Обозначим

$$\bar{c}_i(t) = \sup_{\Omega} c_i(x,t),\ \bar{k}_i(t) = |\partial\Omega| \sup_{\Omega\times\partial\Omega} k_i(x,y,t),\ i = 1{,}2,$$

$$\bar{z}_1(t) = \bar{c}_1(t)\exp(p\int_0^t \bar{k}_2(\tau)d\tau - \int_0^t \bar{k}_1(\tau)d\tau),$$

$$\bar{z}_2(t) = \bar{c}_2(t)\exp(q\int_0^t \bar{k}_1(\tau)d\tau - \int_0^t \bar{k}_2(\tau)d\tau).$$

Предположим, что существуют такие постоянные α, t_0, K такие, что $\alpha > t_0$ и

$$\int_{t-t_0}^{t} \frac{\bar{k}_i(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \geq K \ \text{для всех}\ t \geq \alpha,\ i = 1{,}2. \tag{4}$$

Теорема 3. Пусть $pq>1$, выполнены условия (4) и задача (2) с $a=0$ и $r_i(t) = A_i \bar{z}_i(t)$ при любых $A_i>0$, $i=1{,}2$ и некоторых начальных данных имеет глобальные решения. Тогда задача (1) имеет глобальные решения для достаточно малых начальных данных.

Список литературы

1. Коньков А.А. О некоторых априорных оценках для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера // Математические заметки, 2003, Т. 73, Вып. 5, С. 792–796.
2. Рабцевич В.А. О быстрорастущих решениях систем Эмдена-Фаулера произвольного порядка // Дифференциальные уравнения, 1998, Т. 34, № 2, С. 222–227.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Т.В. Никонова
Витебск, ВГТУ

В современном транспортном и промышленном строительстве, в качестве составных и несущих частей различных конструкций, находят широкое применение тонкостенные цилиндрические оболочки. Способность этих оболочек выдерживать значительные нагрузки при минимальной толщине позволяет создавать из них легкие конструкции с хорошими жесткостными и прочностными характеристиками. Поэтому исследования, позволяющие углубить и расширить знания в области цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании, являются актуальными. Целью исследования является моделирование реакции упругого основания, позволяющей аналитически исследовать устойчивость конструкции без проведения экспериментальных испытаний.

Материал и методы. Материалом исследования является тонкостенная цилиндрическая оболочка, залегающая на упругом основании. В качестве метода исследования используется моделирование упругого основания изотропным упругим полупространством [1], причем считаем, что коэффициент постели основания c зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки при потере устойчивости. Предполагая, что между основанием и оболочкой имеется жесткий контакт, имеем

$$c = c_1\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,,\ c_1 = \frac{2E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}\,,\ k_1 = \frac{\pi n}{L},\quad k_2 = \frac{m}{R}, \tag{1}$$

где E_0, ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для упругого основания, n – число полуволн в осевом направлении, m – число волн в окружном направлении, k_1, k_2 – волновые числа, связанные с формой волнообразования оболочки при потере устойчивости, R, L – радиус и длина оболочки, соответственно.

Следует учитывать, что область применимости модели упругого полупространства ограничена рядом условий [1]: эту модель следует использовать вдали от краев оболочки, глубина основания H должна быть больше, чем длина характерной полуволны $l_1 = \pi \Big/ \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, длина характерной полуволны l_1 должна быть существенно меньше радиуса R оболочки.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим случай длинной цилиндрической оболочки, находящейся под воздействием тангенциального усилия T_2^0, лежащей на упругом основании, моделируемом упругим полупространством. В соответствии с принимаемой моделью, реакция основания зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки.

В этом случае формула для нахождения тангенциального усилия T_2^0 имеет вид:

$$T_2^0 = -\frac{Eh\left(\varepsilon^8[(\lambda^2+m^2)^2 - 2m^2 + 1] + \lambda^4/(\lambda^2+m^2)^2 + c_2\sqrt{\lambda^2+m^2}\right)}{m^2 - 1 - m^2\lambda^2/(\lambda^2+m^2)^2}, \qquad (2)$$

где E, h – модуль Юнга и толщина оболочки, ε – малый параметр, $\lambda=\pi Rn/L$, $c_2 = c_1 R/(Eh)$.

Критическое тангенциальное усилие T_2^* может быть найдено путем минимизации усилия $\left|T_2^0\right|$ по переменным m и n при фиксированных значениях E_0, ν_0. Так как коэффициент c связан со значениями k_1 и k_2, то при минимизации (2) будет учтена зависимость реакции основания от формы волнообразования при потере устойчивости.

Для оболочек средней длины ($\varepsilon^2 << 1$ и $\lambda \sim 1$) $\lambda << m$. Тогда, пренебрегая λ^2 и 1 по сравнению с m^2, из (2) получим приближенную формулу

$$T_2^* = -\min_m\left[\frac{Eh\left(\varepsilon^8 m^4 + \lambda^4/m^4 + c_2 m\right)}{m^2}\right], \quad n = 1, \qquad (3)$$

справедливую для случая, когда $\varepsilon^8 m^4 \sim \lambda^4/m^4 \sim c_2 m$ при $\varepsilon \to 0$. Формула отличается от аналогичной формулы, полученной Товстиком П.Е., наличием слагаемого $c_2 m$, учитывающего наличие упругого основания, реакция которого зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки.

Если оболочки длинные ($\lambda \le \varepsilon^2$) и $\varepsilon^8 m^3 \sim c_2$ при $\varepsilon \to 0$, то, опустив второе слагаемое в (3), находим

$$T_2^* = -\min_m\left[\frac{Eh\left(\varepsilon^8 m^3 + c_2\right)}{m}\right], \quad n = 1. \qquad (4)$$

Здесь потеря устойчивости происходит при одном из целых m, ближайших к

$$m_0 = \sqrt[3]{\varepsilon^{-8} c_2 / 2}\,. \qquad (5)$$

Заключение. Для длинных оболочек при $c_2 \sim \varepsilon^8$, из (3) получаем формулу

$$T_2^* = -\frac{Eh^3}{4R^2(1-\nu^2)} - \frac{4E_0(1-\nu_0)R}{3(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}, \qquad (6)$$

имеющую место при $m = 2$, $n = 1$ и обобщающую формулу Грасгофа – Бресса на случай оболочки, лежащей на упругом основании с реакцией, зависящей от характера волнообразования на поверхности оболочки. Соотношения (3),(4),(6) позволяют решить задачу об устойчивости цилиндрической оболочки на упругом основании с реакцией, зависящей от числа волн на поверхности оболочки, а также модуля Юнга и коэффициента Пуассона упругого основания.

Список литературы

1. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании / П.Е. Товстик // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – №1. – С. 147-160.