МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТОВАРОВЕДЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения контрольных работ

для студентов заочного отделения

специальности 1-54 01 01-04 “Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)” (Т.17.05.00 “Сертификация изделий текстильной и легкой промышленности”)

Витебск 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ “ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

“РЕКОМЕНДОВАНО”
Зам. председателя редакционно-издательского совета
__________ В.В. Пятов
“____”___________ 2004г.

“УТВЕРЖДАЮ”
Первый проректор
_________ И.А. Москалев
“____”___________ 2004г.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТОВАРОВЕДЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения контрольных работ
для студентов заочного отделения
специальности 1-54 01 01-04 “Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)” (Т.17.05.00 “Сертификация изделий текстильной и легкой промышленности”)

Витебск 2004

УДК 658.6

“Экономико-математические методы в товароведении”: методические указания для выполнения контрольных работ для студентов заочного отделения специальности 1-54 01 01-04 “Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)”(Т.17.05.00 “Сертификация изделий текстильной и легкой промышленности”)

Витебск, Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2004

Составители: ст. преподаватель Матвеев К.С.,
ассистент Егорова Е.А.

В методических указаниях приведены основные темы курса, варианты заданий, рекомендуемая литература и правила выполнения контрольных работ. Одобрены кафедрой “Стандартизация” УО ВГТУ протокол № 11 от 2.04.2004г.

Рецензент: доц. Джежора А.А.
Редактор: ст. преп. Козловская Л.Г.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом ВГТУ “ 2 ” июля 2004 г., протокол № 3

Ответственный за выпуск: Комлева Н.В.

Учреждение образования "Витебский государственный технологический университет"

Подписано к печати 27.08.04 Формат 1/16 Уч.изд.л. 1,9
Печать ризографическая. Тираж 73 Заказ 309 Цена 465 р.

Отпечатано на ризографе УО "ВГТУ" Лицензия 02330/0133005
210035, Витебск, Московский пр-т, 72

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТОВАРОВЕДЕНИИ

Предметом изучения названной дисциплины являются количественные характеристики экономических процессов, протекающих в промышленном производстве, торговле, изучение их взаимосвязей на основе экономико-математических методов и моделей. В курсе рассматриваются конкретные задачи и их экономико-математические модели. Это модели линейного программирования, сетевого планирования и управления, балансовые, игровые, модели массового обслуживания.

Основным понятием курса является понятие математической модели. В общем случае слово «модель» – это отражение реального объекта. Такое отражение объекта может быть представлено схемой, эскизом, фотографией, моделью описательного характера в виде графиков, таблиц и так далее. Математическая модель – это система математических уравнений, неравенств, формул и различных математических выражений, описывающих реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними. Процесс построения математической модели называют математическим моделированием. Естественно, моделирование и построение математической модели торгово-экономического объекта позволяют свести анализ производственных процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕМЫ КУРСА

Тема 1 Математическое моделирование

Литература [1], [6], [18], [19], [20]

Основным методом исследования систем является метод моделирования. Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об изучаемом явлении. Математическая модель – это система математических выражений, описывающих характеристики объекта моделирования и взаимосвязи между ними.

Процесс экономико-математического моделирования можно представить в виде ряда этапов:

1) постановка экономической проблемы и ее качественный анализ;
2) построение математической модели;
3) математический анализ модели;
4) подготовка исходной информации;
5) численное решение;
6) анализ численных результатов и их применение.

Экономико-математические модели подразделяются на статические, балансовые и оптимизационные.

Классификация экономико-математических моделей может быть различной и условной. По функциональному признаку модели подразделены на модели планирования, модели бухгалтерского учета, модели экономического анализа, модели информационных процессов. По признаку размерности модели классифицируются на макромодели, локальные модели и микромодели.

Тема 2 Модели линейного программирования

Литература [1], [3], [4], [5], [8], [12], [13], [14], [17]

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции при условиях

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,k) \qquad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=k+1,m) \qquad (2.3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1,l;\ l\le n) \qquad (2.4)$$

где a_{ij}, b_i, c_j– заданные постоянные величины и $к \le m$

Функция (2.1) называется целевой функцией задачи, а условия (2.2)– (2.4) – ограничениями данной задачи.

Совокупность чисел $X= (x_1,x_2,\dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (2.2)– (2.4), называется допустимым решением (или планом).

План $X^*= (x^*_1,x^*_2,\dots, x^*_n)$, при котором целевая функция задачи (2.1) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным.

Примерами задач линейного программирования являются:

1) задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).

