{1}(1-x)\,dx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{0,3} = 2\cdot 0,09\cdot\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{0,7}^1 = 0,18\cdot\left(1-\frac{1}{2}-0,7+\frac{0,49}{2}\right) = 0,0081.$$

г) Для нахождения совместной функции распределения $F(x,y)$ воспользуемся формулой из свойства 4.

Рассмотрим возможные положения точки (x,y) на плоскости:

1) если точка (x,y) расположена во II четверти ($x < 0$, $y \geq 0$), либо в III

($x < 0, y < 0$), либо в IV четверти ($x \ge 0, y < 0$), то $F(x,y) = 0$, так как там всюду $f(x, y) = 0$;

2) если точка (x,y) расположена в I четверти, то она может находиться: (*а*) внутри области D (на рис. 3 точка M_1); (*б*) справа от области D, причём $y \le 1$ (точка M_2); (*в*) справа от области D, причём $y > 1$ (точка M_3); (*г*) над областью D, причем $x \le 1$ (точка M_4).

В случае (*а*) имеем

$$F(x, y) = 4\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} (1-u)v\,dv = 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du\int_{0}^{y} v\,dv = 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du \cdot \frac{y^2}{2} = xy^2(2-x).$$

В случае (б) получим

$$F(x, y) = 4\int_{0}^{1}(1-u)\,du \int_{0}^{y} v\,dv = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\bigg|_{0}^{y} = y^2.$$

В случае (*в*) имеем

$$F(x, y) = 4\int_{0}^{1}(1-u)\,du \int_{0}^{1} v\,dv = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = 1.$$

И, наконец, в случае (*г*):

$$F(x, y) = 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du \int_{0}^{1} v\,dv = 4\cdot\left(u - \frac{u^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{x}\cdot\frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = x(2-x).$$

Таким образом,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0,\ \text{или} & 0x; < 0\ 0,\quad x \ge \quad y < \\ xy^2(2-x), & (x, y) \in D, \\ y^2, & 0 \le y \le 1,\ x > 1, \\ x(2-x), & 0 \le x \le 1,\ y > 1, \\ 1, & x > 1,\ y > 1. \end{cases}$$

д) Для выяснения, зависимы или нет случайные величины X и Y, проверим условие независимости (свойство 6). В пунктах *а*) и *б*) получены функции $f(x, y),\ f_1(x),\ f_2(y)$.

$$f_1(x)\cdot f_2(y) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases} \cdot \begin{cases} 2y, & y \in [0;1] \\ 0, & y \notin [0;1] \end{cases} = \begin{cases} 4(y - xy), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Следовательно, $f_1(x)\cdot f_2(y) = f(x, y)$ и компоненты X и Y независимы.

е) Так как X и Y независимы и $f_1(x)\cdot f_2(y) = f(x, y)$, то условные плотности распределения компонент X и Y (см. формулы (5.3.2), (5.3.3)) равны

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = f_1(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]; \end{cases}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=f_2(y)=\begin{cases}2y, & y\in[0;1],\\ 0, & y\notin[0;1].\end{cases}$$

ж) Числовые характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ найдём по формулам (5.3.5) − (5.3.8).

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_1(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_2(y)\,dy=\int_0^1 y\cdot 2y\,dy=2\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_1(x)\,dx-M^2(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2\,(1-x)\,dx-\left(\frac{1}{3}\right)^2=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}.$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_2(y)\,dx-M^2(Y)=\int_0^1 y^2\cdot 2y\,dy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

ЗАДАЧИ

5.3.1. Задана плотность совместного распределения системы непрерывных с.в.(X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, \text{ если } (x,y)\in D,\\ 0, \quad \text{ если } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y)\colon x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$. Найти: коэффициент c; плотности распределения отдельных компонент X и Y; функции распределения отдельных компонент; вероятность события $A=(X>0{,}5;\,Y\le 1)$.

(Ответ: $c=24$, $f_1(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & (x,y)\in[0;1],\\ 0, & (x,y)\notin[0;1],\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & y\in[0;1],\\ 0, & y\notin[0;1],\end{cases}$

$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 3x^4-8x^3+6x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ $F_2(y)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 3y^4-8y^3+6y^2, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1,\end{cases}$ $P(A)=5/16$)

5.3.2. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x,y)=\frac{c}{\left(1/3+x^2\right)\cdot(3+y^2)},\quad x\in R,\ y\in R.$$

Найти: значение величины c; функцию распределения $F(x,y)$; плотности распределения отдельных компонент X и Y; вероятность события $A=\left(X<1,\,Y<\sqrt{3}\right)$.

(Ответ: $c = \dfrac{1}{\pi^2}$, $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)$,

$f_1(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{3}\left(1/3 + x^2\right)}$, $f_2(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi(3 + y^2)}$, $P(A) = 5/8$)

5.3.3. Используя условие задачи 5.3.1, выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми. (Ответ: зависимы)

5.3.4. Используя условие задачи 5.3.2, показать, что случайные величины X и Y независимы.

5.3.5. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & \text{при } y \geq 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения двумерной случайной величины (X,Y) и функцию распределения $F(x,y)$.

(Ответ: $f(x,y) = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0, \end{cases}$

$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y}), & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$)

5.3.6. Используя условие задачи 5.3.1, найти условные плотности компонент X и Y.

Ответ: $f(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1 - x^2)}, & \text{если } (x,y) \in D, x \neq 1, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$

$f(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1 - y^2)}, & \text{если } (x,y) \in D,\ y \neq 1, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$

5.3.7. Двумерная с.в. (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области $D(\Delta\, ABC)$, то есть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где S — площадь области D. Известны координаты вершин $\Delta\, ABC$: $A(-1;1)$, $B(1;1)$, $C(0;0)$. Найти плотность распределения компонент X и Y, условные плотности распределения с.в. X и Y. Являются ли с.в. X и Y независимыми?

(Ответ: $f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0,\\ 1-x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<-1 \text{ или } x>1,\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & y<0 \text{ или } y>1,\end{cases}$

$f(y|x)=\begin{cases}1/(1+x), & -1<x\le 0, (x,y)\in D,\\ 1/(1-x), & 0<x<1, (x,y)\in D,\\ 0, & x\le -1 \text{ или } x\ge 1,\end{cases}$ $f(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & 0<y\le 1, (x,y)\in D,\\ 0, & y\le 0 \text{ или } y>1,\end{cases}$

X и Y зависимы)

5.3.8. Используя условие задачи 5.3.7, найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

(Ответ: 0; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$)

5.3.9. Используя условие задачи 5.3.1, найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

(Ответ: $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{25}$)

5.3.10. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}25(1-xy^3), & \text{при } -1\le x\le 1, -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти безусловные и условные плотности распределения с.в. X и Y и условное математическое ожидание $M(Y|X=x)$.

(Ответ: $f_1(x)=\frac{1}{2}$ при $x\in[-1,1]$; $f_2(y)=\frac{1}{2}$ при $y\in[-1,1]$; $f(x|y)=\frac{1}{2}(1-xy^3)=$
$=f(y|x)$ при $x\in[-1,1]$, $y\in[-1,1]$; $M(Y|X=x)=-\frac{1}{5}x)$ при $x\in[-1,1]$)

5.3.11. Случайные величины X и Y независимы, имеют плотности распределения соответственно

$$f_1(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & \text{при } x\ge 0\\ 0, & \text{при } x<0\end{cases},\quad f_2(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & \text{при } y\ge 0\\ 0, & \text{при } y<0\end{cases},\quad \lambda_1>0, \lambda_1>0.$$

Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$, $P(X>Y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

(Ответ: $f(x,y)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0\end{cases}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$)

5.3.12. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot\sin(x+y), & \text{если } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$. Найти коэффициент c, плотности распределения компонент X и Y и вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{6},\ y=0,\ y=\dfrac{\pi}{2}$.

(Ответ: $c=\dfrac{1}{2},\ f_1(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$ при $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ f_2(y)=\dfrac{1}{2}(\sin y+\cos y)$

при $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ P=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}32$)

5.3.13. Дана плотность распределения двумерной с.в. (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot e^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти: *а*) параметр c; *б*) функцию распределения вероятностей $F(x,y)$;
в) вероятности событий: $A=(X<0, Y<2),\ B=(0\le X\le 1, -X<Y<X)$.

(Ответ: *а*) $c=1$; *б*) $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-y})(1-e^{-x}), & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0\cup y<0,\end{cases}$ *в*) $0; \approx 0{,}2$)

5.3.14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения вероятностей

$f(x,y)=\begin{cases}c, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$, где $D=\{(x,y): y\ge 0,\ x+y\le 1,\ 2y-x\le 2\}$. Найти:

а) величину c; *б*) плотность распределения с.в. X;
в) вероятность события ($X\ge 0$).

(Ответ: *а*) $c=\dfrac{2}{3}$; *б*) $f_1(x)=\begin{cases}(x+2)/3, & -2<x\le 0\\ (2-2x)/3, & 0<x\le 1\\ 0, & x\le -2\cup x>1\end{cases}$; *в*) $P=\dfrac{1}{3}$)

5.3.15. Плотность распределения вероятностей системы с.в. (X,Y) имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x\in[0;1],\ y\in[0;1],\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти $f_1(x),\ f_2(y),\ P(X+Y<1)$. Являются ли X и Y независимыми?

(Ответ: $f_1(x)=\begin{cases}x+0{,}5, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases},\ f_2(y)=\begin{cases}y+0{,}5, & y\in[0;1]\\ 0, & y\notin[0;1]\end{cases},\ \dfrac{1}{3}$, нет)

5.4 Коэффициент корреляции

Корреляционный момент служит для характеристики связи между с.в. X и Y.

