

где  $y_0(x)$  определено в (5). Решение же соответствующей однородной задачи типа Коши (с  $g(x) = 0$ ) имеет вид (5):

$$y(x) = y_0(x) = b_1 \left( \ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( \theta \left( \ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что, например,  $y_0(x)$  является решением однородной задачи:

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= \theta y(x), \\ (D_{a+}^{\alpha-1} y)(a+) &= b_1, \quad \theta, b_1 \in R, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

**Заключение.** В приложениях часто приходится решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Интегрируя некоторые классы дифференциальных уравнений целого порядка, приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе исследован частный случай аналитического решения дифференциальной задачи типа Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71-72.
3. Шлапаков, С.А. Об одной дифференциальной задаче с дробными производными Адамара / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 75-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 03 марта 2023 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – с. 66-68.
4. Шлапаков, С.А. О задаче типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / С.А. Шлапаков // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 76-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 01 марта 2024 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – С. 53-54.
5. Шлапаков С.А. Однородная задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 77 Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февраля 2025 г. / Витебский гос. ун-т; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. – с. 52-54.
6. Шлапаков, С.А. Об одной линейной дифференциальной задаче // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта (в печати).

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИСТЕРЕЗИСА В СТРУКТУРАХ С ГРАДИЕНТОМ СОСТАВА

*В.Н. Шут<sup>1</sup>, И.Ф. Кашевич<sup>2</sup>, И.Е. Синаков<sup>2</sup>*  
<sup>1</sup>Витебск, ВГТУ  
<sup>2</sup>Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Исследование сегнетоэлектрических материалов с градиентом состава, так называемых градиентных сегнетоэлектриков, представляет собой одно из активно развивающихся направлений в физике диэлектриков. Создание в материале управляемой неоднородности физических свойств позволяет не только улучшать существующие характеристики, но и получать материалы с принципиально новыми функциональными возможностями. Однако поведение таких систем, в частности их поляризационные характеристики, существенно отличается от поведения однородных аналогов, что требует разработки специализированных теоретических моделей.

В отличие от тонкоплёночных градиентных структур, где часто наблюдается сдвиг петель диэлектрического гистерезиса, в объёмных (толстоплёночных) образцах

такой сдвиг может отсутствовать. Это различие подчёркивает необходимость в модели, которая способна описать динамику поляризации именно в массивных структурах, где ключевую роль играют внутренние поля, возникающие из-за градиента состава, и междоменные взаимодействия [1; 2].

Цель работы – разработка и анализ численной модели на основе уравнения Ландау – Халатникова для исследования поляризационных характеристик неоднородных сегнетоэлектриков с градиентом состава.

**Материал и методы.** В качестве объекта исследования выбран титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) – сегнетоэлектрик с ярко выраженными нелинейными свойствами и типичной петлёй гистерезиса. Для численного моделирования использовано модифицированное уравнение Ландау – Халатникова, адаптированное для описания материала с пространственно-изменяющимся составом.

**Результаты и их обсуждение.** Моделирование проводилось для образца, соответствующего титанату бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) с линейным градиентом состава твёрдого раствора  $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$  от  $x = 0$  до  $x = 0.3$ .

Значение коэффициента Ландау  $\alpha = -1 \times 10^7 \text{ Дж} \cdot \text{м} / \text{Кл}^2$  обусловлено необходимостью устойчивости сегнетоэлектрической фазы ниже температуры Кюри (около 393 К), что типично для  $\text{BaTiO}_3$  у фазового перехода.

Кубический коэффициент  $\beta = 2 \times 10^8 \text{ Дж} \cdot \text{м}^5 / \text{Кл}^4$  выбран для обеспечения нелинейности свободной энергии и стабильности поляризации, что согласуется с наблюдаемыми гистерезисными петлями.

Градиентный коэффициент  $\gamma_{grad} = 1 \times 10^{-7} \text{ Дж} \cdot \text{м}^3 / \text{Кл}^2$  отражает энергию неоднородности поляризации в тонких пленках толщиной около 1 мкм.

Внутреннее поле  $\Delta E_c = 2 \times 10^6 \text{ В/м}$  учитывает смещение петли гистерезиса из-за градиента стронция, подтвержденное экспериментами с  $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ .

Кинетический коэффициент  $\eta = 0.8$  подобран для численной устойчивости.

Профиль состава ( $x_0 = 0.0$ ,  $x_l = 0.3$ ), толщина ( $1 \times 10^{-6} \text{ м}$ ) и число слоев ( $n_{layers} = 50$ ) соответствуют реальным градиентным структурам.

Шаг по времени ( $dt = 1 \times 10^{-10} \text{ с}$ ) и итерации ( $n_t = 300$ ) обеспечивают точность расчетов.

Максимальное поле ( $E_{max} = 1 \times 10^7 \text{ В/м}$ ) и поляризация ( $P_{max} = 0.3 \text{ Кл/м}^2$ ) взяты из условий экспериментов и известных свойств  $\text{BaTiO}_3$ .