Обозначим X_j $(j = 1, 2,\dots,n)$ – число единиц продукции P_j, запланированной к производству; b_i $(i = 1, 2,\dots,m)$ – запас ресурса S_i , a_{ij} –число единиц ресурса S_i , затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j (числа a_{ij} – коэффициенты прямых затрат, которые часто называют технологическими коэффициентами); c_j – прибыль от реализации единицы продукции P_j.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: найти такой план $X = (x_1,x_2,\dots, x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2.4)$$

и условию

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\dots,\ x_n \ge 0, \qquad (2.5)$$

при котором функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.6)$$

принимает максимальное значение.

2) задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях).

Обозначим через X_j ($j = 1, 2,\ldots,n$) – число единиц корма n-го вида; b_i ($i = 1, 2,\ldots,m$) – необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i ; a_{ij} – число единиц питательного вещества S_i в единице корма j-го вида; c_j – стоимость единицы корма j-го вида. Тогда экономико-математическая модель задачи примет вид: найти такой рацион $X= (x_1,x_2,\ldots, x_j,\ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \qquad (2.7)$$

и условию

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0, \qquad (2.9)$$

при котором функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.10)$$

принимает минимальное значение.

Для решения задач линейного программирования используется графический метод (когда число переменных равно двум) и симплекс-метод.

Тема 3 Транспортная модель

Литература [1], [2], [3], [4], [5], [8], [10], [14], [17]

Транспортная модель используется при разработке планов перевозок одного вида товаров из нескольких исходных пунктов в пункты назначения. Цель построения состоит в определении количества единиц перевозимого товара из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения таким образом, чтобы общие транспортные расходы были минимальными.

Пусть x_{ij} – количество продукции, перевозимой из исходного пункта i в пункт назначения j. Тогда задачу линейного программирования транспортного типа в общем виде можно записать следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \qquad (3.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,...,n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,...,m, j = 1,...,n \end{cases} \quad (3.2)$$

Модель называется закрытой транспортной моделью, если суммарный объем груза поставщиков равен суммарному спросу потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj \quad (3.3)$$

Если модель открытая, то ее можно преобразовать в закрытую путем введения фиктивных исходных пунктов или пунктов назначения. Задав при этом вновь получившимся перевозкам тарифы равные нулю.

Для составления исходного опорного плана перевозок можно пользоваться правилом «северо-западного угла» или «минимального элемента».

Для определения оптимального плана транспортной задачи используется метод потенциалов.

Задача о назначениях, как частный случай транспортной задачи

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить m заданий между m исполнителями. В силу разной квалификации исполнителей на выполнение каждого отдельного задания каждому исполнителю потребуется разное время или эффект от выполнения работы так же будет разным. Необходимо так распределить исполнителей по заданиям, чтобы минимизировать время исполнения или максимизировать эффективность.

Пусть x_{ij} – участие i-го исполнителя в выполнении j-го задания. Так как каждое задание должно быть выполнено и все исполнители задействованы, то x_{ij} должно удовлетворять следующим ограничениям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, i, j = 1,..., m$$

Пусть c_{ij} – время выполнения i-ым исполнителем j-го задания. Тогда общее время выполнения составит:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \;, \quad (3.5)$$

Тема 4 Модели сетевого планирования и управления

Литература [1], [2], [7], [12], [17], [19], [20]

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия *событие* и *работа*.

Работа - это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работу можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина, травление плат;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих, пролеживание детали в очереди к станку.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;
- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

Событие - это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы (i, j), состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (см. рисунок 4.1).

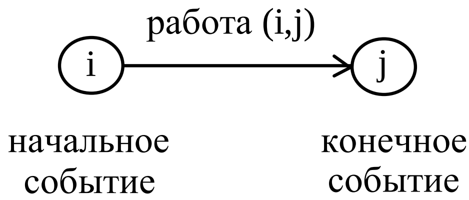


Рисунок 4.1. Кодирование работы

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют *исходным.* Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется *завершающим*.

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути. *Путь* – это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

Полный путь – это путь от исходного до завершающего события. *Критический путь* – максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.

К временным параметрам событий относятся:

- $T_p(i)$ – ранний срок наступления события i. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию i. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию;
- $T_п(i)$ – поздний срок наступления события i. Это такое время наступления события i, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием i;

- $\mathrm{R}(\mathrm{i})$ – резерв времени наступления события i. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события i без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (см. рисунок 4.2).

