

УДК 519.615

Рубаник О.Е.

Старший преподаватель кафедры МиИТ УО «ВГТУ»,

Никонова Т.В.

Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры МиИТ УО «ВГТУ»,

г. Витебск, РБ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: ОБЗОР И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Аннотация

Статья посвящена проблематике решения систем нелинейных уравнений. Рассмотрены следующие численные методы нахождения решений: метод простых итераций, метод Зейделя и метод Ньютона. Приведен пример поиска решения с заданной точностью по каждому из указанных методов и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова

системы нелинейных уравнений, численные методы, итерационные методы, метод простых итераций, метод Зейделя, метод Ньютона, сходимость итерационного процесса.

В общем виде систему n нелинейных уравнений с n неизвестными можно записать в виде:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Численное решение системы (1) можно разбить на три этапа:

- 1) отделение корней и выбор оптимальных начальных приближений;
- 2) преобразование системы к требуемому виду;
- 3) уточнение корня согласно алгоритма применяемого метода.

Первый этап – отделение корней, удобно проводить графически. Для этого нужно построить графики всех функций системы (1) в одной системе координат, используя необходимые графические средства, например, СКА Maple и на основании визуального анализа сделать вывод о количестве корней и для каждого корня выбрать оптимальные начальные приближения.

На втором этапе систему нужно преобразовать к требуемому соответствующим методом виду, чтобы выполнялись условия итерационного процесса.

На третьем этапе происходит уточнение корня, пока не будет достигнута заранее заданная точность.

В рамках данной работы рассмотрим метод простых итераций, метод Зейделя и метод Ньютона для случая $n=2$, проведем сравнительный анализ этих методов.

Итак, рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Метод простых итераций

Для построения схемы итераций систему (2) нужно представить в виде

$$\begin{cases} x = f_1(x, y), \\ y = f_2(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

то есть из каждого уравнения нужно выразить по одной переменной.

Пусть $(x^{(0)}; y^{(0)})$ – начальное приближение корня из области D_k . Подставляя эти значения в правые части равенств (3), находим следующие приближения:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = f_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} = f_2(x^{(k)}, y^{(k)}). \end{cases} \quad (4)$$

Метод Зейделя

В методе Зейделя каждое следующее приближение корня находят из равенств:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = f_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} = f_2(x^{(k+1)}, y^{(k)}). \end{cases} \quad (5)$$

Для сходимости итерационного процесса в методе простых итераций и методе Зейделя необходимо, чтобы в области уточнения корня D_k выполнялось условие:

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|; \left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| \right\} \leq q < 1, \quad (6)$$

где q (коэффициент сжатия) – постоянная. Причем, чем ближе коэффициент сжатия q к единице, тем скорость сходимости итерационного процесса меньше, то есть число итераций больше. Выражение, стоящее в левой части условия (6), называется нормой.

Требуемая точность ε будет достигнута, когда будет выполняться условие

$$\frac{q}{1-q} \max \{ |x^{(k)} - x^{(k-1)}|; |y^{(k)} - y^{(k-1)}| \} < \varepsilon. \quad (7)$$

В случае, когда коэффициент сжатия q близок к 0,5, (7) примет вид:

$$\max \{ |x^{(k)} - x^{(k-1)}|; |y^{(k)} - y^{(k-1)}| \} < \varepsilon. \quad (8)$$

Необходимо отметить, что условие (6) означает, что в окрестности каждого решения системы (3) функции f_1 и f_2 должны незначительно меняться при изменении их независимых аргументов. Общих приемов для достижения этих целей не существует, но можно, например, составить все возможные выражения из системы (2), пригодные для приведения к виду системы (3) и после выполнения условия (6) выбрать подходящий.

Метод Ньютона

Для решения системы (2) методом Ньютона каждое следующее приближение корня находят из равенств:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \\ y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)}, \end{cases} \quad (9)$$

где приращения $\Delta x^{(k)}$ и $\Delta y^{(k)}$ вычисляют для каждой итерации из матричной системы вида

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^{(k)}; y^{(k)}) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x^{(k)}; y^{(k)}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x^{(k)}; y^{(k)}) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x^{(k)}; y^{(k)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(x^{(k)}; y^{(k)}) \\ -F_2(x^{(k)}; y^{(k)}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Счет прекращается, если выполнено условие: $\max(|\Delta x^{(k)}|, |\Delta y^{(k)}|) < \varepsilon$.