На рисунке 1 представлена петля диэлектрического гистерезиса, смоделированная с использованием параметров по умолчанию.

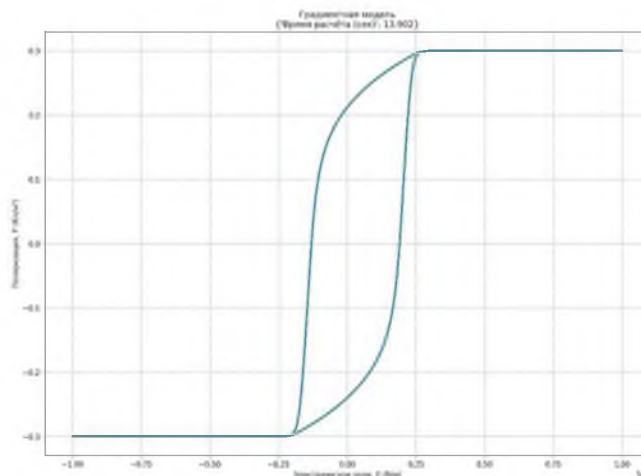


Рисунок 1 – Петля гистерезиса для неоднородного образца  $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ , смоделированная с использованием градиентной модели

Главная особенность – симметрия петли относительно нуля, что значит отсутствие макроскопического сдвига по осям поля ( $E$ ) и поляризации ( $P$ ). Этот результат совпадает с экспериментами для толстых пленок, где влияние асимметричных токов утечки и поверхностных зарядов (вызывающих сдвиг в тонких пленках) сильно мало. Наблюдаемая «затянутая» и слегка наклоненная форма петли возникает из-за усреднения поляризационного отклика слоев с разными свойствами – это размывает процесс переключения в широком диапазоне полей. Эффективные значения коэрцитивного поля  $E_c \approx 1.5 \times 10^6$  В/м и остаточной поляризации  $P_r \approx 0.25$  Кл/м<sup>2</sup> являются усредненными характеристиками для всей гетерогенной структуры. Модель правильно воссоздает ключевые особенности поляризации градиентных сегнетоэлектриков: наличие градиента в толстых образцах сглаживает переключение без обязательного появления униполярности.

Чтобы показать гибкость и физическую достоверность модели, сделаем два дополнительных расчёта, изменив параметры, которые отвечают за силу градиента и динамику переключения. На рисунке 2 (а) показан результат при увеличении параметра  $\Delta E_c$  с  $2 \times 10^6$  В/м до  $5 \times 10^6$  В/м, остальные параметры оставим по умолчанию. А на рисунке 2 (б) результат при уменьшении коэффициента вязкости  $\eta$  с 0.8 до 0.2, остальные параметры также по умолчанию.

При увеличении  $\Delta E_c$  с  $2 \times 10^6$  до  $5 \times 10^6$  В/м петля гистерезиса смещается вправо на  $3 \times 10^6$  В/м, что указывает на рост внутреннего поля. Коэрцитивное поле увеличивается, усложняя переключение поляризации в положительном направлении. Форма петли сохраняется, но становится асимметричной относительно  $E = 0$ . Это поведение полностью соответствует физике градиентных сегнетоэлектриков и подтверждает точность модели [3; 4].

При снижении  $\eta$  с 0.8 до 0.2 петля гистерезиса сужается, а коэрцитивное поле уменьшается на 20-30% (примерно с  $2.5 \times 10^6$  до  $1.8 \times 10^6$  В/м). Остаточная поляризация падает на 15-25% (связано с меньшей диссипацией энергии). Форма петли становится более симметричной и узкой.

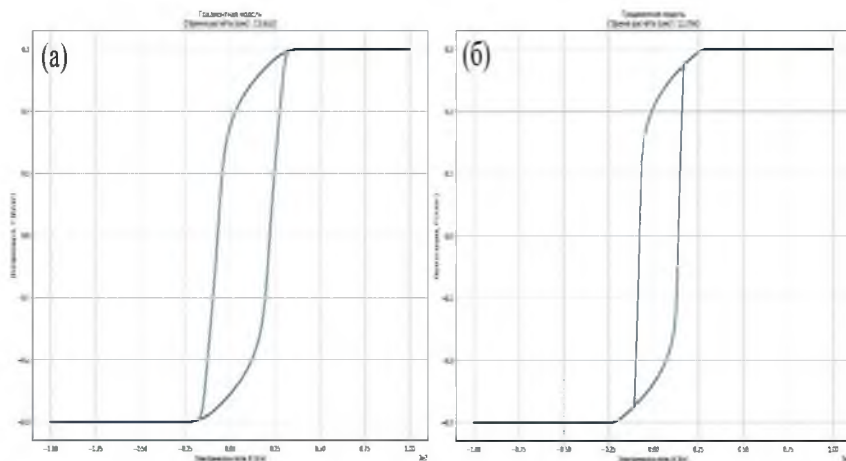


Рисунок 2 – Графики петли гистерезиса при  $\Delta E_c = 5 \times 10^6$  В/м (а) и при  $\eta = 0.2$  (б)