Корреляционным моментом K_{XY} (иначе ***ковариация*** $\operatorname{cov}(X,Y)$) системы (X,Y) называют число

$$K_{XY}=M\big([X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\big). \qquad (5.4.1)$$

В практических расчётах удобнее использовать формулу

$$K_{XY} = M(XY) - M(X)\cdot M(Y). \qquad (5.4.2)$$

Для дискретных величин X и Y с учётом формулы (5.1.14) имеем

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)\cdot M(Y). \qquad (5.4.2)$$

Для непрерывных величин X и Y с учётом формулы (5.3.9) имеем

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy - M(X)\cdot M(Y). \qquad (5.4.3)$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называют безразмерную величину

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \qquad (5.4.4)$$

где $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ − средние квадратические отклонения величин X и Y.

Величины X и Y называются ***коррелированными***, если $K_{XY} \neq 0$.

Величины X и Y называются ***некоррелированными***, если $K_{XY} = 0$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $-1 \le r_{XY} \le 1$.
2. Если X и Y − независимые с.в., то $r_{XY} = 0$.
3. Если X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b,\ a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$.
4. Если $|r_{XY}| = 1$, то с.в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин X и Y: чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем связь сильнее; чем ближе $|r_{XY}|$ к нулю, тем связь слабее.

***Пример* 1.** Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. В примере 1(*г*) п. 5.1 вычислены $M(X)$=1,64, $M(Y)$=1,89, $\sigma(X)$=0,48, $\sigma(Y)$=0,87. По формуле (5.4.2) $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)\cdot M(Y) =$

= 1·1·0,16 +1·2·0,12 +1·3·0,08 +2·1·0,28 +2·2·0,11 +2·3·0,25 − 1,64· 1,89 =
= 3,14 − 3,0996 = 0,0404.

По формуле (5.4.4) $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \dfrac{0,0404}{0,48\cdot 0.87} \approx 0,0967432$, то есть $r_{XY} \approx 0,1$.

***Пример* 2.** Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases}4(y-xy), & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

где область $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}$.

Найти корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. В примере 1(*ж*) п. 5.3 вычислены $M(X)$ = 1/3, $M(Y)$ = 2/3.

По формуле (5.4.3)

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy-M(X)\cdot M(Y)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 4y(1-x)\,dx\,dy-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$=4\int_0^1\left(x-x^2\right)dx\ \int_0^1 y^2dy-\frac{2}{9}=4\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=0.$$

Отсюда $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\dfrac{0}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=0$. Этого следовало ожидать, так как X и Y – независимые величины (см. пример 1(*д*) п. 5.3).

ЗАДАЧИ

5.4.1. Используя условие задачи 5.1.6, найти K_{XY} и r_{XY}. (Ответ: 0; 0)

5.4.2. Используя условие задачи 5.1.4, найти K_{XY} и r_{XY}.
(Ответ: $\dfrac{7}{64};\ \dfrac{7\sqrt{255}}{765}\approx 0{,}15$)

5.4.3. Используя условие задачи 5.3.7, найти коэффициент корреляции r_{XY}. (Ответ: 0; 0)

5.4.4. Используя условие задачи 5.3.1, найти K_{XY} и r_{XY}.
(Ответ: $-\dfrac{2}{75};-\dfrac{2}{3}$)

5.4.5. Используя условие задачи 5.1.2, найти r_{XY}. (Ответ: 0)

5.4.6. Задано распределение двумерной случайной величины (X, Y)

$X\backslash Y$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,10	0,05	0,25

Найти K_{XY} и r_{XY}. (Ответ: 45; ≈0,23)

5.4.7. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	4	5	6	7
1	0,08	0,10	0,10	0,03
2	0,08	0,14	0,16	0,05
3	0,04	0,06	0,14	D

Найти число D, $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, K_{XY} .
(Ответ: 0,02; 1,95; 5,4; 0,5675; 0,84; ≈0,75; ≈0,92; 0,08)

5.4.8. Используя условие задачи 5.3.12, найти K_{XY} и r_{XY} .
(Ответ: $(8\pi-16-\pi^2)/16 \approx -0{,}05$; $(8\pi-16-\pi^2)/(\pi^2+8\pi-32) \approx -0{,}25$)

5.4.9. Задана плотность совместного распределения системы с.в. (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}90x^2y^2, (x,y)\in D,\\ 0, \qquad (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y):\ |x|+|y|<1,\ y<0\}$. Найти и r_{XY} .
(Ответ: r_{XY} = 0; ($M(X)$ = 0, $M(Y)$ = −3/7))

5.4.10. В урне содержится 5 белых и 3 чёрных шара. Из нее извлекают 2 шара без возвращения. Пусть с.в. X − число белых шаров в выборке, с.в. Y — число черных шаров в выборке. Найти коэффициент корреляции r_{XY} .
(Ответ: −1)

5.4.11. Задана плотность совместного распределения системы с.в. (X, Y): $f(x,y)=(1/4)\sin x\cdot\sin y$ в квадрате $0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти корреляционный момент. (Ответ: 0)

ВОПРОСЫ

1. Какую двумерную случайную величину (X,Y) называют дискретной, а какую − непрерывной?
2. Как задаётся закон распределения дискретной с. в.?
3. Сформулируйте определение функции распределения $F(x,y)$ двумерной с. в. (X,Y).
5. Как вычислить функцию распределения для дискретной с. в. (X,Y)?
6. Сформулируйте определение функции плотности распределения вероятностей $f(x,y)$ непрерывной двумерной с. в.
7. Назовите свойства плотности вероятностей $f(x,y)$.
8. Как построить законы распределения компонент X и Y для дискретной с. в. (X,Y) и для непрерывной с. в. (X,Y)?
9. Какие случайные величины X и Y называются независимыми?
10. Сформулируйте условия независимости для дискретных и для непрерывных с. в.
11. Запишите формулы для вычисления $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ для дискретной и для непрерывной двумерных с. в. (X,Y).
12. Запишите формулы для вычисления корреляционного момента K_{XY} для дискретной и для непрерывной с. в. (X,Y)?
13. Что называют коэффициентом корреляции случайных величин X и Y?
14. Сформулируйте свойства коэффициента корреляции r_{XY} .
15. Какое свойство случайных величин X и Y характеризует коэффициент корреляции r_{XY}?

6 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

6.1 Неравенство Чебышева и Маркова

При некоторых условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Для практики очень важно знание условий, так как это позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название больших чисел.

Если возможные значения дискретной случайной величины X неотрицательны и ее математическое ожидание $M(X)$, то для любого числа $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \le \delta) \ge 1 - \frac{M(X)}{\delta}. \qquad (6.1.1)$$

В этом случае выполняется и неравенство

$$P(X > \delta) < \frac{M(X)}{\delta}. \qquad (6.1.2)$$

Неравенства (6.1.1) и (6.1.2) называют ***неравенствами Маркова***.

Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине больше положительного числа ε

$$p(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.1.3)$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$p(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.1.4)$$

Неравенство (6.1.3) называют ***первым неравенством Чебышева***, а неравенство (6.1.4) **– *вторым неравенством Чебышева***.

Неравенства Чебышева справедливы для дискретных и непрерывных случайных величин.

***Пример* 1.** Оценить вероятность того, что при 3000 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений 5 очков будет не меньше 800.

Решение. Пусть X – число появлений 5 очков при 3000 подбрасываниях, тогда $M(X) = np = 3000 \cdot \dfrac{1}{6} = 500.$ Воспользуемся неравенством (6.1.2), положив $\delta = 800$: $P(X \ge 800) \le \dfrac{500}{800} = 0{,}625$.

***Пример* 2.** Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0{,}02$ и неравенство $P(|X - M(X)| \ge a) < 0{,}3$. Найти число a.

Решение. В соответствии с неравенством (6.1.3) получаем

$$p(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{0{,}02}{\varepsilon^2}.$$

Сравнивая эти два неравенства, получим $\frac{0{,}02}{\varepsilon^2} \leq 0{,}3$, откуда $0{,}02 \leq 0{,}3\varepsilon^2$.

Таким образом, $\varepsilon^2 \geq \frac{0{,}02}{0{,}3} = 0{,}067$, $\varepsilon \geq 0{,}26$.

***Пример* 3.** Среднее значение длины детали равно 35 см, а дисперсия равна 0,2. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь будет иметь длину от 34,5 см до 35,5 см.