Пример. Решить систему нелинейных уравнений с точностью 0,001

$$\begin{cases} \cos(xy + 0,5) - 2y = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Решение. Для отделения корней и выбора начальных приближений построим в одной системе координат графики функций $\cos(xy + 0,5) - 2y = 0$ и $x^2 + 2y^2 = 1$ в математическом пакете Maple (рис. 1).

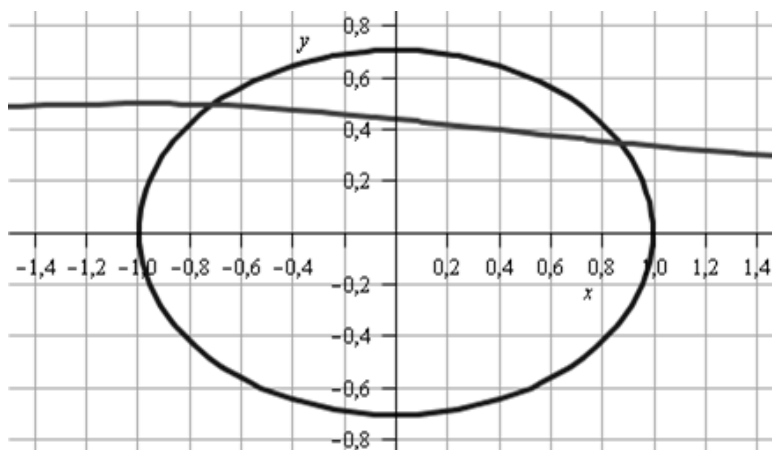


Рисунок 1 – Графики функций, входящих в систему

Источник: разработано автором

Визуальный анализ рисунка 1 показывает, что система имеет два решения: первое решение находится в первой четверти, а второе – во второй. За начальное приближение первого корня системы примем точку $(0,9; 0,4)$, а второго – $(-0,7; 0,5)$.

Следующий этап – преобразование системы к требуемому методам виду. Для применения метода простых итераций и метода Зейделя нужно привести систему к виду (3). Для этого нужно составить все возможные выражения из системы (11), пригодные для приведения к виду (3) и проверить выполнение условия сходимости (6) для каждого начального приближения.

В данной работе все необходимые дальнейшие вычисления проводились с использованием ТП Excel и результаты представлены в таблицах.

Рассмотрим первое уравнение системы (11): $\cos(xy + 0,5) - 2y = 0$ в нулевом приближении $(0,9; 0,4)$.

Таблица 1

Значение нормы для функции $f_1(x; y)$ в нулевом приближении $(0,9; 0,4)$

	Вид записи $x = f_1(x; y)$ или $y = f_1(x; y)$	Частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}$	Значение $\left \frac{\partial f_1}{\partial x} \right $ и $\left \frac{\partial f_1}{\partial y} \right $ в точке $(0,9; 0,4)$	Норма $\left \frac{\partial f_1}{\partial x} \right + \left \frac{\partial f_1}{\partial y} \right $ для точки $(0,9; 0,4)$
1	$y = \frac{1}{2} \cos(xy + 0,5)$	$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{y}{2} \sin(xy + 0,5)$	0,152	0,493
		$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{x}{2} \sin(xy + 0,5)$	0,341	
2	$x = \frac{\arccos(2y) - 0,5}{y}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$	0	13,081
		$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{2}{y\sqrt{1-4y^2}} - \frac{\arccos(2y) - 0,5}{y^2}$	13,081	
3	$y = \frac{\arccos(2y) - 0,5}{x}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\arccos(2y) - 0,5}{x^2}$	0,177	3,881
		$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{2}{x\sqrt{1-4y^2}}$	3,704	

Источник: разработано автором

Рассмотрим второе уравнение системы (11): $x^2 + 2y^2 = 1$ в нулевом приближении $(0,9; 0,4)$.

