

МЕТОД РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КУЛИРНОГО ТРИКОТАЖА ДЛЯ ЭКСПЛАНТАТОВ

Черноус Д.А., Шилько С.В., Чарковский А.В.

*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси
246050 Республика Беларусь, Гомель, ул. Кирова 32-а, e-mail: depa10@tut.by*

Разработана методика расчета деформационно-прочностных характеристик кулирного трикотажа, в которой введено допущение о незначительной изгибной жесткости и уменьшении эффективного диаметра нитей после достижения максимально плотной упаковки моноволокон. Сделанные допущения позволили выразить в аналитической форме зависимость удельных нагрузок, действующих в плоскости трикотажа, от главных кратностей удлинения. Получено соотношение для критических кратностей удлинения, соответствующих началу разрушения трикотажа. Проведено сопоставление результатов использования предложенной методики с уточненными расчетными зависимостями и экспериментальными данными о прочности кулирного трикотажа при испытаниях методом «продавливания шариком».

Введение

В настоящее время отмечается существенное расширение области практического использования трикотажных материалов. В частности, разработаны трикотажные эксплантаты для кардиохирургии, пластики лица и других медицинских приложений [1,2]. Использование трикотажа в качестве композита биомедицинского назначения требует разработки новых и совершенствования известных методик прогнозирования механических характеристик и расчета напряженно-деформированного состояния трикотажных изделий произвольной конфигурации при сложных режимах нагружения.

Сложность внутренней структуры и существенно нелинейный характер деформирования трикотажа затрудняет расчет механических параметров трикотажных изделий на основе большинства традиционных методов механики композитов [3]. Адекватное описание механических свойств трикотажа возможно только при использовании мезомеханического подхода [4]. Данный подход подразумевает: 1) выделение структурного элемента (ячейки периодичности); 2) подробный анализ процесса деформирования элемента; 3) переход от элемента к представительному объему материала.

Мезомеханический подход в настоящее время широко используется для теоретического описания трикотажа с различной структурой плетения [5-8]. Выделяемый при описании трикотажных и тканых материалов структурный элемент, как правило, содержит два контактирующих перекрещивающихся отрезка нити. Так, в монографии [7] подробно описана методика расчета деформационных характеристик кулирного трикотажа. Модификации этой методики, предложенные в работе [8], позволяют использовать для характеристики механических свойств нитей, образующих трикотаж, только экспериментальную диаграмму растяжения. Это сокращает число экспериментальных зависимостей, получение которых необходимо для мезомеханического описания процесса деформирования трикотажа. Кроме того, в работе [8] мезомеханический подход был использован для получения расчетных оценок прочностных параметров кулирного трикотажа.

Мезомеханический анализ трикотажа при своей высокой адекватности и точности достаточно сложен, что затрудняет его использование в практических

расчетах. Так, изложенная работе [8] методика подразумевает использование интегральной зависимости, не выражаемой в аналитических функциях, требует составления и решения нескольких систем существенно нелинейных уравнений и включает аппроксимацию расчетных зависимостей.

Целью настоящей работы является получение аналитических выражений и создание инженерной методики расчета деформационно-прочностных характеристик кулирного трикотажа.

Описание расчетной методики

На рис. 1 представлен фрагмент структуры кулирного трикотажа. Там же показан структурный элемент, выделяемый при мезомеханическом описании исследуемого материала. Расчетная методика, изложенная в работах [7,8], позволяет определить зависимость удельных нагрузок F_{1y} и F_{2y} , действующих в трикотаже, от главных кратностей удлинения λ_1 и λ_2 . При этом ось 1 соответствует направлению ряда петель, а ось 2 — направлению колонки петель. Нагрузка F_{iy} определяется как сила, действующая вдоль i -ой оси на единицу длины трикотажа ($i = 1,2$). Исходными параметрами при реализации расчетной методики являются: число петель на 10 см длины в направлении столбиков петель n_k ; число петель на 10 см в направлении ряда петель n_p ; поверхностная плотность трикотажа ρ_s (измеряется в г/м^2); линейная плотность нитей ρ_l в текс (1 текс = 10^{-6} кг/м); коэффициент трения скольжения f между контактирующими нитями; угол крутки нитей θ ; количество N , диаметр d_m и коэффициент укладки ϕ моноволокон в нити; модуль Юнга E и предел прочности $\sigma_{пр}$ на растяжение материала моноволокон.