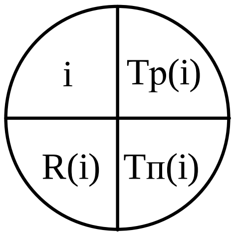


Рисунок 4.2. Отображение временных параметров событий в вершинах сетевого графика

Расчет ранних сроков свершения событий $\mathrm{T_р}(\mathrm{i})$ ведется от исходного к завершающему событию.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий.

1) $\mathrm{T_{рн}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_р}(\mathrm{i})$;

2) $\mathrm{T_{ро}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_р}(\mathrm{i}) + \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$ или $\mathrm{T_{ро}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_{рн}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) + \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$;

3) $\mathrm{T_{по}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_п}(\mathrm{j})$;

4) $\mathrm{T_{пн}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_п}(\mathrm{j}) - \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$ или $\mathrm{T_{пн}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_{по}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) - \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$;

5) $\mathrm{R_п}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_п}(\mathrm{j}) - \mathrm{T_р}(\mathrm{i}) - \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$;

6) $\mathrm{R_с}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \mathrm{T_р}(\mathrm{j}) - \mathrm{T_р}(\mathrm{i}) - \mathrm{t}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$.

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного, т.е. первого события, затем – выходящие из второго события, потом – из третьего и т.д.

Тема 5 Модели принятия решений в условиях неопределенности

Литература[1], [2], [3], [4], [7],[12], [13], [17]

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, определяющая рекомендации по рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т.е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).

Количественная оценка результатов игры называется *платежом*. Игра называется *парной*, если в ней участвует только две стороны (два лица). Парная игра называется *игрой с нулевой суммой*, если сумма платежей равна нулю, то есть, если проигрыш одного игрока равен выигрышу второго.

Однозначное описание выбора игрока в каждой из возможных ситуаций, когда он должен сделать личный ход, называется *стратегией игрока*. Стратегия игрока называется *оптимальной*, если при многократном повторении игры она обеспечивает максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

Пусть имеется два игрока, один из которых может выбрать i-тую стратегию из m своих возможных стратегий (i=1, …, m), а второй, не зная выбора первого, выбирает j-тую стратегию из n своих возможных стратегий (j=1, …, n). В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй проигрывает эту величину. Из чисел a_{ij} составим матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Строки матрицы А соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго. Эти стратегии называются *чистыми.*

Число $\alpha = \max_i (\min_j a_{ij})$ называется *нижней ценой игры* или *максимином*, а соответствующая ему стратегия (строка) – *максиминной.*

Число $\beta = \min_j (\max_i a_{ij})$ называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*, а соответствующая ему стратегия игрока (столбец) – *минимаксной*.

В матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней цены игры.

Игра, для которой α=β, называется *игрой с седловой точкой*. Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными. Если игра, заданная матрицей, не имеет седловой точки, то для нахождения ее решения используются смешанные стратегии.

Наиболее простым случаем решения игр смешанных стратегий будет платежная матрица с размерностью 2х2, mх2, nх2.

Для нахождения оптимальных значений для матрицы:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

необходимо решить систему следующих уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = g \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = g \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

где P_1 – вероятность, с которой игрок I будет применять стратегию A_1;

P_2 – вероятность, с которой игрок I будет применять стратегию A_2;

– цена игры.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока II

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = g \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = g \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

Основной особенностью природы как игрока является ее незаинтересованность в выигрыше.

Условимся, что лицо, принимающее решение, является игроком I, который в процессе игры выбирает строки платежной матрицы. Игрок II – природа. Чистые стратегии природы соответствуют ее возможным состояниям. Природа меняет состояния стихийно, совершенно не заботясь о результате игры. Для решения таких игр используют:

1. Принцип недостаточного основания Лапласа.

$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, который применяется тогда, когда ни одно состояние природы нельзя предпочесть другому.

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \text{, i=1,m.} \tag{5.3}$$

При этом необходимо выбрать ту из чистых стратегий, для которой L_i максимально.

2. Максиминный критерий Вальда – это критерий крайнего пессимизма. В соответствии с этим критерием в качестве оптимальной рекомендуется выбирать ту стратегию, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, то есть максиминную стратегию.

$$a = \max_i (\min_j a_{ij}) \tag{5.4}$$

3. Критерий Гурвица. Называют критерием обобщенного максимума или пессимизма-оптимизма. Он имеет вид

$$S = \max_i \left[l \min_j a_{ij} + (1 - l) \max_j a_{ij} \right], \tag{5.5}$$

где $\lambda \geq 0$, $\lambda \leq 1$.