Решение. Пусть X – длина детали. По условию задачи $M(X) = 35$ и $34{,}5 < X < 35{,}5$. Последнее неравенство можно записать в виде $|X - M(X)| \leq 0{,}5$. Применяя неравенство (6.1.4) в случае $\varepsilon = 0{,}5$, получаем:

$$p(|X - M(X)| < 0{,}5) \geq 1 - \frac{0{,}2}{0{,}5^2} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

ЗАДАЧИ

6.1.1. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	2	4	6	8	10	12
P	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2

Пользуясь неравенством Маркова, оцените вероятность того, что случайная величина примет значение не больше 10. (Ответ: $P(X \leq 10) \geq 0{,}3$)

6.1.2. Средний вес парниковых помидор 200 г. Оценить вероятность того, что наугад взятый из ящика помидор весит более 300 г. (Ответ: $P(X > 300) < 0{,}67$)

6.1.3. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) > 0{,}89$ и $D(X) = 0{,}008$. Оценить значение ε. (Ответ: $\varepsilon \geq 0{,}27$)

6.1.4. Используя второе неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания менее чем на три среднеквадратических отклонения. (Ответ: $P(|X - M(X)| < 3\sigma) \geq 8/9$)

6.1.5. Используя второе неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}1$, если $D(X) = 0{,}005$. (Ответ: $P(|X - M(X)| < 0{,}1) \geq 0{,}4$)

6.1.6. В цехе находится 10 независимо работающих станков-автоматов для штампования деталей. Вероятность отказа каждого станка-автомата за время T равна $0{,}04$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших автоматов и математическим ожиданием отказов за время T окажется меньше трех? (Ответ: $P(|X - 0{,}4)| < 3) \geq 0{,}957$)

6.1.7. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0{,}002$ и неравенство $P(|X - M(X)| \geq a) < 0{,}1$. Найти число a. (Ответ: $a \geq 0{,}45$)

6.2 Теорема Чебышева. Теорема Бернулли

Средним арифметическим случайных величин $x_1, x_2, ..., x_n$ называют

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание равно сумме математических ожиданий слагаемых), получим

$$M\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = \frac{M(x_1) + M(x_2) + ... + M(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) .$$

Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2, ... X_n$ попарно независимы, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то как бы мало ни было положительное число ε, выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} . \qquad (6.2.1)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ следует ***закон больших чисел***

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \leq \varepsilon\right) = 1. \qquad (6.2.2)$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым с вероятностью, близкой к единице, если n достаточно велико.

На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и тоже математическое ожидание a. В этом случае формула (6.2.2) примет вид

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \leq \varepsilon\right) = 1 . \qquad (6.2.3)$$

Итак, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс. Среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины.

Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений, и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. Этот способ измерения можно считать правильным, если к результатам измерений применима теорема Чебышева, то есть должны выполняться три требования. Результат каждого измерения должен не зависеть от результатов остальных, а, следовательно, они будут попарно независимы. Если измерения производятся без систематических ошибок, то математические ожидания всех измеряемых случайных величин будут одинаковы. Дисперсии измеряемых случайных величин будут ограничены, если прибор обеспечивает определенную точность измерений.

На теореме Чебышева основан выборочный метод, применяемый в статистике. Он состоит в том, что по сравнительно небольшой выборке судят о всей генеральной совокупности исследуемых объектов. Например, о качестве зерна можно судить по пробе небольшого количества наудачу отобранных зерен.

Теорема Бернулли

Пусть имеются n независимых испытаний с постоянной вероятностью успеха p, $q = 1 - p$. Вероятность того, что отклонение частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p по модулю не превзойдет числа $\varepsilon > 0$, больше чем разность $1 - pq/n\varepsilon^2$, то есть

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (6.2.4)$$

Отсюда следует закон больших чисел в форме Бернулли:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (6.2.5)$$

Теорема Бернулли подтверждает обоснованность статистического определения вероятности.

***Пример* 1.** Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ задана законом распределения

X_n	a	$-a$
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Случайные величины независимы, поэтому они будут попарно независимы, то есть первое требование теоремы Чебышева выполняется.

Вычислим математическое ожидание

$M(X_n) = an/(2n+1) - a(n+1)/(2n+1) = -a/(2n+1)$.

Математическое ожидание конечно и равно $-a/(2n+1)$. Второе требование теоремы выполняется.

Напишем закон распределения X_n^2:

X_n^2	a^2	a^2
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Математическое ожидание

$M(X_n^2) = a^2 n/(2n+1) + a^2(n+1)/(2n+1) = a^2$.

Дисперсия $D(X_n)$ равна

$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = a^2 - a^2/(2n+1)^2 = 4a^2 n(n+1)/(2n+1)^2$.

При $n \to \infty$ дисперсия ограничена числом a^2, то есть третье требование выполняется. Теорема Чебышева применима.

ЗАДАЧИ

6.2.1. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ задана законом распределения

X_n	$-na$	0	na
P	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?
(Ответ: применима. Математическое ожидание конечно $M(X_n) = 0$. Дисперсия ограничена числом a^2)

6.2.2. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ Случайная величина X_n может принимать только три значения: $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $1/n, 1-2/n, 1/n$. Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?
(Ответ: применима. Математическое ожидание $M(X_n) = 0$. Дисперсия $D(X_n) = 2$)

6.2.3. Определить, сколько надо произвести замеров диаметров деревьев, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения не более чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Известно, что на данном участке среднее квадратическое отклонение диаметров деревьев не превышает 10 см. (Ответ: $n \geq 500$)

6.2.4. Сколько надо произвести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1, если среднее квадратическое отклонение (ошибка измерений) не превосходит 3? (Ответ: $n \geq 180$)

6.2.5. Вероятность положительного исхода отдельного испытания $p = 0{,}8$. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаниях отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по модулю будет меньше 0,05. (Ответ: $P > 0{,}936$)

6.2.6. Найти вероятность того, что частота появления пятерки в 10000 независимых подбрасываниях игрального кубика отклоняется от вероятности появления шестерки по модулю меньше чем на 0,01. (Ответ: $P > 0{,}709$)

6.2.7. При штамповке пластинок из пластмассы брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1%.
(Ответ: $P > 0{,}86$)

6.2.8. Всхожесть семян моркови составляет 70%. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдет каждое из них не превзойдет по модулю 0,01. (Ответ: $P > 0{,}79$)

6.2.9. Для определения урожайности поля из 200 га взяли выборку с каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия не превышает 2. Оценить вероятность того, что отклонение средней выборочной урожайности от средней урожайности не превосходит 0,2 ц. (Ответ: $P > 0{,}75$)

6.2.10. Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по модулю меньше чем на 5 ч, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч. (Ответ: $P > 0{,}99$)

ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеет первое неравенство Чебышева?
2. Какой вид имеет второе неравенство Чебышева?
3. Что называют неравенствами Маркова?
4. Сформулируйте теорему Чебышева.
5. Как записывается формула, выражающая теорему Чебышева в предельном случае $(n \to \infty)$?
6. Сформулируйте теорему Бернулли?
7. Как записывается формула, выражающая теорему Бернулли в предельном случае $(n \to \infty)$?
8. Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $X_1, X_2, \ldots X_n$, чтобы к ним можно было применить теорему Чебышева?

7 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

7.1 Выборочный метод. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма

Математическая статистика занимается разработкой методов сбора, описания и обработки опытных данных, то есть результатов наблюдений с целью получения научных и практических выводов.

Статистической совокупностью называется множество однородных объектов, объединенных по некоторому общему отличительному признаку. Суть выборочного метода заключается в том, что обследованию подвергаются не все объекты совокупности, а только некоторая их часть, случайно выбранная из данной совокупности. Выводы, полученные при изучении этой части, распространяются на всю совокупность объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, подлежащих изучению. ***Выборочной совокупностью, или выборкой,*** называется совокупность объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности. ***Объемом совокупности*** (генеральной или выборочной) называется число ее объектов. Выборка должна быть ***репрезентативной (представительной)***, то есть такой, по которой можно уверенно судить об интересующем признаке всей генеральной совокупности. Выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайным образом.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \ldots x_k$ объема n. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – вариационным рядом.

Числа наблюдений называют частотами, а их отношение к объему выборки $\frac{n_i}{n} = w_i$ – относительными частотами. Причем, $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$, то есть сумма относительных частот всех вариант равна единице.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Пример 1. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты

$$w_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15, \quad w_2 = \frac{10}{20} = 0{,}5, \quad w_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Напишем распределение относительных частот

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,5	0,35

Контроль: 0,15+0,5+0,35=1.

Эмпирической функцией распределения, или функцией распределения выборки, называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{7.1.1}$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную отрезки, которой соединяют точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ldots, (x_k, w_k)$.

В случае непрерывного признака строят гистограмму. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиною h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{h}$.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$.

***Пример* 2.** Дана некоторая выборка

32	34	26	24	28	22	30	35	32	20
17	28	22	37	34	20	26	28	23	24
32	20	26	30	24	33	17	22	28	35
32	22	26	24	26	24	30	25	26	28
35	30	25	30	26	22	26	28	30	27

Записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда, найти размах варьирования, разбить его на пять интервалов, и построить гистограмму частот.