Таблица 2

Значение нормы для функции $f_2(x; y)$ в нулевом приближении (0,9;0,4)

	Вид записи $x = f_2(x; y)$ или $y = f_2(x; y)$	Частные производные $\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$	Значение $\left \frac{\partial f_2}{\partial x} \right $ и $\left \frac{\partial f_2}{\partial y} \right $ в точке (0,9;0,4)	Норма $\left \frac{\partial f_2}{\partial x} \right + \left \frac{\partial f_2}{\partial y} \right $ для точки (0,9;0,4)
1	$x = \sqrt{1 - 2y^2}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$	0	0,436
		$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$	0,436	
2	$x = \frac{1 - 2y^2}{x}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{1 - 2y^2}{x^2}$	0,84	2,618
		$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{4y}{x}$	1,778	
3	$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{2(1 - x^2)}}$	1,46	1,46
		$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$	0	
4	$y = \frac{1 - x^2}{2y}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{x}{y}$	2,25	2,844
		$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{1 - x^2}{2y^2}$	0,594	

Источник: разработано автором

Условие сходимости итерационного процесса в первой точке начального приближения выполняются для случая 1 из таблицы 1 и случая 1 таблицы 2, причем тогда коэффициент сжатия q близок к 0,5. Во всех других случаях итерационный процесс будет расходящимся.

Таким образом, система (11) для нахождения первого корня примет вид

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - 2y^2}, \\ y = 0,5 \cos(xy + 0,5). \end{cases} \quad (12)$$

Результаты численного решения системы (11) для нахождения первого корня методом простых итераций и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,001$ приведены в таблицах 3-4.

Таблица 3

Уточнение первого корня методом простых итераций

Номер итерации k	Приближение корня		Проверка условия $ x^{(k)} - x^{(k-1)} < \varepsilon$	Проверка условия $ y^{(k)} - y^{(k-1)} < \varepsilon$
	$x(k)$	$y(k)$		
0	0,9	0,4		
1	0,824621	0,326219	не выполняется	не выполняется
2	0,8887222	0,359301	не выполняется	не выполняется
3	0,861281	0,341557	не выполняется	не выполняется
4	0,875602	0,350436	не выполняется	не выполняется
5	0,868556	0,345891	не выполняется	не выполняется
6	0,872192	0,348201	не выполняется	не выполняется
7	0,870352	0,347025	не выполняется	не выполняется
8	0,871291	0,347623	выполняется	выполняется

Источник: разработано автором

Таблица 4

Уточнение первого корня методом Зейделя

Номер итерации k	Приближение корня		Проверка условия $ x^{(k)} - x^{(k-1)} < \varepsilon$	Проверка условия $ y^{(k)} - y^{(k-1)} < \varepsilon$
	$x(k)$	$y(k)$		
0	0,9	0,4		
1	0,824621	0,337494	не выполняется	не выполняется
2	0,878747	0,349581	не выполняется	не выполняется
3	0,869245	0,346962	не выполняется	не выполняется
4	0,871341	0,347519	не выполняется	выполняется
5	0,870896	0,3474	выполняется	выполняется

Источник: разработано автором

Для решения системы (11) методом Ньютона перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} F_1(x; y) = \cos(xy + 0,5) - 2y, \\ F_2(x; y) = x^2 + 2y^2 - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Найдем частные производные функций $F_1(x; y)$ и $F_2(x; y)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\sin(xy + 0,5) \cdot y; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin(xy + 0,5) \cdot x - 2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 4y.$$

Тогда следующие приближения будем вычислять по формулам (9), а приращения $\Delta x^{(k)}$ и $\Delta y^{(k)}$ – находить для каждой итерации из матричной системы

$$\begin{bmatrix} -\sin(x^{(k)}y^{(k)} + 0,5) \cdot y^{(k)} & -\sin(x^{(k)}y^{(k)} + 0,5) \cdot x^{(k)} - 2 \\ 2x^{(k)} & 4y^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x^{(k)}y^{(k)} + 0,5) + 2y^{(k)} \\ -(x^{(k)})^2 - 2(y^{(k)})^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений представлены в таблице 5.