Тема 6 Модели управления запасами

Литература [11], [18], [21]

Под управлением запасами понимают совокупность мероприятий по обеспечению их оптимального уровня на предприятии

Суммарные затраты системы управления запасами выражаются в виде функции их основных компонент:

Суммарные затраты системы управления запасами	=	Затраты на приобретение	+	Затраты на оформление заказа	+	Затраты на хранение заказа	+	Потери от дефицита

Затраты на приобретение становятся важным фактором, когда цена единицы продукции зависит от размера заказа, что обычно выражается в виде оптовых скидок в тех случаях, когда цена единицы продукции убывает с возрастанием размера заказа.

Затраты на оформление заказа представляют собой постоянные расходы, связанные с его размещением. При удовлетворении спроса в течение заданного периода времени путем размещения более мелких заказов (более часто) затраты возрастают по сравнению со случаем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов (и, следовательно реже).

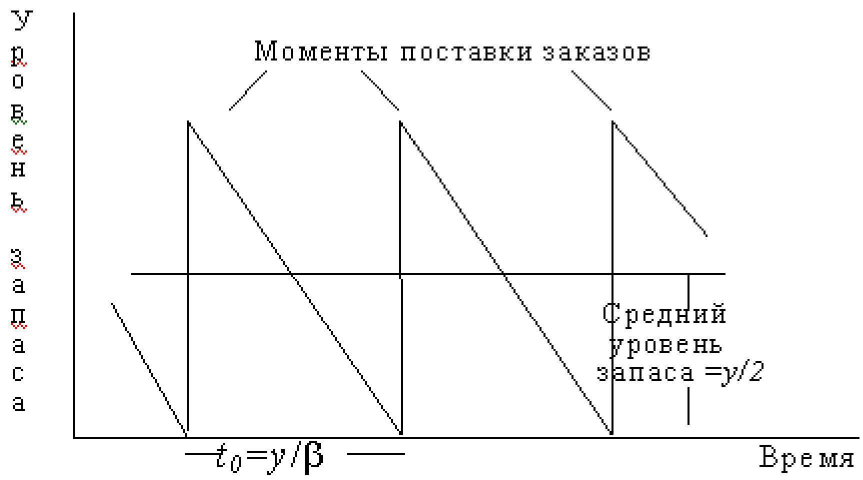
Затраты на хранение запаса, которые представляют собой расходы на содержание запаса на складе (затраты на переработку, амортизационные расходы, эксплуатационные расходы) обычно возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции.

Оптимальный уровень запаса соответствует минимуму суммарных затрат. Однако модель управления запасами не обязательно должна включать все четыре вида затрат, так как некоторые из них могут быть незначительными, а иногда учет всех видов затрат чрезмерно усложняет функцию суммарных затрат. На практике какую-либо компоненту затрат можно не учитывать при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита.

На рисунке показано изменение уровня запаса во времени.



Предполагается, что интенсивность спроса (в единицу времени) равна β. Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером *y* (предполагается, что запаздывание поставки является заданной константой). Уровень запаса достигает нуля спустя *y*/β единиц времени после получения заказа размером *y*. Чем меньше размер заказа *y*, тем чаще нужно размещать заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже.

Пусть *K* – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении, h – затраты на хранение единицы заказа в единицу времени. Следовательно, суммарные затраты в единицу времени можно представить в виде:

$$C(y) = \underbrace{\frac{K}{y/\beta}}_{\text{Затраты на оформление заказа в ед. времени}} + \underbrace{h\left(\frac{y}{2}\right)}_{\text{Затраты на хранение запасов в ед. времени}} \qquad (6.1)$$

Продолжительность цикла движения заказа составляет $t_0 = y/\beta$;

Средний уровень запаса равен *y/2*.

Оптимальное значение у получается в результате минимизации *C(y)* по *y*. Таким образом, в предположении, что *y* – непрерывная переменная, имеем:

$$\frac{dC(y)}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0 \qquad (1)$$

откуда оптимальное выражение заказа определяется выражением:

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \qquad (2)$$

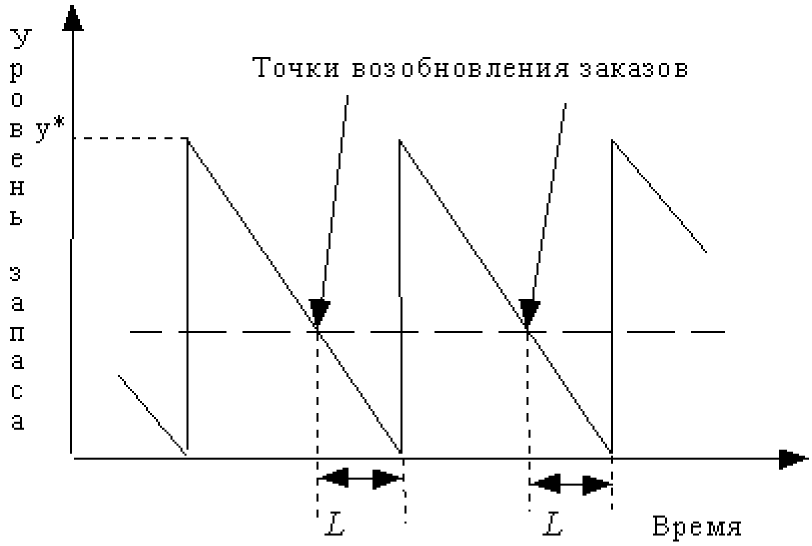
Выражение (6.3) *называют формулой экономичного размера заказа Уилсона.*

Оптимальная стратегия модели предусматривает заказ *y** единиц продукции через каждые $t_0 = y^*/b$ единиц времени.

Оптимальные затраты: $C(y^*) = \sqrt{2K\beta h}$

Для большинства реальных ситуаций существует (положительный) *срок выполнения* заказа (временное запаздывание) *L* от момента размещения заказа до его действительной поставки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять *точку возобновления заказа.*

Следующий рисунок показывает случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на *L* единиц времени ожидаемую поставку. В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив *точку возобновления заказа* через *уровень запаса*, соответствующий моменту возобновления.



На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. По этой причине эту модель еще называют *моделью непрерывного контроля состояния заказа*. Следует заметить, что срок выполнения заказа L можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0^*.

Тема 7 Модели массового обслуживания

Литература [3], [13], [21]

Теория массового обслуживания – это такое научное направление, которое возникло в связи с необходимостью анализа процесса образования очередей.

Та часть процесса, в которой возникают запросы, называется обслуживаемой системой, а та, которая их удовлетворяет – обслуживающей. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем составляет систему массового обслуживания.

В теории массового обслуживания под *очередью* понимается скопление объектов любой природы, ожидающих обслуживания. Объект, нуждающийся в обслуживании, подает заявку или требование на обслуживание.

Обслуживание – это процесс выполнения работы по удовлетворению поступившего требования. Технические устройства, персонал или средства любой другой природы называются *каналами обслуживания*.

Система массового обслуживания (СМО) классифицируется по разным признакам. По числу каналов обслуживания они делятся на *одноканальные* и *многоканальные*. В зависимости от условий ожидания требованием начала обслуживания различают СМО *с отказами* и СМО *с ожиданием*.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких систем массового обслуживания, процесс функционирования которых является марковским, то есть все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, простейшие.

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, то есть вероятность поступления за время t ровно k требований задается формулой

$$P_k\left(t\right)=\frac{\left(l\,t\right)^k}{k!}\cdot e^{-l\,t} \qquad (7.1)$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствия последействия.

Наибольшее распространение в теории и особенно в практических приложениях получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t, определяется формулой

$$F\left(t\right)=1-e^{mt}=P\left(t_{\hat{\imath}\acute{a}\tilde{n}}<t\right), \qquad (7.2)$$

где μ – интенсивность обслуживания,

$$m=\frac{1}{t_{\hat{\imath}\acute{a}\tilde{n}}} \qquad (7.3)$$

Для оценки эффективности обслуживания в зависимости от условий задачи и преследуемых целей могут применяться различные показатели:

- среднее количество требований, которые может обслужить СМО в единицу времени;
- вероятность того, что все каналы свободны или заняты;
- средняя длина очереди;
- среднее время ожидания;
- коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

Тема 8 Балансовая модель

Литература [18], [21]

Под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Балансовые модели относятся к типу матричных экономико-математических моделей. В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение.

Основу экономико-математической модели межотраслевого баланса (МОБ) составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых затрат на производство единицы продукции

$$A = (a_{ij})_{n \cdot n}, \qquad (8.1)$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_y}{y_j}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат является довольно стабильной величиной во времени.

Систему уравнений баланса можно записать в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (8.2)$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y, \qquad (8.3)$$

где X – вектор-столбец валовой продукции и Y – вектор-столбец конечной продукции.

Система уравнений (8.2) и (8.3) называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (модель «затраты-выпуск»). С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- задавая в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объем конечной продукции каждой отрасли (y_i).

$$Y = (E - A) \cdot X, \qquad (8.4)$$

- задавая величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i).

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y, \tag{8.5}$$

- для ряда отраслей – задавая величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом случае удобнее пользоваться системой уравнений (8.2).