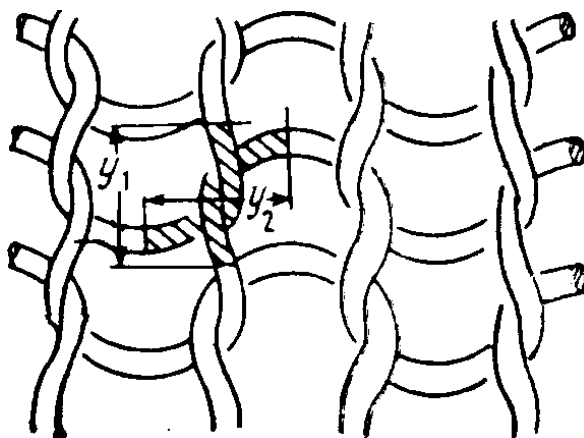


Рис. 1. Представительный фрагмент кулирного трикотажа. Штриховкой выделен структурный элемент

В рамках настоящей работы будем рассматривать трикотаж, образованный нитями при отсутствии крутки $\theta = 0$. В этом случае связь между относительным удлинением нити ε_f и действующей на нить продольной силой F_f можно представить в виде:

$$F_f = EN\pi \frac{d_m^2}{4} \varepsilon_f. \quad (1)$$

Данное соотношение справедливо для $\varepsilon_f < \frac{\sigma_{пр}}{E}$.

Размеры структурного элемента в недеформированном состоянии y_{01} , y_{02} , общая длина L нитей в элементе и начальный эффективный диаметр D_0 нити определяются следующим образом [8]

$$y_{01} = \frac{1}{10n_p}, \quad y_{02} = \frac{1}{20n_k}, \quad L = \frac{5\rho_s}{n_p n_k \rho_l}, \quad D_0 = d_m \sqrt{\frac{N}{\phi}}. \quad (2)$$

При анализе процесса напряженно-деформированного состояния структурного элемента в работах [7,8] процесс деформирования подразделяется на два этапа: этап изгиба и этап растяжения. На этапе изгиба (рис. 2а) происходит выпрямление первоначально криволинейных участков нитей (участок DE на рис. 2а). При описании данного этапа в работе [8] решалась задача сильного изгиба нити, имеющей форму дуги окружности, под действием сил, направленных по хорде этой окружности. Этап растяжения (рис. 2б) сопровождается удлинением участков нитей.