Решение. Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, то есть записываем вариационный ряд:

17	17	20	20	20	22	22	22	22	22
23	24	24	24	24	24	25	25	26	26
26	26	26	26	26	26	27	28	28	28
28	28	28	30	30	30	30	30	30	32
32	32	32	33	34	34	35	35	35	37

Разность между наибольшим и наименьшим значением признака называется ***размахом варьирования***. Находим размах варьирования:

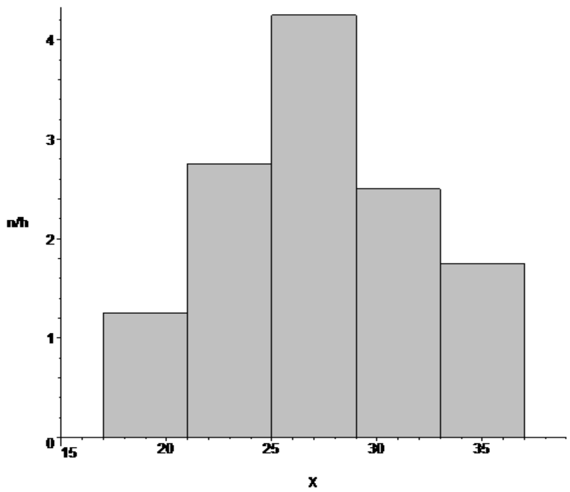
$$x_{\max} - x_{\min} = 37 - 17 = 20.$$

Вычисляем длину частичного интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{5} = \frac{20}{5} = 4.$

Таблица, в которой дана система интервалов, указаны частоты или относительные частоты числа вариант в каждом интервале, называется ***статистической совокупностью.***

Полученные результаты помещаем в таблицу

номер частичного интервала i	границы интервала $x_i - x_{i+1}$	середина интервала $x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	частота интервала n_i	$\frac{n_i}{h}$
1	[17-21)	19	5	1,25
2	[21-25)	23	11	2,75
3	[25-29)	27	17	4,25
4	[29-33)	31	10	2,50
5	[33-37]	35	7	1,75



***Пример* 3.**
Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки: 12+18+30=60.
Наименьшая варианта равна 2. Следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$.
Значение X<6, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

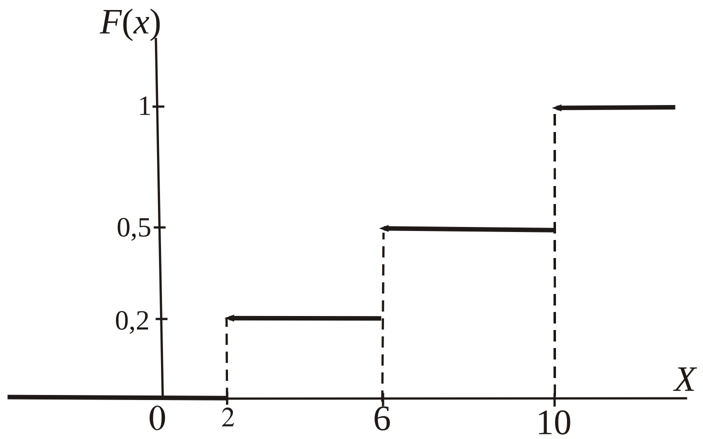
$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 6.$$

Значение X<10, а именно $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, наблюдалось 12+18=30 раз, следовательно

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5 \quad \text{при} \quad 6 < x \le 10.$$

Так как X=10 наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 10$.

Таким образом, $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0{,}2, & 2<x\le 6\\ 0{,}5, & 6<x\le 10\\ 1, & x>10.\end{cases}$



ЗАДАЧИ

Построить эмпирическую функцию распределения и ее график для данной выборки:

7.1.1

x_i	6	8	12	15
n_i	2	3	10	5

7.1.2

x_i	2	5	7	8
n_i	2	6	4	8

7.1.3

x_i	4	7	8
n_i	10	4	6

7.1.4

x_i	2	4	6	8
n_i	4	6	7	3

7.1.5

x_i	4	6	10	12
n_i	10	15	5	20

7.1.6

x_i	2	5	8	10
n_i	2	6	10	2

7.1.7

x_i	2	5	7	9	11
n_i	3	5	10	8	4

7.1.8

x_i	3	6	8	11
n_i	5	25	15	5

7.1.9

x_i	4	8	10	15
n_i	2	3	10	5

7.1.10

x_i	1	3	4	6	7
n_i	2	4	6	5	3

Для данной выборки записать вариационный ряд, разбить размах варьирования на 7 интервалов и построить полигон частот, гистограмму относительных частот.

7.1.11

181	141	162	103	136	124	41	117	69	153
101	24	67	154	172	110	62	59	197	121
135	58	199	159	81	39	142	87	179	85
171	107	125	192	163	200	133	150	178	98
148	56	113	169	73	138	104	31	90	109
127	116	190	20	111	94	157	119	53	76
66	132	166	91	44	115	72	26	128	149
46	75	105	137	82	64	186	96	176	97
156	33	188	58	112	139	86	174	106	77
152	130	43	108	119	129	37	71	96	114

7.1.12

32	105	48	80	144	128	64	112	18	81
66	129	113	17	94	78	90	51	104	34
110	149	36	103	82	53	93	130	68	150
114	84	55	131	70	38	102	77	16	135
41	19	142	61	85	159	115	57	72	101
56	100	86	146	73	40	141	25	87	126
151	71	94	15	125	76	54	99	39	140
17	124	52	98	139	37	147	88	69	109
35	158	67	30	93	123	50	138	21	97
96	121	49	137	89	145	91	65	92	33

7.1.13

0,86	1,04	1,45	1,31	1,22	1,09	0,73	1,11	0,95	0,84
0,96	0,78	1,23	1,13	1,04	1,44	1,32	1,29	0,68	0,86
1,33	1,08	0,87	0,67	1,28	0,97	1,14	0,83	1,33	1,40
1,24	1,43	0,98	1,34	0,81	0,88	1,10	0,70	1,15	1,23
1,34	1,09	0,80	1,16	1,24	0,75	0,99	1,41	0,88	0,79
1,36	1,25	0,89	1,26	1,42	1,35	0,80	1,17	0,90	1,00
1,11	0,69	1,18	0,82	1,01	0,90	1,36	1,25	0,67	0,91
1,37	1,02	0,92	1,27	1,19	1,38	1,46	0,93	1.27	0,83
1,04	1.11	1,47	1,07	0,72	0,93	1,26	0,77	1,20	1,28
0,77	1,10	0,95	1,05	1,08	1,11	1,10	1,48	1,07	0,92

7.1.14

0,76	0,82	0,70	0,86	0,78	0,96	0,68	0,83	0,92	0,86
0,86	0,84	0,66	0,92	0,76	0,95	0,84	1,91	0,78	0,70
0,78	0,70	0,82	0,99	0,83	0,86	0,67	0,91	0,75	0,86
0,83	0,75	0,95	0,79	0,65	0,84	0,78	0,88	0,70	0,95
0,87	0,71	0,92	1,00	0,75	0,87	0,80	0,79	0,66	0,90
0,79	0,82	0,65	0,83	0,88	0,96	0,75	0,91	0,71	0,87
0,76	0,90	0,71	0,87	0,74	0,94	0,80	1,00	0,95	0,79
0,96	0,98	0,84	0,79	0,91	0,71	0,65	0,90	0,88	0,74
0,74	0,67	0,94	0,72	1,01	0,82	0,80	0,83	0,99	0,83
0,88	0,80	0,72	0,91	0,84	0,74	0,94	0,72	0,83	0,87

7.1.15

1,66	2,21	1,21	1,46	1,16	1,81	0,86	1,74	2,08	1,38
2,27	0,81	2,39	2,19	2,25	1,67	1,84	1,37	2,12	2,37
1,15	2,17	1,45	1,75	1,14	1,94	1,53	0,83	1,68	1,35
2,39	1,63	1,86	1,24	1,73	1,07	2,10	1,13	1,91	1,31
1,78	2,09	1,54	1,79	1,08	1,42	0,80	1,96	1,19	0,85
1,88	1,27	0,84	2,60	1,44	1,77	2,45	1,10	2,16	1,59
1,56	2,30	2,48	0,99	1,18	2,11	1,64	2,28	1,29	1,93
2,15	1,72	1,83	1,47	1,87	1,17	2,29	1,90	1,71	2,55
2,31	1,39	1,85	2,38	1,65	2,51	1,48	1,28	2,18	1,49
2,14	1,76	1,51	1,82	0,91	2,51	2,34	2,59	1,69	2,13

7.1.16

2,1	2,3	1,5	3,1	2,7	1,9	2,4	0,9	2,5	1,1
1,3	2,9	2,3	3,9	2,4	3,6	1,6	3,2	2,9	2,0
2,1	3,3	0,8	3,5	1,7	2,6	4,1	2,8	1,2	2,5
1,1	2,4	1,5	3,2	2,7	1,5	3,7	1,9	3,1	4,0
4,1	2,9	2,0	2,0	1,1	0,7	3,3	2,5	1,6	. 2,4
2,1	3,2	0,9	2,8	4,2	2,8	1,9	1,2	1,7	3,5
2,7	3,9	2,4	1,7	3,6	2,5	0,8	3,1	2,1	1,3
3,2	1,6	0,7	2,6	1,3	2,0	3,7	2,9	4,0	3,1
2,8	4,1	1,9	3,6	3,3	2,9	0,6	1,5	1,2	2,4
1,1	3,5	1,6	2,4	3,9	2,7	2,5	1,9	2,6	3,2

7.1.17

19,3	44,5	49,9	26,9	50,2	51,1	18,6	72,7	35,4	25,4
42,7	17,5	51,7	49,3	26,2	47,1	71,4	27,1	75,7	43,2
25,5	27,2	80,4	50,4	70,2	14,9	52,4	62,3	41,7	49,5
40,6	14,5	62,8	34,5	53,4	26,1	69,3	52,5	27,3	80,3
25,3	43,1	27,4	80,1	68,4	63,3	13,4	55,4	39,5	33,1
38,4	19,7	63,8	40,4	80,8	56,4	66,1	27,5	79,1	24,6
28,6	47,9	78,4	57,4	66,5	37,3	23,4	67,6	11,1	64,3
22,7	64,8	36,2	58,7	10,8	47,7	58,4	29,2	46,7	77,2
51,9	31,3	44,7	66,3	20,1	65,3	45,5	76,3	67,8	35,1
66,9	18,9	42,9	50,7	34,9	43,5	32,5	48,4	53,1	65,8

