©ВГТУ

О НАХОЖДЕНИИ ЧАСТОТЫ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ С ВЫРЕЗОМ

И. К. ШКУРКО, Е. С. КАПНИК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ – Т. В. НИКОНОВА, КАНДИДАТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ

В работе рассматриваются свободные колебания мембраны с вырезом. Из рассмотрения нулевого и первого приближений находим асимптотические формулы для частот колебаний и соответствующих форм свободных колебаний. ω_{01} находим как корни соответствующего алгебраического уравнения. Следующая поправка ω_{11} определяется из условия разрешимости уравнения в первом приближении.

Ключевые слова: круглая мембрана; свободные колебания; собственные частоты.

Рассмотрим малые колебания круглой мембраны с вырезом, где $r=R_1$ и $r=R_2$ – линии, определяющие края мембраны.

В безразмерном виде в полярной системе координат (r, φ) уравнение колебаний запишется следующим образом [1]:

$$\Delta u - a^2(\varepsilon r, \varepsilon\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0, \qquad (1)$$

где u – прогиб, a медленно зависит от r и φ, t – время.

В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$u(R_1)=0,\ u(R_2)=0. \qquad (2)$$

Будем искать $u(r, \varphi, t)$ в виде:

$$u(r, \varphi, t)=U(r, \varphi)\cos(\omega t). \qquad (3)$$

Пусть

$$a(\varepsilon r, \varepsilon\varphi)=a_0+\varepsilon a_1(r, \varphi)+\varepsilon^2 a_2(r, \varphi)+\ldots,$$

где a_i – непрерывные функции.

Разложим функции $U(r, \varphi)$ и ω в ряды по степеням ε [2]:

$$U(r, \varphi)=U_0+\varepsilon U_1(r, \varphi)+\varepsilon^2 U_2(r, \varphi)+\ldots,\ \omega(\varepsilon r)= \omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \qquad (4)$$

Подставив разложения (4), (3) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при ε^0, ε^1, ε^2, получим последовательность уравнений с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрев условия разрешимости неоднородной задачи в первом и втором приближении, находим формулы для вычисления ω_1 и ω_2.

С учетом разложения (4) для частоты ω получим:

$$\omega = \Omega_{nm} - \varepsilon\Omega_{nm}\frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r a_1(r,\varphi)(AJ_n(a_0\omega_0 r)+BY_n(a_0\omega_0 r))^2\sin^2(n\varphi)drd\varphi}{a_0\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r(AJ_n(a_0\omega_0 r)+BY_n(a_0\omega_0 r))^2\sin^2(n\varphi)drd\varphi}, \qquad (5)$$

где $J_n(a_0\omega_0 r)$ и $Y_n(a_0\omega_0 r)$ – функции Бесселя порядка n первого и второго рода соответственно.

Таким образом, получены асимптотические формулы для нахождения частоты малых колебаний круглой мембраны с вырезом. Полученные результаты можно использовать при изучении колебаний барабанной перепонки в математическом моделировании биомеханической системы среднего уха.

Библиографические ссылки

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1982.
2. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984.