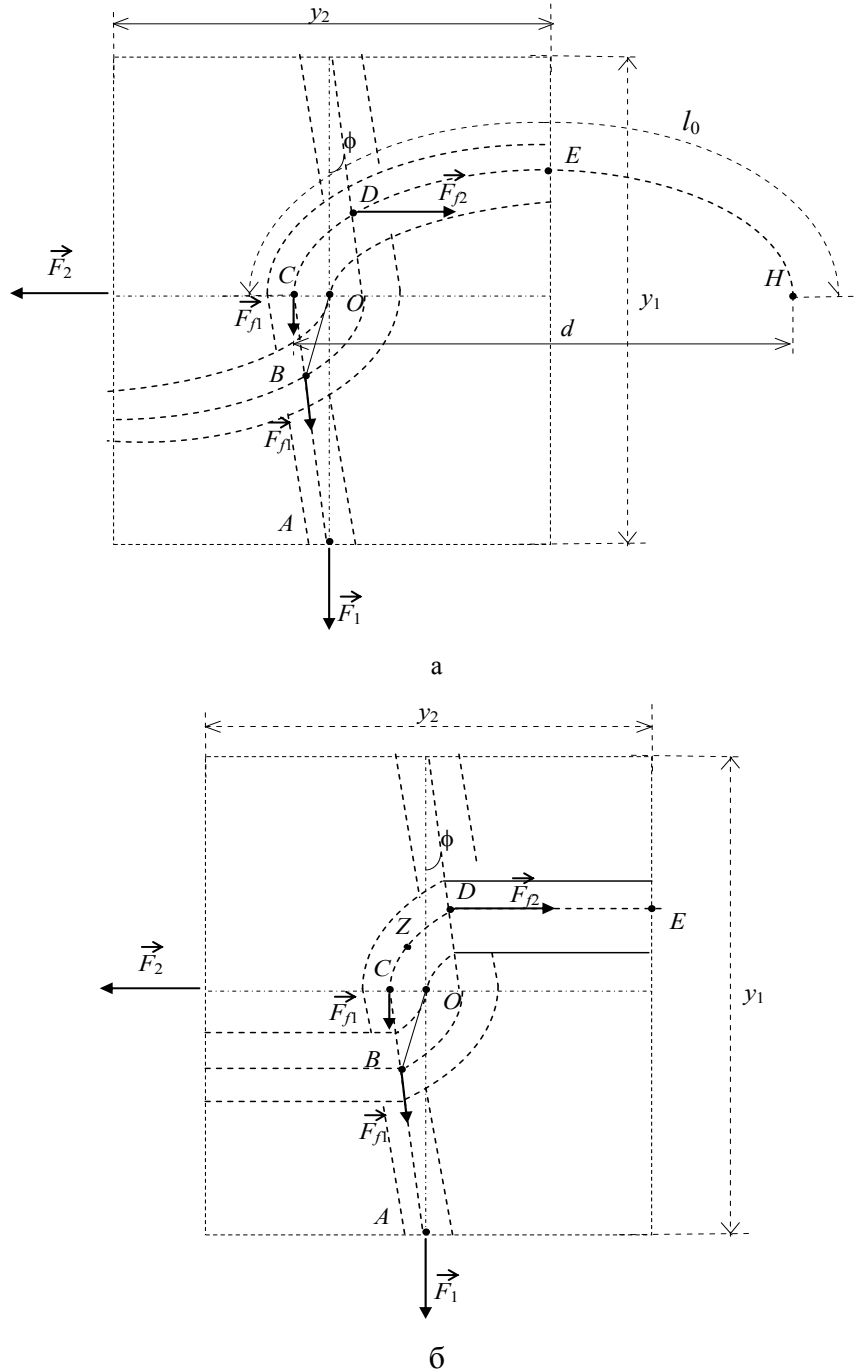


Рис. 2. Структурный элемент для описания этапов изгиба (а) и растяжения (б) кулирного трикотажа

Относительное удлинение ε_{f1} участка AZ и удлинение ε_{f2} участка ZE определяются макроскопическими кратностями удлинения структурного элемента λ_1 и λ_2 . Точка Z на рис. 2б делит участок CD контакта отрезков нитей пополам. Связь величин ε_{f1} и ε_{f2} с кратностями λ_1 и λ_2 выражается уравнением [7]

$$L = \frac{1}{\varepsilon_{f1} + 1} \left[\sqrt{\left(\lambda_1 y_{01} - \frac{\pi D}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi D}{2\sqrt{2}} \right)^2} + \frac{\pi D}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{\varepsilon_{f2} + 1} \left[\lambda_2 y_{02} + \frac{\pi D}{2\sqrt{2}} \right]. \quad (3)$$

Здесь D — текущий эффективный диаметр нити. Контактное взаимодействие между скрещенными нитями приводит к их поперечному деформированию. Поэтому диаметр D является функцией кратностей λ_1 и λ_2 .

Для этапов изгиба и растяжения условие равновесия участка CD контакта нитей позволяет установить взаимосвязь между продольными силами F_{f1} и F_{f2} , действующими в выделенных участках AZ и ZE соответственно

$$F_{f1} = F_{f2} \exp\left(\pm f \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Здесь и далее верхний знак при коэффициенте трения f соответствует режиму деформирования, при котором $\lambda_1 > \lambda_2$.

Расчет процесса деформирования структурного элемента (рис. 2) подробно описан в работах [7,8]. Для упрощения данной методики при отсутствии крутки нитей ($\theta = 0$) примем два допущения.