7.1.18

15,2	23,1	27,1	18,6	25,1	27,5	16,0	28,8	22,7	18,8
24,9	26,3	21,2	28,0	25,5	27,7	20,9	31,9	16,8	29,1
26,8	17,4	31,5	21,4	24,8	17,2	30,8	23,7	29,7	21,1
20,4	24,5	26,0	28,7	20,0	33,0	27,9	24,5	20,6	32,1
26,9	19,7	21,5	19,8	16,8	21,7	26,4	23,2	22,9	26,6
25,3	25,8	16,6	23,6	15,0	22,3	24,0	22,4	32,5	19,1
24,7	29,8	18,2	29,6	23,4	18,1	16,9	24,2	24,1	32,2
24,4	18,4	22,1	30,1	22,0	17,8	28,0	25,7	30,9	22,5
30,7	22,5	30,0	27,3	25,4	26,2	20,7	28,1	19,3	28,9
20,3	30,4	24,3	31,6	30,0	22,6	29,2	32,7	26,7	15,8

7.1.19

19,1	23,5	19,6	27,5	33,3	31,2	27,7	21,4	27,3	20,5
21,9	20,7	15,2	27,3	23,0	31,7	18,9	23,7	33,1	27,9
23,9	18,5	24,1	28,1	22,0	16,4	30,8	27,1	19,9	30,4
20,5	30,9	31,9	26,9	19,8	28,3	22,7	15,6	22,4	18,3
28,5	16,2	22,5	18,1	28,4	33,9	30,8	19,6	26,7	32,5
21,1	24,3	26,5	15,4	24,5	26,4	28,7	17,9	30,6	23,1
32,1	23,2	17,7	28,9	22,9	20,1	30,4	26,3	16,0	25,4
26,1	15,8	30,2	19,4	25,1	25,3	17,5	24,7	21,7	29,1
21,2	21,8	17,3	33,5	29,3	24,9	30,0	15,0	25,2	25,8
33,7	24,5	25,6	23,3	29,8	17,2	25,1	22,4	29,6	19,3

7.1.20

81	106	135	170	206	60	181	178	154	103
78	176	31	204	145	85	229	47	108	234
110	207	241	168	133	68	174	143	89	182
203	153	172	93	48	228	255	134	112	58
144	235	114	77	208	183	59	170	95	154
104	202	39	164	247	226	110	67	121	193
123	91	164	57	209	30	185	162	250	225
201	160	239	211	131	142	101	153	76	125
137	54	127	87	66	190	158	241	33	221
100	195	156	146	231	220	129	83	151	56

7.2 Числовые характеристики статистического распределения

Найти статистическую оценку неизвестного параметра – значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра. ***Точечной*** называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Пусть θ^* статистическая оценка неизвестного параметра θ теоретического распределения.

Допустим, что по выборке объема *n* найдена оценка θ_1^*. Повторим опыт, то есть извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным найдем оценку θ_2^*. Повторяя опыт многократно, получим числа $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, ..., \theta_k^*$, которые, вообще говоря, различны между собой.

Тогда оценку θ^* можно рассматривать как случайную величину, а числа $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, ..., \theta_k^*$ как ее возможные значения.

Несмещенной называют статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки, то есть

$$M(\theta^*) = \theta. \qquad (7.2.1)$$

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Кроме этого возможные значения θ^* могут быть сильно рассеяны вокруг среднего значения θ^*, то есть дисперсия $D(\theta^*)$ может быть значительной.

Эффективной называют статистическую оценку, которая имеет наименьшую возможную дисперсию

$$D(\theta^*) = D_{\min}.$$

Генеральной средней $\overline{x_г}$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_1, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема *N* различны, то

$$\overline{x_г} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}. \qquad (7.2.2)$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, причем $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то

$$\overline{x_г} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N}. \qquad (7.2.3)$$

Выборочной средней $\overline{x_в}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_1, ..., x_n$ признака выборки объема *n* различны, то

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (7.2.4)$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) / n. \qquad (7.2.5)$$

Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя.

***Пример* 1.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема *n*=50.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

Решение.

Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)}{n} = \frac{16\cdot 2 + 12\cdot 5 + 8\cdot 7 + 14\cdot 10}{50} = 5{,}76.$$

Генеральной дисперсией $D_{\text{г}}$ называют среднее квадратическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x_{\text{г}}}$.

Если все значения $x_1, x_1, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_{\text{г}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_{\text{г}}})^2}{N}. \tag{7.2.6}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, то

$$D_{\text{г}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x_{\text{г}}})^2}{N}. \tag{7.2.7}$$

Генеральным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из генеральной дисперсии

$$\sigma_{\text{г}} = \sqrt{D_{\text{г}}}. \tag{7.2.8}$$

Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ называют среднее квадратическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения $\overline{x_{\text{в}}}$.

Если все значения $x_1, x_1, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2}{n}. \tag{7.2.9}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, то

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2}{n}. \tag{7.2.10}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из выборочной дисперсии

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \tag{7.2.11}$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно пользоваться формулой

$$D_{\text{в}} = \overline{x_{\text{в}}^2} - \left[\overline{x_{\text{в}}}\right]^2, \tag{7.2.12}$$

где $\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$, $\overline{x_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}$.

Выборочная дисперсия $D_в$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как

$$M(D_в) = \frac{n-1}{n} D_г, \text{ то есть } M(D_в) \neq D_г.$$

Эмпирическая, *или* ***исправленная, дисперсия*** определяется формулой

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_в})^2 . \quad (7.2.13)$$

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности служит ***«исправленное» среднее квадратическое отклонение***

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}. \quad (7.2.14)$$

Пример 2. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106.

Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение.

а) Найдем выборочную среднюю

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{92+94+103+105+106}{5} = 100.$$

б) Найдем выборочную дисперсию, для этого воспользуемся формулой (7.2.9)

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_в})^2}{n} =$$

$$= \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34.$$

Выборочную дисперсию можно также найти по формуле (7.2.12)

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left[\overline{x_в}\right]^2.$$

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = 100, \quad \overline{x_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} = \frac{92^2 + 94^2 + 103^2 + 105^2 + 106^6}{5} = 10034,$$

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left[\overline{x_в}\right]^2 = 10034 - 10000 = 34.$$

Найдем исправленную дисперсию $s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5.$

ЗАДАЧИ

7.2.1. В результате эксперимента получена выборка объема $n = 79$:

2	4	2	4	3	3	2	0	6	1
2	3	2	2	4	3	3	5	1	0
2	4	3	2	2	3	3	1	3	3
3	1	1	2	3	1	4	3	1	7
4	3	4	2	3	2	3	3	1	4
3	1	4	5	3	4	2	4	5	3
6	4	1	3	2	4	1	3	1	0
0	4	6	4	7	4	1	3	3	

Построить вариационный ряд, найти среднее значение выборки, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

7.2.2. По результатам измерений имеем выборку 2781, 2836, 2807, 2763, 2858. Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

7.2.3. С помощью измерительного прибора, практически не имеющего систематической ошибки, было сделано восемь независимых измерений некоторой величины. Результаты измерений приведены в таблице:

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2504	2486	2525	2495	2515	2528	2492	2494

Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины.

7.2.4. Измерена максимальная емкость 20 подстроечных конденсаторов, результаты измерений (в пикофарадах) приведены в таблице:

Номер конденсатора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Емкость, пФ	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
Номер конденсатора	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Емкость, пФ	4,31	4,42	4,60	4,35	4,50	4,40	4,43	4,48	4,42	4,45

Найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии.

7.2.5. При сверлении отверстий одним и тем же сверлом и последующем измерении диаметров отверстий получены данные в виде интервального статистического ряда:

x_i	[40,25,40,28)	[40,28,40,31)	[40,31,40,34)	[40,34,40,37)
n_i	2	10	18	25
x_i	[40,37,40,40)	[40,40,40,43)	[40,43,40,46)	
x_i	12	8	5	

Найдите середины интервалов и вычислите несмещенную оценку генеральной средней и несмещенную оценку дисперсии.

7.2.6. В ОТК были измерены диаметры 300 валиков из партии, изготовленной одним станком-автоматом. Отклонения измеренных диаметров от номинала (в нм) даны в таблице:

Границы отклонений	Середина интервала	Число валиков
-30…-25	-27,5	3
-25…-20	-22,5	8
-20…-15	-17,5	15
-15…-10	-12,5	35
-10…-5	-7,5	40
-5…0	-2,5	60
0..5	2,5	55
5..10	7.5	30
10..15	12.5	25
15..20	17,5	14
20..25	22,5	8
25..30	27,5	7

Найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии.

7.3 Условные варианты

Равноотстоящими называют варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью h.

Условными называют варианты, определяемые равенством

$$u_i = \frac{x_i - C}{h},$$

где C – ложный нуль (новое начало отсчета), h – шаг, то есть разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами.

Замечание. В качестве ложного нуля можно принять любую варианту. Вычисления будут наиболее простыми, если выбрать в качестве ложного нуля варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда. Часто такая варианта имеет наибольшую частоту.