В формулах (8.4) и (8.5) *E* – единичная матрица размерности $n \cdot n$, а $(E - A)^{-1}$ - матрица обратная матрице $(E - A)$. Обозначив обратную матрицу через B, модель (8.5) можно записать в виде

$$X = B \cdot Y \tag{8.6}$$

Матрица $B = (b_{ij})_{n \cdot n}$ есть матрица коэффициентов полных затрат. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукцию i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Yj, \tag{8.7}$$

где ΔX_i и ΔYj - изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

Модели МОБ используются при прогнозировании цен. Прогноз цен на период *t* осуществляется на основе данных МОБ периода (*t-1*). Если рост цен в отраслях экономики характеризуется индексом роста цен в i-й отрасли p_i, однако при этом структура затрат в сопоставимых ценах осталась неизменной, то модель прогнозирования цен имеет вид.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i + \sum_{i=1}^{m} v_{ij} p_j = x_j p_j , j = \overline{1, n}, \tag{8.8}$$

где *m* – число элементов валовой добавленной стоимости.

3. СТРУКТУРА И ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа состоит из пяти задач. Варианты задания выдает преподаватель.

Контрольная работа выполняется в тетради. На обложке тетради необходимо указать название предмета, группу и шифр, фамилию и инициалы.

При оформлении работы необходимо оставлять поля для замечаний рецензента, рисунки и чертежи выполняются аккуратно с применением чертежных инструментов.

Перед решением задач необходимо указать номер варианта. Условия задач записываются полностью вместе с исходными данными своего варианта. Контрольные работы, в которых пропущены некоторые задачи или решены задачи не своего варианта, не зачитываются.

Решение задач необходимо располагать в порядке возрастания их номеров, и они должны обязательно сопровождаться пояснениями. Работы, в которых отсутствуют пояснения по ходу решения, не зачитываются и возвращаются студенту на доработку. В конце работы должен быть приведен список использованной литературы.

Каждый студент обязан выполнить контрольную работу и выслать ее на проверку в университет в срок, установленный в учебном графике. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и отправить на повторную проверку. Если на тетради будет стоять рекомендация рецензента «к защите», то студент может защищать работу. Результаты защиты заносятся в зачетную книжку.

4. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Фирма производит две модели ковровых изделий А и В. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется a_1 кг сырья, а для изделий модели В – a_2 кг сырья. Фирма может получить от своих поставщиков до *a* кг сырья в неделю. Для каждого изделия модели А требуется t_1 минут машинного времени, а для изделий модели В –t_2 минут. В неделю можно использовать t часов машинного времени. Сколько изделий каждой модели следует фирме выпустить в неделю, если каждое изделие модели А приносит c_1 ден. ед. прибыли, а каждое изделие модели В – c_2 ден. ед. прибыли.

Составить экономико-математическую модель задачи и решить ее графическим и симплекс-методом. Сравнить полученные разными методами решения и сделать выводы по результатам решения задачи.

Задание 2. Правительственное учреждение получило предложение от фирм F_1 , F_2, F_3 на покупку пальто трех размеров S_1, S_2, S_3. Стоимость пальто в зависимости от размеров и их количественное ограничение даны в таблице, называемой планом транспортной задачи.

Фирма	Размер			Ограничения
	S_1	S_2	S_3	
F_1	110	115	126	f_1
F_2	107	115	130	f_2
F_3	104	109	116	f_3
	a_1	a_2	a_3	

Определить, как следует распределить заказы для выполнения этих требований, чтобы общая стоимость была минимальной.

Задание 3. Для подготовки финансового плана на следующий год фирме необходимо получить данные от отделов сбыта, филиалов производства и бухгалтерии. В таблице указаны соответствующие операции и продолжительность. Нужно построить сетевую модель, провести ее расчет, построить календарный график.

Операции	Описание операций	Непосредственно предшествующая операция	Продолжительность в днях
A	Разработка прогноза сбыта	–	t_1
B	Изучение конъюнктуры рынка	–	t_2
C	Подготовка рабочих чертежей изделия и технология его производства	A	t_3
D	Разработка календарных планов производства	C	t_4
E	Оценка себестоимости производства	D	t_5
F	Определение цены изделия	B, E	t_6
G	Разработка финансового плана	F	t_7

Задание 4. 1)Одно из торговых предприятий должно определить уровень предложения услуг, так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящей недели.

Точное число покупателей неизвестно, но предполагается, что оно может принять одно из двух значений A_1 и A_2. Для каждого из этих возможных значений существует наиболее лучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонение от этих уровней приводит к дополнительным затратам из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса. Потери, получаемые в каждом случае, приведены в таблице в виде элементов матрицы потерь.