1) Для подавляющего большинства трикотажных материалов общая длина L нитей в структурном элементе, вычисленная в соответствии с равенствами (2), в 10 и более раз превышает эффективный диаметр нитей D_0 . Данное обстоятельство позволяет пренебречь жесткостью нити на изгиб по сравнению с ее жесткостью на растяжение. При этом деформирование трикотажа на этапе изгиба не сопровождается возникновением сил сопротивления. Таким образом, на этапе изгиба силы F_1 и F_2 , действующие на структурный элемент, принимаются равными нулю. Этап изгиба завершается при полном выпрямлении участка DE . Кратности λ_{1k} и λ_{2k} , соответствующие завершению этапа изгиба, удовлетворяют условию [7]

$$L = \sqrt{\left(\lambda_{1k} y_{01} - \frac{\pi D_c}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi D_c}{2\sqrt{2}} \right)^2} + \lambda_{2k} y_{02} + \frac{3\pi D_c}{2\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Здесь D_c — эффективный диаметр нитей, соответствующий максимально плотной упаковке моноволокон $D_c = d_m \sqrt{\frac{N}{0,92}}$. Следовательно, принятое допущение о нулевой жесткости нитей на изгиб позволяет положить, что для кратностей удлинения $\lambda_i < \lambda_{ik}$ ($i = 1,2$) силы F_1 и F_2 равны нулю

$$F_1 = F_2 = 0, \quad (\lambda_i < \lambda_{ik}) \quad (6)$$

2) В работе [9] показано, что изменение эффективного диаметра нити при контактном взаимодействии происходит, главным образом, вследствие раскручи-

вания, относительного смещения и удлинения моноволокон. Для рассматриваемых в рамках настоящей работы нитей ($\theta = 0$) все моноволокна в исходном недеформированном состоянии прямолинейны. В этом случае относительное смещение моноволокон прекращается при достижении максимально плотной упаковки $\phi_{\max} = 0,92$. В связи с выше сказанным, при описании деформирования исследуемого трикотажа примем, что эффективный диаметр нити на этапе изгиба достигает значения D_c . На этапе растяжения трикотажа диаметр нитей будем считать независимым от кратностей удлинения $D = D_c = const$.

Заменяя в уравнении (3) текущий диаметр D диаметром D_c и воспользовавшись равенствами (1), (4), можно определить относительное удлинение ε_{f1} участка AZ

$$\varepsilon_{f1} = \frac{1}{2}Z + \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 + \left[\sqrt{\left(\lambda_1 \frac{y_{01}}{L} - \frac{\pi D_c}{2L\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi D_c}{2L\sqrt{2}} \right)^2} + \lambda_2 \frac{y_{02}}{L} + \frac{3\pi D_c}{2L\sqrt{2}} - 1 \right] \exp\left(\pm f \frac{\pi}{2} \right)} \quad (7)$$

Здесь для краткости записи введена функция

$$Z(\lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{\left(\lambda_1 \frac{y_{01}}{L} - \frac{\pi D_c}{2L\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi D_c}{2L\sqrt{2}} \right)^2} + \frac{\pi D_c}{L\sqrt{2}} - 1 + \left(\lambda_2 \frac{y_{02}}{L} + \frac{\pi D_c}{2L\sqrt{2}} - 1 \right) \exp\left(\pm f \frac{\pi}{2} \right) \quad (8)$$

Зная величину ε_{f1} , выразим силы F_1, F_2 , действующие на структурный элемент на этапе растяжения ($\lambda_i > \lambda_{ik}$), как функции макроскопических кратностей λ_1, λ_2

$$F_1(\lambda_1, \lambda_2) = F_{f1} \cos \phi = EN\pi \frac{d_m^2}{4} \varepsilon_{f1} \cos \phi, \\ F_2(\lambda_1, \lambda_2) = F_{f2} = EN\pi \frac{d_m^2}{4} \varepsilon_{f1} \exp\left(\mp f \frac{\pi}{2} \right). \quad (9)$$

Здесь ϕ — угол между осью 1 и прямолинейным участком AC . Угол ϕ зависит от кратности удлинения λ_1

$$\phi = \arctg \left(\pi \frac{D_c}{2\sqrt{2}\lambda_1 y_{01} - \pi D_c} \right). \quad (10)$$

Удельные нагрузки F_{1y} и F_{2y} , действующие в трикотаже, будем определять как отношения сил F_1 и F_2 к соответствующим размерам структурного элемента в недеформированном состоянии

$$F_{1y} = \frac{F_1}{y_{02}}, \quad F_{2y} = \frac{F_2}{y_{01}}. \quad (11)$$

Прочность рассматриваемого кулирного трикотажа будем характеризовать значениями критических кратностей удлинения $\lambda_{1кр}$ и $\lambda_{2кр}$, при которых начинает-