Если первоначальные варианты не являются равноотстоящими, то переходят к вариантам

$$u_i = x_i - C. \qquad (7.3.1)$$

В этом случае

$$\overline{x_{\text{в}}} = C + \frac{\sum_i n_i u_i}{n}. \qquad (7.3.2)$$

Выборочные дисперсии являются смещенной оценкой генеральной дисперсии и определяются, при переходе к условным вариантам, по формуле

$$D_{\text{в}}(X)=D_{\text{в}}(u)=\overline{u^2}-\overline{u}^2=\frac{\sum_i n_i u_i^2}{n}-\left[\frac{\sum_i n_i u_i}{n}\right]^2. \qquad (7.3.3)$$

Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C=10^k$, то есть переходят к условным вариантам

$$u_i=Cx_i.$$

При этом дисперсия увеличится в C^2 раз. Поэтому, найдя дисперсию условных вариант, надо разделить ее на C^2:

$$D_{\text{в}}(X)=D_{\text{в}}(u)/C^2. \qquad (7.3.4)$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_{\text{в}}.$$

Для вычислений более удобна формула

$$s_X^2=\frac{\sum_i n_i x_i^2-\left[\sum_i n_i x_i\right]^2 \Big/ n}{n-1}.$$

В условных вариантах она имеет вид

$$s_U^2=\frac{\sum_i n_i u_i^2-\left[\sum_i n_i u_i\right]^2 \Big/ n}{n-1}.$$

Если $u_i=x_i-C$, то $s_X^2=s_U^2$. Если $u_i=Cx_i$, то $s_X^2=s_U^2/C^2$.

***Пример* 1.** Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Решение.

Первоначальные варианты большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам

$$u_i=x_i-C, \quad C=1270,$$

$$u_i=x_i-1270.$$

Получим распределение условных вариант

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

Найдем искомую выборочную среднюю

$$\overline{x}_{\text{в}} = C + \frac{\sum_i n_i u_i}{n} = 1270 + \frac{2(-20) + 0 \cdot 5 + 10 \cdot 3}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

***Пример* 2.** Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Решение. Перейдем к условным вариантам

$$u_i = x_i - 192.$$

Получим распределение условных вариант

u_i	-6	0	2
n_i	2	5	3

Выборочная дисперсия определяется по формуле (7.3.3)

$$D_{\text{в}}(X) = D_{\text{в}}(u) = \frac{\sum_i n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_i n_i u_i}{n} \right]^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot (-6)^2 + 0 + 3 \cdot 2^2}{10} - \left[\frac{2(-6) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{10} \right]^2 = \frac{2 \cdot 36 + 3 \cdot 4}{10} + \left[\frac{-6}{10} \right]^2 = 8{,}04.$$

ЗАДАЧИ

7.3.1. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2620$.

7.3.2. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	4	15	30	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2844$.

7.3.3. Произведено несколько измерений расстояния:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1235,6	1237,5	1232,9	1236,2	1238,5	1234,2	1235,9	1233,3
i	9	10	11	12	13	14	15	16
x_i	1234,5	1236,8	1237,6	1233,1	1234,3	1237,5	1235,4	1234,7

Введя условные варианты $u_i = x_i - 1235$, вычислите выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение измеренного расстояния.

7.3.4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	0,02	0,04	0,05	0,08
n_i	4	15	30	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = 100x_i$.

7.3.5. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	0,2	0,5	0,7	0,8
n_i	5	15	20	10

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = 10x_i$.

7.3.6. Доказать, что $\overline{x_{\text{в}}} = C + \frac{\sum_i n_i u_i}{n}$. Здесь $u_i = x_i - C$.

7.3.7. Доказать формулу (7.3.3).

7.3.8. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки

x_i	102	104	108
n_i	4	6	10

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 104$.

7.3.9. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	2	3	5

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = 100x_i$.

7.4 Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Ясно, что θ^* тем точнее определяет параметр θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\theta - \theta^*|$.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* параметра θ называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$

$$P\left[|\theta - \theta^*| < \delta\right] = \gamma. \qquad (7.4.1)$$

Обычно надежность γ задается заранее, в качестве γ берут число, близкое к единице.

Доверительным называют интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью.

Интервальной оценкой математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней ***при из-***

вестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит интервал

$$\overline{x_в} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}, \qquad (7.4.2)$$

где точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, n – объем выборки.

Число t определяется из равенства $2\Phi(t) = \gamma$ или $\Phi(t) = \gamma/2$. По таблице функции Лапласа (приложение 2) находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$.

Интервальной оценкой математического ожидания a ***при неизвестном среднем квадратическом отклонении*** σ генеральной совокупности служит интервал

$$\overline{x_в} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \qquad (7.4.3)$$

где s – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, $s^2 = \frac{n}{n-1} D_в$, значение t_γ находят по таблице приложения 3 $t_\gamma = t(\gamma, n)$ по заданным n *и* γ.

Интервальной оценкой ***среднего квадратического отклонения*** σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$\begin{aligned} &s(1-q) < \sigma < s(1+q) \ (\text{при } q < 1), \\ &0 < \sigma < s(1+q) \ (\text{при } q > 1), \end{aligned} \qquad (7.4.4)$$

где q находят по таблице приложения 4 $q = q(\gamma, n)$ по заданным n и γ.

***Пример* 1.** Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочному среднему $\overline{x_в} = 4{,}1$, если объем выборки n=36 и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Найдем t из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ или $\Phi(t) = \gamma/2$

$$\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475.$$

По таблице находим t = 1,96. Найдем точность оценки

$$\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98.$$

Вычислим

$$\overline{x_в} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} = 4{,}1 - 0{,}98 = 3{,}12, \quad \overline{x_в} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} = 4{,}1 + 0{,}98 = 5{,}08.$$

Окончательно получим искомый доверительный интервал

$$3{,}12 < a < 5{,}08.$$

***Пример* 2.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=10

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Определим выборочную среднюю по формуле

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \right) / \, n,$$

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{10} = \frac{-4 + 1 + 4 + 6 + 8 + 5}{10} = 2.$$

Определим «исправленное» среднее квадратичное отклонение по формуле

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2},$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left[2(-2-2)^2 + 1(1-2)^2 + 2(2-2)^2 + 2(3-2)^2 + 2(4-2)^2 + 1(5-2)^2 \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} \left[32 + 1 + 0 + 2 + 8 + 9 \right]} = \sqrt{\frac{52}{9}} \approx 2{,}4.$$

Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 3 $t_\gamma = t(\gamma, n)$ по $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$, находим $t_\gamma = 2{,}26$.

Найдем искомый доверительный интервал

$$2 - \frac{2{,}26 \cdot 2{,}4}{\sqrt{10}} < a < 2 + \frac{2{,}26 \cdot 2{,}4}{\sqrt{10}},$$

$$0{,}3 < a < 3{,}7.$$

***Пример* 3.** Произведено 12 измерений одним прибором некоторой физической величины. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально. «Исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99.

Решение. Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала по формулам (7.4.4).

По таблице приложения 4 $q = q(\gamma, n)$ по заданным n = 12 и $\gamma = 0{,}99$ найдем q=0,9. Получим искомый интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \;,$$

$$0{,}6(1-0{,}9) < \sigma < 0{,}6(1+0{,}9) \;,$$

$$0{,}06 < \sigma < 1{,}14.$$

ЗАДАЧИ

7.4.1. При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратическим отклонением 0,2В, проведено 10 измерений напряжения бортовой батареи. Найти доверительный интервал для истинного значения напряжения батареи, если задана надежность оценки $\gamma = 0,95$. Среднее арифметическое результатов наблюдений $\bar{x} = 50,2B$. Контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

7.4.2. Из большой партии электроламп было отобрано случайным образом 400 шт. для определения средней продолжительности горения. Выборочная средняя продолжительность горения ламп оказалась равной 1220 ч. Найти с надежностью $\gamma = 0,997$ доверительный интервал для средней продолжительности горения электролампы по всей партии, если среднее квадратическое отклонение продолжительности горения равно 35 ч.

7.4.3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3,5$, выборочная средняя $\overline{x_в} = 11,4$, $n = 20$.

7.4.4. Станок штампует валики. По выборке обьема $n = 50$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

7.4.5. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,999 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,5, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 2$.

7.4.6. В результате пусков 10 ракет получены (в условных единицах) значения боковых отклонений точек попадания от точек прицеливания:

Номер ракеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение	1,0	2,0	1,0	-0,1	-0,5	5,0	-1,0	3,0	0,5	1,0

Полагая, что случайное боковое отклонение точек попадания от точек прицеливания имеет нормальное распределение, построить доверительный интервал для ее математического ожидания с надежностью $\gamma = 0,99$.

7.4.7. Произведено девять независимых измерений физической величины

1	2	3	4	5	6	7	8	9
42,1	43,2	42,9	42,7	42,8	42,6	43,1	43,3	42,5

Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0,95$.

7.4.8. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью $\gamma = 0,95$ точность оценки математического ожи- дания была равной $\delta = 0,2$, если среднее квадратическое отклонение равно 4.

7.4.9. По данным выборки объемом $n = 20$, извлеченной из нормально распределенной генеральной совокупности, найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 5{,}1$. Определить доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью $\gamma = 0{,}999$.

7.4.10. Произведено 10 измерений одним прибором без систематической ошибки некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью $\gamma = 0{,}95$. Результаты измерений распределены нормально. (Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений.)

ВОПРОСЫ

1. Что называют статистической совокупностью?
2. Суть выборочного метода.
3. Что называется генеральной совокупностью?
4. Что называют выборкой?
5. Какая выборка называется репрезентативной (представительной)?
6. Что называют статистическим распределением выборки?
7. Дайте определение функции распределения выборки.
8. Что называют полигоном относительных частот?
9. Какая статистическая оценка называется несмещенной.
10. Запишите формулу для вычисления генеральной средней.
11. Запишите формулу для вычисления выборочной средней.
12. Что значит найти несмещенную оценку генеральной средней?
13. Запишите формулы для вычисления генеральной дисперсии.
14. Запишите формулы для вычисления выборочной дисперсии.
15. Как определяют выборочное среднее квадратическое отклонение?
16. Что является несмещенной оценкой генеральной дисперсии?
17. Запишите формулу для вычисления «исправленного» среднего квадратического отклонения.
18. Запишите формулу для вычисления эмпирической, или исправленной дисперсии.
19. Какая оценка называется точечной?
20. Какая оценка называется интервальной?
21. Что называют надёжностью (доверительной вероятностью)?
22. Какой интервал называют доверительным?
23. Запишите формулу для оценки доверительного интервала математического ожидания нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении.
24. Запишите формулу для оценки доверительного интервала математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении.