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{22}	a_{22}

Найти оптимальную стратегию, используя:

1) принцип Лапласа;

2) критерий Вальда;

3) критерий Гурвица (λ = 0,3).

2) Найти решение и дать геометрическую интерпретацию игры 2-х лиц с нулевой суммой, платежная матрица которой представлена в виде:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{22}	a_{22}

Задание 5. Пусть ежедневный спрос на некоторый вид товара составляет около **β** единиц. Затраты на размещение каждого заказа постоянны и равны **к.** Ежедневные затраты по хранению единицы запаса составляют h условных единиц. Нужно определить экономический размер партий и точку заказа, при сроке выполнения заказа, равном z дням.

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задание 1

№ вар.	a_1	a_2	t_1	t_2	a	t	c_1	c_2
1.	3	5	12	15	1500	100	7	8
2.	5	7	10	15	1900	180	3	4
3.	7	2	30	10	1200	150	12	5
4.	6	7	10	12	1500	100	8	9
5.	6	3	30	15	1800	150	8	4
6.	7	2	30	10	1400	150	7	2
7.	4	17	15	60	1800	120	2	8
8.	8	7	15	12	2000	160	10	8
9.	7	20	12	60	3000	180	2	6
10.	4	9	30	60	1500	100	3	4
11.	9	25	15	15	3600	130	8	22
12.	5	3	15	12	1800	140	8	6
13.	8	10	12	15	800	120	7	9
14.	3	2	30	15	600	110	11	6
15.	7	5	15	12	1500	110	8	7
16.	5	14	12	30	2100	150	2	3
17.	3	4	10	12	1400	120	6	7
18.	5	4	15	12	1800	150	4	3
19.	7	9	12	15	1900	140	8	10
20.	5	4	15	12	1200	120	8	7
21.	3	4	12	30	1700	160	2	4
22.	7	18	10	30	2100	160	3	9
23.	9	3	30	12	2700	180	12	6
24.	6	10	10	30	2000	160	3	9
25.	4	10	12	25	1200	200	5	14
26.	8	9	10	12	720	120	12	14
27.	5	4	15	12	1500	30	10	7
28.	5	7	10	15	2100	150	8	10
29.	6	7	12	15	1800	100	6	8

Задание 2

№ вар.	f_1	f_2	f_3	a_1	a_2	a_3
1.	1000	1500	2600	2000	1500	1100
2.	1200	1500	1200	900	1600	2300
3.	1000	1000	2500	1000	1500	1200
4.	1100	1200	1400	1000	1200	2500
5.	1800	1100	1000	800	1600	2600
6.	1100	1300	1200	800	1400	2200
7.	1400	1300	1000	800	1700	2500
8.	1400	1500	1200	900	1900	2000
9.	1400	1200	1000	1000	1600	2200
10.	1300	1200	1000	900	1800	2300
11.	1200	1100	1300	900	1200	2500
12.	1200	1500	1300	900	1500	2200
13.	1000	1200	1300	900	1300	2300
14.	1300	1300	1100	800	1100	2400
15.	1100	1200	1300	1100	1100	2400
16.	1300	1400	1300	800	1700	2500
17.	1500	1300	1200	900	1500	2500
18.	1200	1000	1500	900	1600	2500
19.	1500	1300	1200	800	1800	2500
20.	1900	1200	1000	900	1500	2300
21.	1000	1500	1200	1000	1500	2500
22.	1600	1200	2000	1100	1700	2500
23.	1000	1600	1000	900	1200	2400
24.	1300	1500	1200	800	1700	2100
25.	1200	1400	1100	900	1600	2700
26.	1500	1500	1200	800	1200	2400
27.	1200	1500	1200	900	1500	2600
28.	1200	1400	1300	1000	1100	2400
29.	1300	1300	1400	1200	1200	2300

Задание 3

№ вар.	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
1.	12	8	5	2	4	2	14
2.	10	5	4	2	2	1	18
3.	15	7	5	2	3	1	17
4.	9	8	4	3	3	1	15
5.	10	7	5	4	2	1	13
6.	9	5	4	4	3	2	12
7.	10	8	6	3	2	1	15
8.	10	6	5	4	5	3	13
9.	11	8	4	3	3	1	16
10.	15	7	6	3	4	2	14
11.	15	8	5	2	2	2	12
12.	12	6	4	5	3	1	13
13.	12	7	6	4	2	3	11
14.	12	8	4	4	2	1	14
15.	12	7	4	2	3	2	18
16.	9	4	5	4	2	2	16
17.	13	9	4	2	3	2	13
18.	9	8	4	3	3	2	20
19.	11	6	4	3	4	1	14
20.	11	7	5	4	2	2	14
21.	10	7	5	3	2	1	14
22.	9	9	4	3	2	1	15
23.	9	7	5	3	2	1	13
24.	10	6	6	2	3	1	15
25.	13	7	6	3	2	2	14
26.	10	5	5	3	3	1	13
27.	10	6	4	3	2	3	15
28.	9	8	4	3	3	1	15
29.	10	8	6	4	2	2	17