**Заключение.** Разработанная численная модель на основе модифицированного уравнения Ландау – Халатникова доказала свою эффективность для описания динамики реперполяризации неоднородных сегнетоэлектриков типа  $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ . Моделирование подтвердило, что в массивных градиентных структурах, в отличие от тонкопленочных, формируется симметричная, но «затянутая» петля гистерезиса, что обусловлено усреднением отклика слоев с различными свойствами. В ходе параметрического анализа установлено, что увеличение внутреннего поля приводит к сдвигу петли

и возникновению асимметрии, тогда как уменьшение коэффициента вязкости способствует сужению петли и снижению коэрцитивного поля. Полученные результаты позволяют использовать данную модель для прогнозирования функциональных характеристик градиентных материалов.

1. Масловская, А. Г. Применение вариационных принципов для компьютерного моделирования динамики доменной границы сегнетоэлектрика в поле градиента температуры / А. Г. Масловская // Информатика, телекоммуникации и управление. 2013. № 1(164). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-variatsionnyh-printspov-dlya-kompyuternogo-modelirovaniya-dinamiki-domennoy-granitsy-segnetoelektrika-v-pole-gradienta> (дата обращения: 10.12.2025).

2. Фазовые переходы в сегнетоэлектриках с распределенной поляризацией, вызванной закономерным изменением состава: Договор с БРФФИ № Ф08Р-110 от 1 апр. 2008 г. : отчет о НИР (заключ.) / науч. рук. В. Н. Шут ; [исполн.: В. Н. Шут, И. Ф. Кашевич, С. Е. Мозжаров, Ю. А. Шиенок]; М-во образования Республики Беларусь, УО "ВГУ им. П. М. Машерова". – Витебск, 2010. – 46 л. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/24873> – (дата обращения: 10.12.2025).

3. Мороз, Л. И., Масловская А. Г. Математические модели поляризационных характеристик сегнетоэлектриков в рамках теории Ландау - Гинзбурга - Девошшира // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. 2021. № 95. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskie-modeli-polyarizatsionnyh-harakteristik-segnetoelektrikov-v-ramkah-teorii-landau-ginzburga-devonshira> (дата обращения: 10.12.2025).

4. Shut, V. N. Ferroelectrics with composition gradient: On the nature of hysteresis loop shift / V. N. Shut // Physics of the Solid State. - 2013. - T. 55, № 7. - С. 1438-1441. - DOI: 10.1134/S1063783413070292.

## ВЫЯВЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ И НЕЭКСТРЕМАЛЬНЫХ АНОМАЛИЙ НА ИЗОБРАЖЕНИИ, ПОЛУЧЕННОМ ПРИБОРОМ

*О.В. Юхновская, М.А. Гундина, К.В. Пантелеев  
Минск, Белорусский национальный технический университет*

В работе разрабатывается математический аппарат для автоматизированного выявления аномальных значений (экстремальных и неэкстремальных) в данных, получаемых от технического прибора.

Сложность современных научных исследований, связанных с обработкой большого объема данных, приводит к резкому увеличению измерительной информации, ручная обработка которой без специализированных систем становится практически невозможной [1, 2]. При этом вопрос построения эффективного математического аппарата для надежного обнаружения этих аномалий, возникающих на этапах измерения, обработки или передачи данных, остается открытым [3]. Аномальные значения могут быть экстремальными и не экстремальными. Неэкстремальные значения умеренно далеки от остальных данных, экстремальные имеют большее расстояние от общего массива данных [4]. Таким образом, не экстремальные аномальные значения соответствуют событиям с вероятностью порядка  $\sim 10^{-3}$ , а экстремальные – порядка  $\sim 10^{-5}$  и меньше.

**Материал и методы.** В результате картирования поверхностного электростатического потенциала наблюдается существенное ухудшение пространственного разрешения в краевых зонах. Это проявляется в снижении контрастности цветового кодирования на периферии, отклонении формы карты потенциалов от геометрии образца, повышенная погрешность измерений потенциала по всей поверхности с максимальными отклонениями в приграничных зонах. Таким образом, областью интереса являлась непосредственно область на изображении, соответствующая области поверхности образца, представляющая собой круг диаметром 50 миллиметров.

Для выявления аномальных значений в наборе данных на основе подхода мультинормального (многомерного нормального) распределения в Wolfram Mathematica можно использовать следующий подход.

Сначала задаем функцию для нахождения локальных аномалий по третьей координате точек.

```
findLocalAnomalies[data_, radius_, thresholdMultiplier_] :=  
Module[{anomalies = {}, n = Length[data], zDeviations},
```