8 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

8.1 Статистическая гипотеза. Критерий проверки нулевой гипотезы

Предположим, что требуется подобрать распределение исследуемой СВ X по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, извлеченной из генеральной совокупности. Предположим, что по виду гистограммы или полигона частот, или, исходя из других каких-нибудь соображений, выбран класс распределения, которому может принадлежать величина X.

Наиболее часто стараются выбрать класс нормальных величин, то есть построить нормальную модель, так как она наиболее разработана. Кроме того, нормальное распределение является предельным для многих других распределений и может быть принято в качестве приближенной модели для многих типов величин.

После того, как тип распределения выбран, производится оценка параметров этого распределения. Некоторые задачи такого вида рассмотрены в главе 7. В результате будет построена теоретико-вероятностная модель эксперимента. Дальнейшая задача состоит в выяснении того, насколько хорошо подобрана вероятностная модель. В связи с этим могут быть сформулированы различные предположения (гипотезы).

Статистическая гипотеза − это некоторое предположение относительно свойств генеральной совокупности, из которой извлечена выборка. Статистическая гипотеза называется ***непараметрической***, если в ней сформулированы предположения относительно вида распределения.

Статистическая гипотеза называется ***параметрической,*** если в ней сформулированы предположения относительно параметров функции распределения известного вида.

Сформулированную основную гипотезу называют ***нулевой*** гипотезой и обозначают символом H_0. Наряду с выдвинутой нулевой гипотезой рассматривают альтернативную (конкурирующую) гипотезу и обозначают символом H_a. Если нулевая гипотеза отвергается, то принимается альтернативная гипотеза.

Пример. $a = M(X)$, a_0 − фиксированное число.

Нулевые гипотезы:	Альтернативные гипотезы:
1) $\text{H}_0 : a = a_0$;	1) $\text{H}_a : a \neq a_0$;
2) $\text{H}_0 : a = a_0$;	2) $\text{H}_a : a < a_0$;
3) $\text{H}_0 : X$ − нормальная СВ;	3) $\text{H}_a : X$ − нормальная СВ;

Критерий проверки статистической гипотезы− это правило, позв оляющее принять или отвергнуть нулевую гипотезу на основании выборки. Для построения такого правила исследуют специальным образом подобранную случайную величину, являющуюся функцией наблюдаемых значений.

Общий план исследования следующий. Предположим, например, что сформулирована нулевая гипотеза H_0: X − нормальная СВ. Пусть K − статистика (критерий, некоторая СВ), которая выбрана для проверки гипотезы H_0. Пусть $K_0 = M(K)$ − математическое ожидание K, $f(K/H_0)$ − плотность распределения K при условии, что H_0 верна и $\alpha \in (0;1)$ − число.

Найдем такие K_1, K_2, что $P(K_1 < K < K_2) = \int\limits_{K_1}^{K_2} f(K|H_0)dK = \alpha$. Числа K_1, K_2 − критические точки критерия K.

Промежуток (K_1, K_2) − область допустимых значений K, при которых нулевая гипотеза не отклоняется. Области $(-\infty, K_2)$ и $(K_1, +\infty)$ − области отклонения нулевой гипотезы. В такой ситуации говорят, что K − ***двусторонний критерий*** значимости. В некоторых случаях экспериментатор твердо убежден, что $K > K_0 = M(K)$. В таком случае критическая область является ***правосторонней*** и критерий K называется ***правосторонним***. Критическая K_α точка, отделяющая области принятия и отклонения гипотезы для правостороннего критерия находятся из условия: $P(K \geq K_\alpha) = \int\limits_{K_\alpha}^{+\infty} f(K|H_0)dK = \alpha$. Аналогично определяется левосторонний критерий K.

8.2 Проверка гипотезы о нормальном распределении. Критерий Пирсона

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n ($n \geq 50$). Весь диапазон полученных результатов разобьём на k частичных интервалов <u>равной</u> длины и в каждом частном интервале оказалось n_i измерений ($n_i \geq 5$), $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Составим сгруппированный статистический ряд распределения частот:

$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	. . .	$[x_k, x_{k+1}]$
n_i	n_1	n_2	. . .	

Требуется на основе этой выборки проверить нулевую гипотезу H_0: X − нормальная СВ. Общий план работы следующий.

1) находим выборочное среднее $\overline{x^*}$ и выборочное с.к.о. σ_B;
2) находим вероятности попадания значений X в промежутки $[x_i, x_{i+1})$ $p_i = P(x_i \leq X < x_{i+1})$ предполагая, что X − нормальная СВ;
3) находим n_i' − теоретические частоты $n_i' = np_i$ попадания X в $[x_i, x_{i+1})$;
4) по эмпирическим и теоретическим частотам $n_1, \ldots, n_k, n_1', \ldots, n_k'$ вычисляем значения критерия χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \qquad (8.2.1)$$

Теоретически доказано, что если гипотеза верна, то при $n \to \infty$ распределение (8.2.1) стремится к распределению χ^2 с $\nu = k - r - 1$ степенями свободы (r =2 − число параметров нормального распределения).

Критерий χ^2 сконструирован так, что чем ближе к нулю наблюдаемое значение χ^2, тем вероятнее, что нулевая гипотеза справедлива. Поэтому для проверки нулевой гипотезы применяется критерий χ^2 с <u>правосторонней</u> критической областью.

По таблице критических точек распределения χ^2 приложения 5 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ находим критическое значение $\chi^2_{\text{êðèò}}$, удовлетворяющее условию $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{êðèò}}) = \alpha$.

Если $\chi^2_{\text{íàáë}} \geq \chi^2_{\text{êðèò}}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается.

Если $\chi^2_{\text{íàáë}} < \chi^2_{\text{êðèò}}$, то нулевая гипотеза H_0 принимается.

Пример **1.** Извлечена выборка объема n=200 значений непрерывного признака X:

$[x_i, x_{i+1}]$	19 - 20	20 - 21	21 - 22	22 - 23	23 - 24	24 - 25
n_i	10	26	56	64	30	14

При уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X.

Решение. Найдем середины интервалов $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_{i+1}}{n}$. Получим последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот

x_i^*	19,5	20,5	21,5	22,5	23,5	24,5
n_i	10	26	56	64	30	14

Находим среднее выборочное (7.2.5)

$$\overline{x^*} = \frac{19{,}5 \cdot 10 + 20{,}5 \cdot 26 + 21{,}5 \cdot 56 + 22{,}5 \cdot 64 + 23{,}5 \cdot 30 + 24{,}5 \cdot 14}{200} = 22{,}1,$$

выборочную дисперсию по (7.2.12)

$$D_{\text{Â}} = \frac{19{,}5^2 \cdot 10 + 20{,}5^2 \cdot 26 + \ldots + 24{,}5^2 \cdot 14}{200} - 22{,}1^2 = 1{,}52,$$

выборочное с.к.о. $\sigma_{\hat{A}} = \sqrt{D_{\hat{A}}} = \sqrt{1{,}52} = 1{,}233$.

Нормируем величину X, то есть переходим к величине $Z = \dfrac{X - \overline{x^*}}{\sigma_{\hat{A}}}$ и найдем концы интервалов (z_i ; z_{i+1}): $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma_{\hat{A}}}$, $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma_{\hat{A}}}$.

Все вычисления заносим в таблицу:

x_i,	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	n_i	p_i	$n_i' = np_i$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
19	20	-∞	-1,70	10	0,045	9	1	0,11
20	21	-1,70	-0,89	26	0,142	28,4	5,76	0,20
21	22	-0,89	-0,08	56	0,281	56,2	0,04	0,00
22	23	-0,08	+0,73	64	0,299	59,8	17,64	0,29
23	24	+0,73	+1,54	30	0,171	34,2	17,64	0,52
24	25	+1,54	+∞	14	0,062	12,4	2,56	0,21
Σ				200	1	200		$\chi^2_{\text{íàáë}} = 1{,}33$

В предположении, что X − нормальная величина, заменяем z_1 = -2,51 на -∞, а z_1 = -2,35 на ∞. Находим теоретические вероятности p_i попадания X в интервалы (x_i, x_{i+1}): $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ ($\Phi(z)$ − функция Лапласа) и, наконец, находим теоретические частоты $n_i' = np_i$.

В результате вычислений получили $\chi^2_{\text{íàáë}} = 1{,}33$. По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы ν=6-2-1=3 находим $\chi^2_{\text{êðèò}}(0{,}05; 3) = 7{,}8$. Так как $\chi^2_{\text{íàáë}} = 1{,}33 < \chi^2_{\text{êðèò}} = 7{,}8$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении признака X.

ЗАДАЧИ

8.2.1. По выборке значений непрерывного признака X вычислены теоретические частоты n_i'. При уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X.

а)

n_i	6	12	16	40	13	8	5
n_i'	4	11	15	43	15	6	6

б)

n_i	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
n_i'	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

в)

n_i	5	13	12	44	8	12	6
n'_i	2	20	12	35	15	10	6

Указание. Смотри таблицу примера 1, в которой n_i и $n'_i = np_i$ найдено $\chi^2_{\text{í àáë}}$.