ся разрыв нитей, образующих трикотаж. Используя уравнения (8) и (9), определим условие, которому должны удовлетворять критические кратности

$$\varepsilon_{f1}(\lambda_{1кр}, \lambda_{2кр}) = \frac{\sigma_{пр}}{E}. \quad (12)$$

Таким образом, соотношения (5)-(12) составляют математическую модель, позволяющую прогнозировать механические параметры различных изделий из кулирного трикотажа. Основные отличия данной модели от ранее предложенной [8] заключаются в следующем: 1) в упрощенной модели пренебрегают изгибной жесткостью нити на этапе выпрямления криволинейных участков; 2) не учитывается изменение эффективного диаметра нитей после достижения максимально плотной упаковки моноволокон; 3) аналитические соотношения в упрощенной модели справедливы только при отсутствии крутки нитей $\theta = 0$.

Результаты расчета и их анализ

Сопоставим результаты разработанной упрощенной методики (5)-(12) с расчетными оценками, полученными на основе более точной математической модели [7,8]. При этом в качестве объекта исследования выберем те же трикотажные материалы, которые были рассмотрены в работе [8]. Основные структурные параметры данных материалов приведены в таблице 1. Остальные исходные параметры одинаковы для трех материалов: $d_m = 50$ мкм; $\theta = 0$; $f = 0,285$; $E = 315 \pm 33$ МПа; $\sigma_{кр} = 66 \pm 7,2$ МПа.

Разработанная математическая модель (5)-(12), как и методика работ [7,8], не позволяет описать деформирование трикотажа в одноосном напряженном состоянии, которое реализуется, например, при испытаниях образцов на растяжение. В этом состоянии не выполняется соотношение (4) между силами F_i , а уравнение равновесия участка CD имеет более сложный вид.

Таблица 1

Параметры исследуемых образцов трикотажа.

№ образца	Нить		Трикотаж		
	N	ρ_l , текс	n_k	n_p	ρ_s , г/м ²
1	78	38	95	75	161,9
2	48	25	98	72	108,5
3	30	12	125	95	80,4

На ряду с испытаниями на растяжение для экспериментального изучения механических свойств трикотажа используют метод «продавливания шариком» [10], согласно которому на защемленный по периметру образец трикотажа в виде диска радиуса 12,5 мм действуют стальным индентором радиусом 12 мм. Данный режим нагружения обеспечивает в каждой точке образца заданные кратности удлинения $\lambda_i \geq 1$, которые можно выразить через радиальную деформацию образца

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_{\rho\rho} \cos^2 \beta, \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_{\rho\rho} \sin^2 \beta. \quad (13)$$

Здесь β — одна из полярных координат (ρ, β) , выбираемых на образце трикотажа. Радиальная деформация определяется, как относительное изменение радиуса и связана с относительным увеличением площади образца ε_s при продавливании:

$$\varepsilon_{pp} = \sqrt{1 + \varepsilon_s} - 1. \quad (14)$$

Величина ε_s зависит от стрелы прогиба образца u . Данная зависимость представлена в [10] в виде таблицы. Аппроксимируя приведенные в ГОСТ табличные значения, для относительного увеличения площади образца можно записать

$$\varepsilon_s = 10^3 u (-0,01 + 7,75u - 151,8u^2 + 829,6u^3). \quad (15)$$

Соотношения (13)-(15) позволяют при данной стреле прогиба (внедрении индентора) u определить кратности удлинения λ_i в каждой точке образца.

Затем, используя разработанную математическую модель (5)-(11), при заданных кратностях λ_i вычисляем удельные нагрузки F_{iy} . Тем самым устанавливается связь прогиба образца u с нагрузками F_{iy} . Зная F_{iy} , можно определить силу сопротивления P , действующую на индентор со стороны образца при продавливании. Для вычисления P необходимо проинтегрировать удельные нагрузки по контуру образца

$$P = r \int_0^{2\pi} \frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2}} (F_{1y} \cos^2 \beta + F_{2y} \sin^2 \beta) d\beta. \quad (16)$$

Используя равенство (16), определим зависимость силы сопротивления P от стрелы прогиба u . На рис. 3 представлены расчетные зависимости $P(u)$, полученные на основе методики работ [7,8] и упрощенной математической модели (5)-(11). При малых прогибах образца ($u < 13$ мм) упрощенная модель дает несколько заниженные оценки силы сопротивления, что обусловлено пренебрежением жесткостью нитей на изгиб. Однако данная погрешность весьма незначительна. Для представленного на рис. 3 примера расхождение расчетных оценок силы P при прогибах $u < 13$ мм не превышает 2 Н. При прогибах $u > 13$ мм оценки силы сопротивления, полученные на основе упрощенной модели, оказываются значительно выше результатов использования более точной методики. Данное обстоятельство обусловлено тем, что в рамках упрощенной модели на этапе растяжения эффективный диаметр нитей считается неизменным.