Таблица 5

Уточнение первого корня методом Ньютона

Номер итерации k	Приближение корня		$\Delta x^{(k)}$	$\Delta y^{(k)}$	Проверка условия $\max(\Delta x^{(k)} , \Delta y^{(k)}) < \varepsilon$
	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$			
0	0,9	0,4	-0,025921	-0,052089	не выполняется
1	0,874079	0,347911	-0,003099	-0,00049	не выполняется
2	0,87098	0,347422	-0,0000056	-0,0000002	выполняется

Источник: разработано автором

Таким образом, получено значение первого корня с точностью 0,001.

Для нахождения второго корня с заданной точностью за нулевое приближение примем точку $(-0,7; 0,5)$.

Проанализировав таблицы 1 и 2 применительно к начальному приближению $(-0,7; 0,5)$, для применения методов простых итераций и Зейделя, перепишем систему (11) в следующем виде:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{1 - 2y^2}, \\ y = 0,5 \cos(xy + 0,5). \end{cases} \quad (14)$$

Результаты численного нахождения второго корня системы с заданной точностью 0,001 представлены в таблицах 6-8.

Таблица 6

Уточнение второго корня методом простых итераций

Номер итерации k	Приближение корня		Проверка условия $ x^{(k)} - x^{(k-1)} < \varepsilon$	Проверка условия $ y^{(k)} - y^{(k-1)} < \varepsilon$
	$x(k)$	$y(k)$		
0	-0,7	0,5		
1	-0,70711	0,494386	не выполняется	не выполняется
2	-0,71496	0,494354	не выполняется	выполняется
3	-0,715002	0,49464	выполняется	выполняется

Источник: разработано автором

Таблица 7

Уточнение второго корня методом Зейделя

Номер итерации k	Приближение корня		Проверка условия $ x^{(k)} - x^{(k-1)} < \varepsilon$	Проверка условия $ y^{(k)} - y^{(k-1)} < \varepsilon$
	$x(k)$	$y(k)$		
0	-0,7	0,5		
1	-0,70711	0,494648	не выполняется	не выполняется
2	-0,714596	0,494642	не выполняется	выполняется
3	-0,714604	0,494642	выполняется	выполняется

Источник: разработано автором

Таблица 8

Уточнение второго корня методом Ньютона

Номер итерации k	Приближение корня		$\Delta x^{(k)}$	$\Delta y^{(k)}$	Проверка условия $\max(\Delta x^{(k)} , \Delta y^{(k)}) < \varepsilon$
	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$			
0	-0,7	0,5	-0,014774	-0,005342	не выполняется
1	-0,714774	0,494658	-0,000170	-0,000016	выполняется

Источник: разработано автором

Проведя анализ нахождения корней можно сделать следующие выводы. Наименьшее количество итераций потребовалось проводить при применении метода Ньютона, но при этом для каждой итерации предварительно нужно было решить матричную систему уравнений, что достаточно громоздко. Для метода простых итераций и метода Зейделя количество итераций больше, требуется предварительный глубокий анализ системы, но в то же время каждая итерация предусматривает достаточно простой подсчет. Таким образом, каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки, но в целом более оптимальным представляется метод Ньютона.

Список использованной литературы:

1. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 248 с.
2. Зенков А.В. Численные методы: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 124 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. — 432 с.

© Рубаник О.Е., Никонова Т.В., 2025

УДК 622.276

Шурлыгин В.С.

Студент второго курса магистратуры, ФГБОУ ВО Тюменский индустриальный университет,
г. Тюмень, РФ

Научный руководитель: Колев Ж.М.,

Кандидат технических наук, ФГБОУ ВО Тюменский индустриальный университет,
г. Тюмень, РФ

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ РАСЧЁТА ПРИТОКА НЕФТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С ТРЕЩИНАМИ МНОГОСТАДИЙНОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

Аннотация

В статье рассмотрены подходы к расчету притока нефти к горизонтальной скважине, оснащенной трещинами многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП). Проведен обзор различных аналитических