8.2.2. Извлечена выборка значений непрерывного признака *X*:

$[x_i, x_{i+1}]$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении признака *X*.

9 ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Вариант-1

№ задания	Содержание задания
ЧАСТЬ А	
1	**2**
А1	На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 9 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что каждый рабочий может быть отправлен на сельскохозяйственные работы. 1) 36 2) 135 3) 180 4) 1620 5) 83
А2	Сколькими способами можно выбрать два карандаша и четыре ручки из шести различных карандашей и пяти различных ручек? 1) 75 2) 125 3) 10 4) 80 5) 140
А3	Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «песня». 1) 0.5 2) 0.9 3) 0.63 4) 0.00011 5) 0.0083
А4	Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.8, вторым – 0.7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз? а) 1) 0.04 2) 0.14 3) 0.3 4) 0.16 5) 0.94 б) 1) 0.14 2) 0.24 3) 0.28 4) 0.56 5) 0.94 в) 1) 0.74 2) 0.65 3) 0.38 4) 0.06 5) 0.94
А5	20 % приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0.9, интегральных схем – 0.8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он исправлен. а) 1) 0.24 2) 0.82 3) 0.15 4) 0.12 5) 0.14 б) 1) 0.22 2) 0.89 3) 0.65 4) 0.72 5) 0.144
А6	Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0.4. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность поражения цели три раза. 1) 0.77 2) 0.65 3) 0.28 4) 0.98 5) 0.32

A7	Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0.004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на шести веретенах. 1) 0.1212 2) 0.73 3) 0.3461 4) 0.5678 5) 0.4101

ЧАСТЬ B	
B1	Производится три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0.4, вторым – 0.5, третьим – 0.6. Случайная величина X – число поражений мишени. Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
B2	Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$: $p_1 = 0.1, M(X) = 3.9, D(X) = 0.09$. Найти закон распределения этой случайной величины.
B3	Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[a;b]$ $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{8}x^3, \text{если } 0 \le x \le 2, a = 0, b = 1, \\ 1, \text{если } x > 2. \end{cases}$

Вариант-2

№ задания	**Содержание задания**
ЧАСТЬ А	
1	**2**
A1	Сколько различных пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (без повторений)? 1) 12 2) 120 3) 720 4) 6400 5) 15120
A2	Шесть человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из шести вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку. 1) 720 2) 340 3)567 4) 88 5) 630

A3	Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани. 1) 0.004 2) 0.234 3) 0.876 4)0.453 5) 0.096
A4	При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0.7; 0.8; 0.6. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен: а) тремя станциями, б) не менее чем двумя станциями, в) ни одной станцией. а) 1) 0.336 2) 0.0240 3) 0.006 4) 0.372 5) 0.899 б) 1) 0.006 2) 0.788 3) 0.902 4) 0.390 5) 0.809 в) 1) 0.567 2) 0.024 3) 0.602 4) 0 .362 5) 0.776
A5	Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными: 0.2; 0.3; 0.5. Вероятность брака на первом станке равна 0.02, на втором – 0.03, на третьем – 0.01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной. а) 1) 0.2963 2) 0.982 3) 0.670 4) 0.452 5) 0.112 б) 1) 0.987 2) 0.123 3) 0.678 4) 0.2963 5) 0.2963
A6	Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0.8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут не менее пяти изделий. а) 1) 0.789 2) 0.453 3) 0.650 4) 0.6553 5) 0.4
A7	Вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0.5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 высшего сорта. а) 1) 0.675 2) 0.0252 3) 0.567 4) 0.0015 5) 0.952
ЧАСТЬ B	
B1	Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0.9, второго типа – 0.7, третьего типа – 0.8. Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов. Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

В2	Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0.3, M(X) = 3.7, D(X) = 0.21$.
В3	Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[a;b]$, если $F(x) = \begin{cases} 0, если x < 0, \\ 1/33(2x^2 + 5x), если 0 \le x \le 3, a = 1, b = 2, \\ 1, если x > 3. \end{cases}$

Вариант-3

№ задания	Содержание задания
ЧАСТЬ А	
1	**2**
А1	Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 10 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть? 1) 169 2) 120 3) 1650 4) 720 5) 83
А2	Бригадир должен отправить на работу звено из 6 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 11 человек бригады. 1) 66 2) 120 3) 462 4) 940 5) 110
А3	Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок две – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго. 1) 0.3601 2) 0.3908 3) 0.99 4) 0.77 5) 0.112
А4	Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества, равна 0.7, вторым – 0.8, третьим – 0.6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник? а) 1) 0.452 2) 0.336 3) 0.976 4) 0.123 5) 0.895 б) 1) 0.905 2) 0.246 3) 0.452 4) 0.879 5) 0.155 в) 1) 0.976 2) 0.336 3)0.452 4) 0.123 5) 0.895

A5	Среди поступивших на сборку деталей 30 % – с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0.02, для завода № 2 – 0.03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной. а) 1) 0.231 2) 0.973 3) 0 4) 0.4 5) 0.332 б) 1) 0.750 2) 0.111 3) 0.882 4) 0.467 5) 0.302
A6	Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 2 % нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей три нестандартных. 1) 0.123 2) 0.88 3) 0.02 4) 0.009 5) 0.00008
A7	Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не менее 70 и не более 80 раз. 1) 0.8976 2) 0.0087 3) 0.55 4) 0.342 5) 0.4938
ЧАСТЬ В	
B1	Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0.7. Случайная величина X – число поражений цели при четырех выстрелах. Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
B2	Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0.5, M(X) = 3.5, D(X) = 0.25$.
B3	Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[a;b]$, если $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{9}x^2, \text{если } 0 \le x \le 3, a = 0, b = 1, \\ 1, \text{если } x > 3. \end{cases}$

Вариант-4

№ задания	Содержание задания
ЧАСТЬ А	
1	**2**
А1	На станции имеется 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда? 1) 189 2) 1240 3) 840 4) 120 5) 260
А2	При встрече 10 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом. 1) 50 2) 48 3) 55 4) 45 5) 220
А3	В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. 1) 0.567 2) 0.432 3) 0.0001 4) 0.99 5) 0.008
А4	Первый станок-автомат дает 1 % брака, второй – 1.5 %, а третий – 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь? а) 1) 0.9556 2) 0.1997 3) 0.0437 4) 0.567 5) 0.987 б) 1) 0.00556 2) 0.9997 3) 0.567 4) 0.987 5) 0.0437 в) 1) 0.9556 2) 0.999997 3) 0.00078 4) 0.678 5) 0.337
А5	Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата высшего качества, равна 0.8, для второго – 0.6, для третьего – 0.7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом. а) 1) 0.78 2) 0.42 3) 0.69 4) 0.2319 5) 0.11 б) 1) 0.11 2) 0.43 3) 0.44 4) 0.2489 5) 0.2319
А6	Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих равна 0.8. Найти вероятность того, что перевыполняет годовой план двое рабочих. 1) 0.221 2) 0.876 3) 0.001146 4) 0.0088 5) 0.5

A7	Вероятность того, что изделие высшего качества, равна 0.5. Найти вероятность того, что из 400 изделий число изделий высшего качества составит от 194 до 208. 1) 0.4578 2) 0.987 3) 0.5138 4) 0.1123 5) 0.678
ЧАСТЬ В	
B1	Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0.8. В контрольной партии – 3 прибора. Случайная величина X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества. Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
B2	Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}7$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X) = 3{,}3$ и дисперсия $D(X) = 0{,}21$. Найти закон распределения этой случайной величины.
B3	Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{24}(x^2 + 2x), \text{если } 0 \le x \le 4, a = 0, b = 1. \\ 1, \text{если } x > 4 \end{cases}$ Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[a;b]$.

Ответы

Задание		**Вариант**			
		1	**2**	**3**	**4**
А1		4	5	4	3
А2		1	1	3	4
А3		5	5	1	5
А4	**а**	5	1	2	1
	б	4	2	3	5
	в	3	2	1	2
А5	**а**	2	2	2	3
	б	1	4	5	5
А6		3	4	5	3
А7		1	2	5	3

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : ООО «Новое знание», 2004.– 251 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Москва : Высш. школа, 1977. – 479 с.
3. Гринберг, А. С. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2005. – 186 с.
4. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. школа, 1984. – 223 с.
5. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2007. – 288 с.
6. Денисов, В. С. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Часть 3 / В. С. Денисов [и др.] – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – 65 с.
7. Карасев, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасев. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.
8. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский. – Москва : Высш. школа, 1991. – 400 с.
9. Муранов, Ю. В. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике / Ю. В. Муранов, П. Л. Иванков, О. Е. Рубаник. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.
10. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А. П. Рябушко [и др.] – Минск : Выш. школа, 1992. – 191 с.
11. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1987.– 240 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений для функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004

Окончание таблицы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица значений для функций $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

Окончание таблицы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma,n)$

n/γ	**0,95**	**0,99**	**0,999**	n/γ	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,990	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n/γ	0,95	0,99	0,999	n/γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,02	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2 для уровня значимости α=0,05 (ν − число степеней свободы)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi^2_{\text{êðèò}}(\alpha;\nu)$	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3
ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2_{\text{êðèò}}(\alpha;\nu)$	19,7	21,0	22,4	23,7	25,0	26,3	27,6	28,9	30,1	31,4
ν	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\chi^2_{\text{êðèò}}(\alpha;\nu)$	32,7	33,9	35,2	36,4	37,7	38,9	40,1	41,3	42,6	43,8