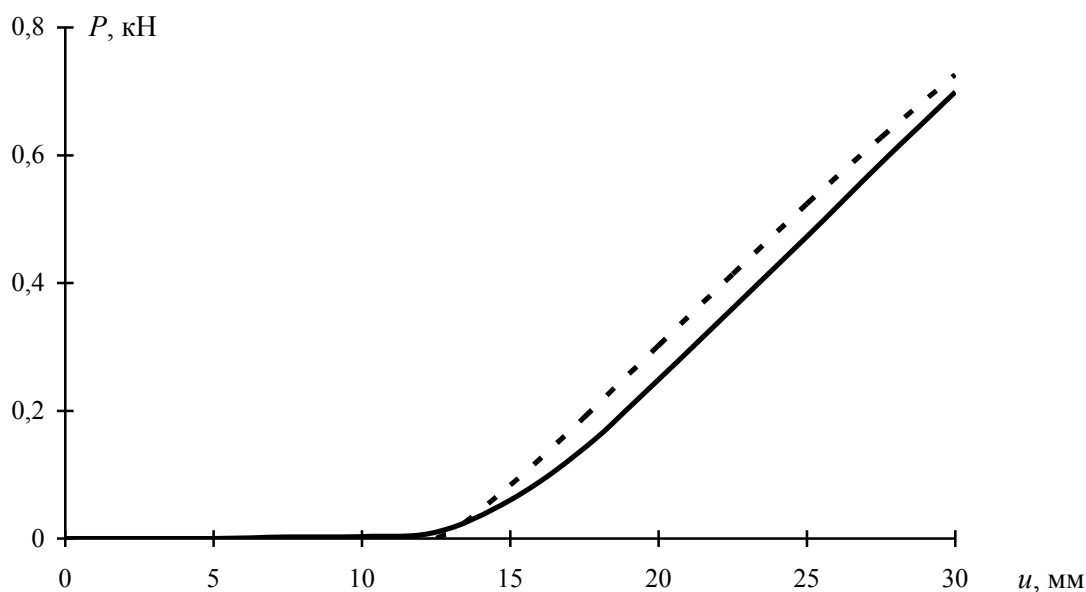


Рис. 3. Зависимость силы сопротивления от стрелы прогиба при испытаниях образцов кулирного трикотажа № 2 (таблица 1) методом «продавливания шариком». Сплошная кривая — ре-

зультат использования точной математической модели работы [8]; пунктирная — упрощенной модели (5)-(11).

Для количественной оценки расхождения между результатами использования двух математических моделей (упрощенной и более подробной) введем величину

$$\Delta_y = \frac{1}{u_r} \int_0^{u_r} |P_{\text{упр}} - P_{\text{точн}}| du.$$

Здесь u_r — прогиб, при котором начинается разрушение образца; $P_{\text{упр}}$, $P_{\text{точн}}$ — сила сопротивления, рассчитанная по упрощенной и точной математической модели соответственно. Величину Δ_y можно рассматривать как среднее отклонение между расчетными зависимостями.

Следует отметить, что при расчете силы сопротивления используется экспериментально определяемое значение модуля Юнга E материала моноволокон, образующих нити. Определенное в работе [8] значение модуля E имеет статистическую погрешность $\varepsilon_E = 10,5\%$. Будем считать, что остальные исходные параметры, используемые при расчете силы P , определены абсолютно точно. Тогда расчетное значение силы сопротивления будет иметь относительную погрешность $\varepsilon_P = \varepsilon_E$. Средняя абсолютная погрешность силы сопротивления, рассчитанной по методике работ [7,8], определим следующим образом

$$\Delta_P = \frac{\varepsilon_P}{u_r} \int_0^{u_r} P_{\text{точн}} du.$$

В таблице 2 приведены погрешности Δ_y и Δ_P для трех рассматриваемых образцов трикотажа. Для всех рассмотренных образцов среднее отклонение между расчетными зависимостями Δ_y не превышает погрешности расчета Δ_P , обусловленной погрешностью измерения исходных параметров. Данное наблюдение свидетельствует о правомерности использования допущений, сделанных при выводе соотношений (5)-(11), для прогнозирования жесткости различных изделий на основе кулирного трикотажа.