Задание 4

№ вар.	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1.	7	5	4	6
2.	8	6	5	7
3.	16	13	12	14
4.	15	12	11	13
5.	7	9	6	8
6.	17	15	14	16
7.	6	4	3	5
8.	12	10	9	11
9.	10	8	7	9
10.	11	9	8	10
11.	15	13	12	14
12.	18	16	15	17
13.	16	14	13	15
14.	13	11	10	12
15.	17	14	13	15
16.	7	5	4	6
17.	12	10	9	11
18.	5	2	1	3
19.	11	9	8	10
20.	8	6	5	7
21.	6	3	2	4
22.	10	8	7	9
23.	20	17	16	18
24.	5	3	2	4
25.	13	10	9	11
26.	14	12	11	13
27.	14	11	10	12
28.	19	16	15	17
29.	18	15	14	16

Задание 5

№ вар.	**β**	k	h	**z**
1.	100	200	0,04	11
2.	200	300	0,03	10
3.	100	100	0,04	8
4.	200	300	0,04	6
5.	100	300	0,06	10
6.	200	300	0,02	10
7.	200	500	0,05	8
8.	200	300	0,03	5
9.	300	100	0,06	7
10.	200	200	0,02	10
11.	500	500	0,05	8
12.	300	100	0,02	12
13.	200	200	0,05	9
14.	300	300	0,03	10
15.	300	300	0,02	9
16.	500	200	0,05	12
17.	300	300	0,02	9
18.	200	100	0,04	8
19.	300	200	0,03	8
20.	100	200	0,04	11
21.	100	200	0,04	9
22.	300	100	0,06	7
23.	500	200	0,05	6
24.	100	300	0,06	10
25.	300	200	0,06	7
26.	200	200	0,03	12
27.	100	100	0,06	5
28.	200	500	0,05	7
29.	200	200	0,02	3

Рекомендуемая литература

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование. – Мн.: Выш. школа, 1984. – 221с.

2. Экономико-математические методы и модели. Учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: БГЭУ, 1999. – 413с.

3. Рутковский Р.А., Сакович В.А. Экономико-математические методы в торговле. – Мн.: Выш. школа, 1986. – 192с.

4. Кузнецов А.В. и др. Высшая математика: Мат. программир.: Учеб. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: Выш. школа, 1994. – 286с.

5. Борисова С.А. Математические методы исследования экономики. Методы математического программирования: Учебное пособие для Вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 123с.

6. Федосеев В.В. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для Вузов. – М.: ЮНИТИ, 1999. –391с.

7. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. – Мн.: Выш. школа, 1984. – 231с.

8. Таха Х. Введение в исследование операций. Т.1. – М.: Мир, 1985. – 480с.

9. Таха Х. Введение в исследование операций. Т.2. – М.: Мир, 1985. – 496с.

10. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн.: Выш. школа, 1985. – 173с.

11. Воронин В.П. Экономико-математические модели планирования в торговле. – М.: Экономика, 1980. – 94с.

12. Конюховский В.П. Математические методы исследования операций в экономике – СПб.: Изд-во «Питер», 2000. – 208с.

13. Минюк С.А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие / Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432с.

14. Банди Б. Основы линейного программирования – М.: Радио и связь, 1989. – 176с.

15. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие – М.: Изд-во УРАО, 1998. – 160с.

16. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учеб. пособие для вузов. – Мн.:

Універсітэцкае, 1995. – 240с.

17. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения: Учеб. пособие / И.Л. Акулич, Е.И. Велесько, П. Ройш, Р.Ф. Стрельчонок. – Мн.: БГЭУ, 2003. – 348с.

18. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412с.

19. Абчук В.А. Экономико-математические методы: элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320с.

20. Похабов В.И. Антипенко Д.Г. Гриневич М.Н. Экономико-математические методы и модели (практикум): Учеб. пособие для студ. экономических спец. – Мн.: БНТУ, 2003. – 130с.

21. Юферева О.Д. Экономико-математические методы и модели: Сб. задач. – Мн.: БГЭУ, 2002. – 103с.