Реализация метода «продавливания шариком» на стандартном испытательном оборудовании позволяет измерить предельную стрелу прогиба u_r , соответствующую началу разрушения образца [8]. В работе [8] также приведены экспериментально определенные значения критической силы сопротивления P_r , соответствующей стреле прогиба u_r . Для получения расчетной оценки прочностных параметров u_r и P_r используем уравнение (12). В результате анализа выражений (7) и (8) установлено, что наиболее «опасным» с точки зрения критерия прочности (12) является режим нагружения, при котором $\lambda_2 = 1$. При данном режиме уравнение (12) позволяет вычислить критическую кратность удлинения λ_{1k} . Используя выражения (14)-(15), установим стрелу прогиба u_r , соответствующую этой кратности λ_{1k} . Используя выражение (16) с учетом (5)-(11), получим расчетное значение силы P_r при стреле прогиба u_r . В таблице 2 приведено сопоставление экспериментальных значений u_r и P_r с их расчетными оценками, полученными на основе разработанной упрощенной модели. Можно отметить, что расчетные значения лежат в пределах статистической погрешности измерения. Таким образом, подтверждается применимость упрощенной математической модели не только

для описания процесса деформирования, но и для расчета прочностных параметров кулирного трикотажа.

Таблица 2

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных.

№ образца	Δ_y , Н	Δ_p , Н	u_r , мм		P_r , Н	
			Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет
1	31,5	39,2	$24,3 \pm 3,2$	21,46	$600 \pm 5,61$	596,39
2	18,4	25,1	$24,25 \pm 2,95$	22,53	$438,75 \pm 24,14$	415,43
3	20,2	25,7	$31,75 \pm 7,31$	35,25	$236,25 \pm 32,25$	234,02

Заключение

В результате сопоставления расчетных зависимостей и экспериментальных данных установлено, что разработанная упрощенная математическая модель позволяет существенно упростить описание деформирования кулирного трикотажа без значительного снижения точности прогноза механических параметров исследуемого объекта.

Литература

- 1 Гензер, М. С. Трикотаж для хирургии / М.С. Гензер. – Москва: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 144 с.
- 2 Гензер, М. С. Лечебный трикотаж / М.С. Гензер. – Москва: Легкая индустрия, 1975. – 144 с.
- 3 Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах. Т. 1. Механика материалов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с.
- 4 Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В. Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – т.1,2.
- 5 Yanagawa Y., Kawabata S., Nakagawa K., Toyama K., Kawai N. Theoretical Study on the Biaxial Tensile Properties of Single Tricot Warp Knitted Fabric with Open Lap // J. of the Textile Mach. Soc. of Japan (Eng. ed.). – 1970. – Vol. 16, № 6. – P. 216-228.
- 6 Yanagawa Y., Kawabata S., Kawai H. Theoretical Study on the Biaxial Tensile Properties of Warp Knitted Fabric of Single Tricot Stitch // J. of the Textile Mach. Soc. of Japan (Eng. ed.). – 1970. – Vol. 16, № 3. – P. 88-99.
- 7 Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. – Москва: Мир, 1991. – 432 с.
- 8 Черноус Д.А., Шилько С.В., Чарковский А.В. Прогнозирование эффективных механических характеристик трикотажа // Физическая мезомеханика. – 2008. –Т. 11, № 4. – С. 107-114.
- 9 Черноус Д.А., Шилько С.В. Анализ вязкоупругого деформирования крученных нитей // Пластические массы. – 2007. – № 11. – С. 37-40.
- 10 ГОСТ 8847-85. Плотна трикотажные. Методы определения разрывных характеристик и растяжимости при нагрузках меньше разрывных.
- 11 Yanagawa Y., Kawabata S., Kawai H. Experimental study on the tensile properties of two bar warp-knit fabrics // J. of the Textile Mach. Soc. of Japan (Eng. ed.). – 1973. – Vol. 19, № 1. – P. 7-14.